S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 762–781 (2016) УДК 621.394.74

DOI 10.17377/semi.2016.13.062 MSC 60K25

ОБ ЭРГОДИЧЕСКИХ АЛГОРИТМАХ В СИСТЕМАХ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА С ЧАСТИЧНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

М. Г. ЧЕБУНИН

Abstract. We consider a model of a multiple access system with a non-standard partial feedback. Time is slotted. Quantities of messages in different time slots are independent and identically distributed random variables. At the beginning of each time slot each message presented in the system is sent to the channel with a certain probability, depending on available system history. If $i \geq 1$ messages are being passed simultaneously, each of them is being passed successfully with probability q_i, and with probability $1 - q_i$ transmission is distorted, the message remains in the system and tries to be sent later. We consider the case when $q_i > 0$ only if $i \leq i_0$ for a given $i_0 \geq 1$. By the end of the slot we receive information about the quantity of messages that were transmitted successfully (it is the «feedback») – only this information is available. The transmission algorithm (protocol) is a rule of setting transmission probabilities at different times based on the information, available to each moment. In particular, if $q_1 = 1$ and $q_i = 0$ for all $i > 1$ then this feedback is called «success-nonsuccess».

In this paper we study the existence of stable algorithms and the rate of convergence. Algorithms determined in this paper are based on additional randomization idea proposed in [3].

Keywords: random multiple access; binary feedback; positive recurrence; (in)stability; Foster criterion.

Chebunin, M. G., On ergodic algorithms in systems of multiple access with partial feedback.

Поступила 31 мая 2016 г., опубликована 29 сентября 2016 г.

1. Введение

В работе рассматривается система передачи данных (система обслуживания), в которой сообщения при поступлении не могут образовывать очереди и их поступление на передающий прибор осуществляется при помощи некоторого случайного алгоритма управления. Модели такого рода называются системами случайного множественного доступа (с. м. д.). Совокупность правил, по которым каждое сообщение принимает решение, поступать ему на передающий прибор либо нет, будем называть алгоритмом управления.

Более подробно, рассматривается модель с. м. д. с бесконечным числом пользователей и одним передающим прибором, доступным для всех них. Мы предполагаем, что система работает в соответствии с «протоколом ALOHA», который может быть описан следующим образом. В системе нет взаимодействия между пользователями и в момент времени n каждое сообщение, присутствующее в системе, направляется на передающий прибор с одинаковыми вероятностями p_n, независимо от всех остальных. Предполагается, что время передачи всех сообщений одинаково и равно единице.

Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — входной процесс сообщений, где ξ_n — общее количество сообщений, поступающих в систему во временном интервале $[n-1, n)$. Предполагается, что $\{\xi_n\}$ — независимые одинаково распределенные (н. о. р.) случайные величины с конечным средним $\lambda = \mathbf{E}\xi_1$. Обозначим через N_n общее число сообщений, присутствующих в системе в момент времени n.

Предположим сначала, что передающий прибор за единицу времени может передать лишь одно сообщение, т. е. возможны три ситуации: либо не передавалось ни одного сообщения («пустой слот»), либо передавалось одно сообщение («успех»), либо произошло столкновение сообщений от двух или более пользователей («конфликт»). Будем называть такую модель *базовой.* Ясно, что для описания алгоритма (протокола) мы должны определить последовательность $\{p_n\}$. Самый простой вариант — положить вероятности p_n равными одному и тому же числу $p < 1$, т. н. *неадаптивный* протокол. Но, как хорошо известно (см. напр. [21]), в этом случае при любом выборе числа p алгоритм нестабилен, т. е. $N_n \to \infty$ п. н. при $n \to \infty$. Значит, надо выбирать числа p_n зависящими от доступной информации системы, т. е. рассматривать *адаптивные* протоколы.

Базовая модель является *централизованной*, если значения N_n известны пользователям. В таком случае (см. напр. [7]–[8]), если $\lambda < e^{-1}$, то алгоритм, при котором $p_n = 1/\max(1, N_n)$, стабилен (является эргодическим). Если же $\lambda > e^{-1}$, то любой алгоритм нестабилен, т. е. $N_n \to \infty$ п. н. при $n \to \infty$. Здесь пороговый уровень e^{-1} называется *пропускной способностью* системы.

В данной работе мы будем изучать *децентрализованную* модель с. м. д., в которой значения N_n не могут наблюдаться. Для базовой децентрализованной модели хорошо известны алгоритмы, использующие т. н. троичную обратную связь (см. напр. [9]–[10]), при которой пользователи могут наблюдать выход прибора и различать три возможные ситуации: либо «пустой слот», либо «успех», либо «конфликт». С 80-х годов известно (см. напр. [11], [12], [19]), что при использовании троичной обратной связи пропускная способность системы также равна e^{-1}. При троичной обратной связи стабильный алгоритм может быть построен рекуррентно следующим образом: в зависимости от p_n и обратной связи, вероятность p_{n+1} выбирается больше (если слот был пуст), равной (в случае успеха), меньше (в случае конфликта) чем p_n. В [11] предлагалось мультипликативное увеличение или уменьшение вероятностей p_n (т. е. умножение или деление на константу), а в [12] аддитивное (т. е. добавление или вычитание константы). Интуитивно ясно, что главным достоинством троичной обратной связи является умение проводить различие между пустым слотом и наложением сообщений. В этом случае мы всегда можем сделать предположение о том, нужно ли нам увеличить или уменьшить вероятность p_n. Вскоре после появления работ [9]–[10] были предложены и исследованы алгоритмы, основанные на меньшем объеме информации (то есть при наличии лишь т. н. «двоичной обратной связи») – либо «пустой или непустой слот» (мы не можем отличать успешную передачу от наложения сообщений), либо «конфликт или неконфликт» (мы не можем отличать пустой слот от успешной передачи). В работах [13]–[14] для данных видов обратной связи были доказаны аналогичные результаты существования (отсутствия) стабильного алгоритма, если скорость входного сигнала ниже (выше) порогового уровня e^{-1}.

Менее изученным является случай обратной связи «успех-неуспех». Если передачи не произошло, то неясно, что было – либо был пустой слот, либо наложение сообщений (конфликт двух и более сообщений). Вообще говоря, далеко не очевидно, как разумно задавать вероятность p_{n+1} на основании p_n, если в n-ом слоте происходит «неуспех»: нужно ли ее увеличивать или уменьшать. Данный вид обратной связи интересен и с практической точки зрения, т. к. для того, чтобы передающий прибор мог отличать отсутствие передачи от наложения сообщений, он должен уметь отличать «увеличение энергии» (структуру присутствия), из-за наложения сообщений, от простоя прибора. В некоторых случаях сделать это невозможно. Примерами данных систем являются сети, в которых используется обратная связь «успех-неуспех» (см. напр. [20]). Известно, что алгоритмы, используемые на практике для такого вида обратной связи, не обеспечивают устойчивой работы в случае бесконечного числа абонентов. Эта проблема не является существенной для сетей, в которых за один канал передачи конкурирует небольшое число абонентов. Однако, при увеличении числа абонентов использование таких алгоритмов может привести к появлению длительных задержек. Следовательно, поиск алгоритмов, обеспечивающих стабильную работу системы с обратной связью «успех-неуспех», представляет не только теоретический, но и практический интерес.

Разнообразные алгоритмы, предложенные для такого вида обратной связи (см. напр. [15], [16], [17], [18]), обеспечивают стабильное функционирование системы за счет введения некоторых расширений модели (напр. введения специального тестирующего пакета и т. п.) или за счет использования индивидуальной истории сообщений. Впервые стабильный алгоритм, который использует лишь обратную связь вида «успех-неуспех» без дополнительных опций, был построен в работе [3]. Основной идеей при построении алгоритма является введение второй рандомизации, т. е. вероятности p_n стали зависеть не только от случайной обратной связи с прибором передачи, но и от дополнительно введенной последовательности н. о. р. случайных величин. Более точно, с обратной связью «неуспех» вероятность p_n уменьшается. Если же был «успех», то в зависимости от дополнительно введенной случайной величины вероятность p_n либо увеличивается, либо уменьшается. Предложенный в [3] вид алгоритма зависит от знания границ, в которых может находиться интенсивность входного потока λ. Более точно, в [3] доказывается, что при любом выборе пары чисел $0 < \lambda_- < \lambda_+ < e^{-1}$ можно построить алгоритм, стабильный для любого $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$. В работе [3] авторы также сформулировали гипотезу о существовании и виде алгоритма, являющегося стабильным при всех значениях интенсивности λ из интервала $(0, e^{-1})$.

Мы докажем справедливость гипотезы из работы [3]. Более того, мы рассмотрим более общий класс децентрализованных моделей с.м.д., содержащий базовую модель, и докажем для этого класса более общее утверждение, из которого в качестве следствия получим и положительный ответ на сформулированную в [4] гипотезу. Более подробно, мы рассматриваем такую более общую постановку. За единицу времени передающий прибор может передать не более $i_0 \geq 1$ сообщений (где i_0 — заданное конечное число) и что при передаче каждое из сообщений может быть искажено. Неверно переданные сообщения возвращаются в систему. Предполагается, что обслуживающиеся сообщения не могут обмениваться информацией, и если в момент времени n на обслуживание в прибор поступило $i \in \{1, ..., i_0\}$ сообщений, то каждое из них может быть передано с одинаковой вероятностью $q_i \in [0, 1]$, где $q_{i_0} \neq 0$, независимо от всех остальных (для $i > i_0$ полагаем $q_i = 0$). В частности, при $i_0 = 1,\ q_1 = 1$, мы имеем дело с базовой моделью. Если же положить $i_0 = k,\ q_1 = q_2 = ... = q_k = 1$, то мы получим модель, описание которой можно найти в работе [19] стр. 262-272. По-прежнему будем предполагать, что N_n является «ненаблюдаемой» величиной, а также, что нам доступна информация о количестве переданных сообщений (т. е. мы можем наблюдать выход с прибора). Это согласуется с базовой моделью, т. к. при $i_0 = 1$ и $q_1 = 1$, информацию о том, что произошло — «успех» или «неуспех» — можно интерпретировать и как количество переданных сообщений (либо 1, либо 0).

В данной работе вводится и описывается достаточно общий класс дважды рандомизированных алгоритмов с частичной обратной связью, использующих информацию о количестве переданных сообщений. Этот класс алгоритмов включает в себя алгоритмы, описанные в одной из гипотез работы [3]. Задача исследования стабильности алгоритма сводится к задаче исследования условий положительной возвратности и эргодичности вспомогательной двумерной марковской цепи. В зависимости от вида последовательности $\{q_i\}_{i=1}^{i_0}$ находится граница пропускной способности данной децентрализованной системы с. м. д., т. е. такое значение интенсивности входного потока λ_{max}, что стабильный алгоритм ALOHA может быть построен тогда и только тогда, когда $\lambda < \lambda_{max}$ (см. лемму 4 в приложении). В частности, для базовой модели (при $i_0 = 1,\ q_1 = 1$) получаем $\lambda_{max} = e^{-1}$. Далее доказывается стабильность введенного класса алгоритмов при $\lambda < \lambda_{max}$. В частности, для базовой модели мы докажем справедливость сформулированной в работе [3] гипотезы, но при некотором уточненном условии. Также, в зависимости от моментных ограничений на распределение случайной величины ξ_1, мы получим оценки скорости сходимости рассматриваемой марковской цепи к ее стационарному распределению.

Работа построена следующим образом. В параграфе 2 введена модель с. м. д., приведено описание выбранного для исследования класса алгоритмов и сформулированы две основные теоремы. В параграфе 3 строится пробная функция и формулируются вспомогательные утверждения. В параграфах 4 и 5 приводятся доказательства основных теорем. Доказательства вспомогательных утверждений приводятся в приложении.

Напомним следующие стандартные обозначения. Для двух положительных функций ϕ и ψ, запись $\phi(t) = o(\psi(t))$ означает, что $\phi(t)/\psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и запись $\phi(t) \sim \psi(t)$ — что эти функции эквивалентны, т. е. $\phi(t)/\psi(t) \to 1$ при $t \to \infty$.

2. Описание модели и класса алгоритмов

Рассматривается децентрализованная модель с. м. д. с бесконечным числом пользователей и одним передающим прибором, доступным для всех них. Пользователи обмениваются сообщениями по этому прибору. Напомним, что ξ_n — общее количество сообщений, поступающих в систему во временном интервале $[n-1, n)$. Предполагается, что $\{\xi_n\}$ — н. о. р. случайные величины с конечным средним $\lambda = \mathbf{E}\xi_1$. Пусть N_n — общее (ненаблюдаемое) число сообщений, присутствующих в системе в момент времени n, и $\{q_i\}_{i=1}^{i_0}$ — управляющая последовательность (известная) работы прибора. Обозначим через B_n суммарное (ненаблюдаемое) количество сообщений, поступивших на передающий прибор, а через J_n — суммарное (наблюдаемое) количество сообщений, переданных прибором в момент времени n. Ясно, что B_n — случайная величина с условно биномиальным распределением $B(N_n, p_n)$, т. е.

$$\mathbf{P}(B_n = k | N_n = m, p_n = p) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$$

при $k = 0, 1, ..., m$. Положим $B_n = 0$ при $N_n = 0$. Если $B_n = i \in \{1, ..., i_0\}$, то J_n также будет случайной величиной с условно биномиальным распределением $B(i, q_i)$. В противном случае $J_n = 0$, т. е. либо слот является пустым ($B_n = 0$), либо происходит конфликт сообщений ($B_n > i_0$). Имеет место следующая рекурсия:

$$N_{n+1} = N_n - J_n + \xi_{n+1}. \tag{1}$$

Для более формального описания модели зададим два взаимно независимых семейства $\{U_{n,j}^{(1)}\}_{n \geq 0, j \geq 1}$, $\{U_{n,j}^{(2)}\}_{n \geq 0, j \geq 1}$ н. о. р. случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Тогда B_n и J_n можно задать следующими формулами:

$$B_n = \sum_{j=1}^{N_n} I(U_{n,j}^{(1)} < p_n)$$

и

$$J_n = I(B_n = i \in \{1,..,i_0\}) \cdot \left(\sum_{j=1}^{i} I(U_{n,j}^{(2)} < q_i) \right) \in \{0,..,i_0\},$$

где как обычно $\sum\limits_{1}^{0} = 0$.

Напомним, что мы рассматриваем децентрализованные алгоритмы, при которых известны лишь значения из прошлого $J_k,\ k < n$. Мы рассматриваем алгоритмы, в которых $\{p_n\}$ определены рекурентно как (случайное) число, которое зависит от истории системы только через p_{n-1} и J_{n-1}. Заметим, что двумерная последовательность (N_n, p_n) $n = 1, 2, \dots$ образует однородную по времени цепь Маркова.

Пусть $N_0 = m \geq 0$ — начальное количество сообщений в системе, а $S_0 = s \geq 1$ — некоторое положительное число, которое является «оценкой» неизвестного m. Пусть $\mathcal{H}$ — класс неубывающих функций $h : [1, \infty) \to \mathbf{N}$ таких, что при $t \to \infty$

$$h(t) = o(\sqrt{t}). \tag{2}$$

Для каждой функции $h \in \mathcal{H}$ сопоставим $\mathcal{E}_h$ — класс положительных функций $\varepsilon_h : [1, \infty) \to (0, 1/2]$ таких, что если $h(t)$ есть неограниченная функция, то при $t \to \infty$

$$\varepsilon_h(t) \to 0 \ \text{ и } \ h(t)\varepsilon_h^2(t) \to \infty. \tag{3}$$

Для ограниченных $h(t)$, положим $\varepsilon_h(t) = const \in (0, 1/2]$. Пусть далее $C \in \mathbf{N}$ — некоторый положительный параметр, и пусть $\{I_n\}$ — последовательность н. о. р. случайных величин, которая не зависит от введенных ранее случайных величин и имеет распределение Бернулли с параметром $1/2$, т. е. $\mathbf{P}(I_n = 1) = 1 - \mathbf{P}(I_n = 0) = 1/2$.

Класс алгоритмов $\mathcal{A}$ определяется через $C,\ h,\ \varepsilon_h,\ \{J_n\}$ и $\{I_n\}$ следующим образом. Вероятности передачи p_n и числа S_n обновляются рекурентно: зная S_n и $J_n = j \in \{0, 1, ..., i_0\}$, полагаем

$$p_n = \begin{cases} (1 - \varepsilon_h(S_n))/S_n & \text{если } I_n = 0, \\ 1/S_n & \text{если } I_n = 1, \end{cases}$$

и затем

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n + C & \text{если } J_n = 0, \\ S_n + jCh(S_n) & \text{если } J_n = j > 0 \text{ и } I_n = 0, \\ \max(S_n - jCh(S_n), 1) & \text{если } J_n = j > 0 \text{ и } I_n = 1. \end{cases}$$

Обозначим такой алгоритм $A(C, h, \varepsilon_h) \in \mathcal{A}$. Заметим, что последовательность $\{(S_n, N_n)\}$ образует однородную по времени цепь Маркова. Далее, для $X_n = (S_n, N_n)$ определим норму $|X_n| = |S_n| + |N_n|$. Будем предполагать, что $X_0 = x = (s, m)$ — неслучайное начальное состояние. Будем использовать следующие сокращения $\mathbf{E}_x\{\cdot\} := \mathbf{E}\{\cdot \ |X_0 = x\}$ и $\mathbf{P}_x\{\cdot\} := \mathbf{P}\{\cdot \ |X_0 = x\}$. Положим также $\beta(s) = 1 - \varepsilon_h(s)$.

Выделим два подкласса класса $\mathcal{A}$: подкласс алгоритмов $\mathcal{A}_1$ с ограниченными скачками, в котором функция $h(t)$ является константой и подкласс алгоритмов $\mathcal{A}_2$ с растущими скачками, в котором $h(t) \uparrow \infty$. Ясно, что $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. В частном случае $i_0 = 1,\ q_1 = 1$, будем использовать обозначения $\mathcal{A}'_1$ вместо $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}'_2$ вместо $\mathcal{A}_2$. Классы $\mathcal{A}'_1$ и $\mathcal{A}'_2$ были введены в [3]. В работе [3] доказано существование стабильного алгоритма из класса $\mathcal{A}'_1$ при дополнительных ограничениях (см. пред. параграф) и высказана гипотеза о возможной стабильности алгоритмов из класса $\mathcal{A}'_2$ при более слабом ограничении на рост функции $h(t)$ (предполагалось лишь, что $h(t) = o(t)$ при $t \to \infty$). Нам удалось доказать справедливость гипотезы при дополнительном ограничении (2) на рост функции $h(t)$.

В дальнейшем в работе мы ограничимся рассмотрением алгоритмов из класса $\mathcal{A}_2$. Отметим их некоторые простые свойства. Для $m > i_0$ при $|x| \to \infty,\ m/s \to z \in [0, \infty]$

$$\mathbf{E}_x J_0 = \sum_{i=1}^{i_0} \mathbf{E}(J_0 | B_0 = i) \cdot \mathbf{P}_x(B_0 = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0} i \cdot q_i \cdot \frac{C_m^i}{2} \cdot \left(\left(\frac{\beta(s)}{s}\right)^i \cdot \left(1 - \frac{\beta(s)}{s}\right)^{m-i} + \left(\frac{1}{s}\right)^i \cdot \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{m-i} \right)$$

$$\sim j(z, \beta(s)) = j_1(z, \beta(s)) + j_2(z) = \frac{1}{2} p(\beta(s) \cdot z) e^{-\beta(s) \cdot z} + \frac{1}{2} p(z) e^{-z}, \tag{4}$$

равномерно по всем $\beta(s) \in [0.5, 1]$, где $z^k e^{-z} = 0$ при $z \in \{0, \infty\}$, и $p(z) = \sum_{i=1}^{i_0} \frac{q_i \cdot z^i}{(i-1)!}$ — монотонно возрастающая ($p'(z) > 0, z > 0$) положительная функция такая, что $p(0) = 0$, $p(z)e^{-z} \to 0$ при $z \to \infty$. Для формулировки основных утверждений нам потребуется следующее условие:

($\mathbf{C}_0$) *Существует единственный корень z_0 уравнения $p(z) = p'(z)$ при $z > 0$.*

Из ($\mathbf{C}_0$) с необходимостью следует, что при $z > 0$ функция $p(z)e^{-z}$ имеет ровно один максимум в точке $z = z_0$,

$$\lambda_{max} = \max_{z \in (0, \infty)} p(z) e^{-z} = p(z_0) e^{-z_0}, \tag{5}$$

т. е. $p(z)e^{-z}$ возрастает по z до λ_{max} при $z \in (0, z_0)$ и убывает при $z > z_0$.

В ряде частных случаев z_0 находится в явном виде. Если $i_0 = 1$ и $q_1 = 1$, то $p(z) = z$, т. е. выполнено условие ($\mathbf{C}_0$) с $z_0 = 1$ и $\lambda_{max} = e^{-1}$.
Если $i_0 = 2$ и $q_1 q_2 > 0$, то выполнено условие ($\mathbf{C}_0$) и

$$p(z) = q_1 \cdot z + q_2 \cdot z^2, \quad z_0 = 1 - q + \sqrt{1 + q^2}, \quad \lambda_{max} = p(z_0) \cdot e^{-z_0},$$

где $q = q_1/(2q_2)$.
Если $i_0 = k \geq 1$ и $q_i = 1/i$ при $i \in \{1, .., k\}$, то выполнено условие ($\mathbf{C}_0$) и

$$p(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{z^i}{i!}, \quad z_0 = (k!)^{1/k}, \quad \lambda_{max} = p(z_0) \cdot e^{-z_0}.$$

Если же выписать z_0 (в явном виде) не удается, то для проверки условия ($\mathbf{C}_0$) можно воспользоваться классической теоремой Декарта (или правилом знаков

Декарта). Теорема утверждает, что количество положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно количеству перемен знаков в ряду его коэффициентов или на чётное число меньше этого количества (корни считаются с учётом кратности, нулевые коэффициенты при подсчёте числа перемен знаков не учитываются). В силу определения функции $p(z)$ ясно, что функция $p(z)e^{-z}$ имеет точку максимума на положительной полуоси. Следовательно, в силу теоремы Декарта для выполнения условия $(\mathbf{C}_0)$ достаточно, чтобы в коэффициентах полинома $p(z) - p'(z)$ была ровно одна перемена знаков. К примеру, если $i_0 = k > 2$ и $q_1 = q_2 = ... = q_k = 1$, то явный вид корня z_0 неизвестен, но по теореме Декарта условие $(\mathbf{C}_0)$ по-прежнему выполнено.

Определение 1. *Будем говорить, что цепь Маркова $\{X_n\}$ положительно возвратна, если существует компактное множество $\mathcal{K} \in \mathbf{R}^2_+$ такое, что*

- *для любой пары начальных значений $(S_0, N_0) = (S, N)$,*

$$\tau_{S,N} = \min\{n \geq 1 : (S_n, N_n) \in \mathcal{K}\} < \infty \qquad \text{п. н.},$$

- *кроме того,*

$$\sup_{(S,N)\in\mathcal{K}} \mathbf{E}\tau_{S,N} < \infty.$$

Определение 2. *Состояние $x_0 = (S_0, N_0)$ называется атомом цепи $\{X_n\}$, если $\mathbf{P}_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = x_0\}\right) = 1$ для любого $x = (S, N)$. Пусть $X_0 = x_0$ — атом цепи $\{X_n\}$. Обозначим $\tau_{x_0} = \min\{n > 0 : X_n = x_0\}$. Атом x_0 называется положительным, если $\mathbf{E}\tau_{x_0} < \infty$.*

Хорошо известно (см. [1] и [2]), что если цепь Маркова $\{X_n\}$ апериодична и имеет положительный атом, то цепь эргодична в смысле сходимости в метрике полной вариации: существует вероятностная мера μ такая, что для любого начального значения (S_0, N_0), распределение случайного вектора (S_n, N_n) сходится к μ в метрике полной вариации, т. е.

$$\sup_B |\mathbf{P}((S_n, N_n) \in B) - \mu(B)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

где супремум берется по всем борелевским множествам $B \in \mathbf{R}^2_+$.
Всюду далее мы будем предполагать апериодичность $\{X_n\}$. В частности, для этого достаточно, чтобы $q_1 > 0$ и $\mathbf{P}\{\xi_1 = 0\} > 0$. Поясним вышесказанное. Выберем некоторое $i > 0$ такое, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = i\} > 0$. Тогда с положительной вероятностью осуществимы следующие цепочки переходов: $(1,1) \to (1,i) \to (1+C,i) \to (1,i-1) \to ... \to (1+C,2) \to (1,1)$ и $(1,1) \to (1+C,1+i) \to (1,i) \to (1+C,i) \to (1,i-1) \to ... \to (1+C,2) \to (1,1)$, поэтому наибольший общий делитель всевозможных возвращений в состояние $(1,1)$ равен единице, и все состояния цепи сообщающиеся. В частности, для базовой модели (т. е. при $i_0 = 1$ и $q_1 = 1$) из условия $\mathbf{E}\xi_1 < 1$ следует, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = 0\} > 0$. Ясно, что если конечное множество положительно возвратно, то в нем можно найти положительно возвратный атом. Поэтому при доказательстве эргодичности мы будем доказывать лишь положительную возвратность в конечное множество цепи $\{X_n\}$.

Определение 3. *Назовем цепь Маркова $\{X_n\}$ невозвратной, если существует начальное значение (S_0, N_0) такое, что $S_n + N_n \to \infty$ п. н. при $n \to \infty$.*

Определение 4. *Алгоритм A стабилен, если цепь Маркова $\{X_n\}$, определенная в A, эргодична, и нестабилен, если цепь Маркова невозвратна.*

В работе доказаны три основных утверждения: теорема о стабильности алгоритмов из класса $\mathcal{A}_2$ и две теоремы об оценках скорости сходимости.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие $(\mathbf{C}_0)$ и $\lambda = \mathbf{E}\xi_1 < \lambda_{max}$. Если $h \uparrow \infty$ и выполнено (2) и (3), то существует константа $C \in \mathbf{N}$, т. ч. алгоритм $A_2(C, h, \varepsilon_h)$ стабилен для любого $\lambda \in (0, \lambda_{max})$.*

Замечание 1. *Из теоремы 1 следует, что для базовой модели (т. е. при $i_0 = 1$ и $q_1 = 1$) существует алгоритм из класса $\mathcal{A}_2'$ который стабилен при любом $\lambda \in (0, e^{-1})$. Это доказывает вторую гипотезу из работы* [3] *при дополнительном ограничении (2). Ниже из доказательства теоремы 1 будет видно, что при любом выборе пары чисел $0 < \lambda_- < \lambda_+ < \lambda_{max}$, можно построить алгоритм из класса $\mathcal{A}_1$, стабильный для любого $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$. Отметим, что в случае базовой модели доказательство существования стабильного алгоритма из класса $\mathcal{A}_1'$ получено в работе* [3].

Теорема 2. *Пусть выполнено условие $(\mathbf{C}_0)$ и $\lambda < \lambda_{max}$. Пусть при некотором $\alpha > 1$ конечен степенной момент $\mathbf{E}\xi_1^\alpha < \infty$. Тогда существует задание на одном вероятностном пространстве цепи Маркова X_n и стационарной цепи Маркова X^n такое, что*

$$\sup_B |\mathbf{P}(X_n \in B) - \mathbf{P}(X^n \in B)| \le C_1/n^{\alpha-1},$$

где C_1 — некоторая постоянная, а супремум берется по всем борелевским множествам $B \in \mathbf{R}_+^2$, в следующих трех случаях:
(a) для стабильных алгоритмов с ограниченными скачками из класса $\mathcal{A}_1$,
(b) для стабильных алгоритмов с растущими скачками из класса $\mathcal{A}_2$ при $\alpha \ge 2$,
(c) при $\alpha < 2$ для стабильных алгоритмов с растущими скачками из класса $\mathcal{A}_2$, в которых $h(s)$ — медленно меняющаяся функция.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие $(\mathbf{C}_0)$ и $\lambda < \lambda_{max}$. Пусть при некотором $\mu > 0$ конечен экспоненциальный момент $\mathbf{E}e^{\mu\xi_1} < \infty$. Тогда для стабильных алгоритмов из класса $\mathcal{A}_1$, существует $\mu' \in (0, \mu]$ и задание на одном вероятностном пространстве цепи Маркова X_n и стационарной цепи Маркова X^n такие, что*

$$\sup_B |\mathbf{P}(X_n \in B) - \mathbf{P}(X^n \in B)| \le C_2 \cdot e^{-\mu' n},$$

где C_2 — некоторая постоянная, а супремум берется по всем борелевским множествам $B \in \mathbf{R}_+^2$.

Замечание 2. *Из доказательства теоремы 2, приводимого ниже, будет видно, что при $\alpha \in (1, 2)$ утверждение теоремы справедливо для всех стабильных алгоритмов с растущими скачками, в которых $h(s) = o(s^{1-1/\alpha})$ при*

$s \to \infty$. *В частности, если значение* α *нам не известно, то для справедливости теоремы 2 в качестве* $h(s)$ *можно взять любую медленно меняющуюся функцию (м. м. ф.), например* $h(s) = [(\ln s)^k]$ *или* $h(s) = [\exp(\sqrt{\ln s})]$.

3. Построение пробной функции

Далее нам понадобится пробная функция $L(x) = L(x_1, x_2)$, которую мы определим через ее линии уровня. Данные линии уровня будут зависеть от некоторых положительных постоянных k_1 и k_2, которые будут определены в доказательстве теоремы 1. Построим $L(x_1, x_2) = c > 0$ следующим образом (см. рис. 1). Мы стартуем из точки $(0, c)$ и движемся (в положительном квадранте) по прямой с угловым коэффициентом k_1 до пересечения с лучом $z = \frac{x_2}{x_1} = z_2$, т. е. если $z \geq z_2$, то $L(x_1, x_2) = x_2 - k_1 x_1$. Затем от луча $z = z_2$ до луча $z = z_2 - \varepsilon$ рисуем гладкую кривую так, чтобы ее градиент изменялся (покомпонентно линейно в зависимости от углового коэффициента z) от $(-k_1, 1)$ до $(0, 1)$. От луча $z = z_2 - \varepsilon$ рисуем прямую параллельно оси абсцисс до пересечения с лучом $z = z_0$. От $z = z_0$ до $z = z_0 - \varepsilon$ рисуем гладкую кривую так, чтобы ее градиент изменялся (покомпонентно линейно в зависимости от углового коэффициента z) от $(0, 1)$ до $(k_2, 0)$. От луча $z = z_0 - \varepsilon$ рисуем прямую параллельно оси ординат до пересечения с лучом $z = t_1 + \varepsilon$. Затем до луча $z = t_1$ рисуем гладкую кривую так, чтобы ее градиент изменялся (покомпонентно линейно в зависимости от углового коэффициента z) от $(k_2, 0)$ до $(k_2, -1)$ и соединяем кривую с некоторой точкой $(c', 0)$ лежащей на оси абсцисс, прямой с угловым коэффициентом k_2.

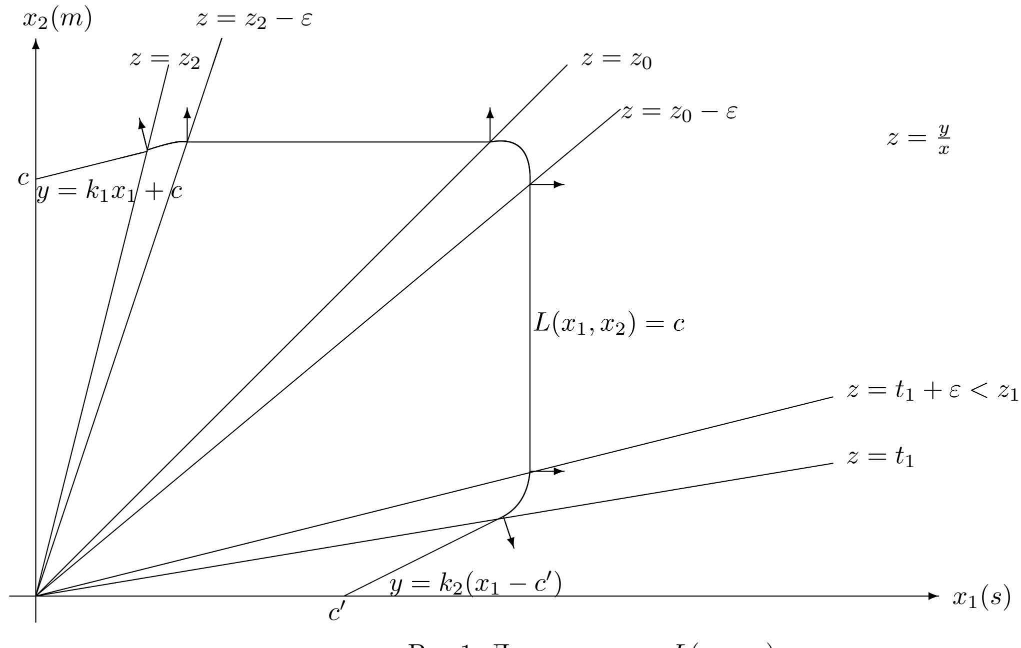

Рис.1: Линии уровня $L(x_1, x_2) = c$.

Более точно, полагая $z = \frac{x_2}{x_1}$ и

$$\nabla L(x) = \begin{pmatrix} L'_{x_1}(x) \\ L'_{x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(z) \\ G_2(z) \end{pmatrix} = \begin{cases} \binom{-k_1}{1} & \text{при } z \geq z_2, \\ \binom{\frac{z_2 - z}{\varepsilon} k_1 - k_1}{1} & \text{при } z_2 \geq z \geq z_2 - \varepsilon, \\ \binom{0}{1} & \text{при } z_2 - \varepsilon \geq z \geq z_0, \\ \binom{\frac{z_0 - z}{\varepsilon} \cdot k_2}{\frac{z - z_0}{\varepsilon} + 1} & \text{при } z_0 \geq z \geq z_0 - \varepsilon, \\ \binom{k_2}{0} & \text{при } z_0 - \varepsilon \geq z \geq t_1 + \varepsilon, \\ \binom{k_2}{\frac{z - t_1}{\varepsilon} - 1} & \text{при } t_1 + \varepsilon \geq z \geq t_1, \\ \binom{k_2}{-1} & \text{при } z \leq t_1. \end{cases}$$

строим линии уровня с помощью следующей формулы для восстановления функции по ее начальной точке и градиенту

$$F(x_1, x_2) = F(x_1^0, x_2^0) + \int_{x_1^0}^{x} F'_{x_1}(u, y_1^0) du + \int_{y_1^0}^{y} F'_{x_2}(x_1, u) du,$$

где в качестве начальной точки берется $(0, c)$. Таким образом, все точки линии уровня $L(x) = c$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$\int_0^{x_1} L'_{x_1}(u, c)\, du + \int_c^{x_2} L'_{x_2}(x_1, u)\, du = 0.$$

Нам потребуются вспомогательные утверждения, которые, вообще говоря, носят общий характер и относятся к виду построенных нами пробных функций. Сформулируем три вспомогательные леммы, доказательство которых помещено в приложение. Мы будем пользоваться следующим определением. Пусть $X_0 = x = (s, m)$, под $\Delta L(x)$ понимаем приращение $L(X_1) - L(x)$. Будем полагать, что $k_1 < z_0 - \varepsilon$. Положим $T_1 = (z_0 - \varepsilon - k_1)/(1 + z_0 - \varepsilon)$, $T_2 = \max(k_1, k_2, 1)$.

Лемма 1. *Для $L(x)$, определенной выше при $s \geq 0$, $m \geq 0$ справедливо*

1) $T_1 \cdot |x| \leq L(x) \leq T_2 \cdot |x|$,

2) если для некоторого $\alpha > 1$ выполнено $\mathbf{E}\xi_1^\alpha < \infty$, то найдется последовательность $h(s) \to \infty$ такая, что $\mathbf{E}|\Delta L(x)|^\alpha = o((L(x))^{\alpha - 1})$ при $|x| \to \infty$.

Лемма 2. *Пусть $h \in \mathcal{H}$, тогда*

$$\lim_{|x| \to \infty} (\mathbf{E}_x(L(X_1) - L(x)) - \nabla L(x) \cdot \mathbf{E}_x(X_1 - x)) = 0. \tag{6}$$

Лемма 3. *Пусть выполнено условие $(\mathbf{C}_0)$ и $h \uparrow \infty$, $h \in \mathcal{H}$, $\varepsilon_h \in \mathcal{E}_h$, тогда для любого фиксированного $z \in (0, \infty)$*

$$\lim_{s \to \infty} h(s) \cdot (p((1 - \varepsilon_h(s))z) \cdot e^{-(1 - \varepsilon_h(s)) \cdot z} - p(z) e^{-z}) = \infty, \tag{7}$$

где предел равен $-\infty$ при $z \leq z_0$ и $+\infty$ при $z > z_0$.

Замечание 3. *Первый пункт леммы 1 является общим фактом и относится только к виду функции $L(x)$. Второй пункт леммы 1 является простым следствием первого пункта, определений $\Delta L(x)$ и класса алгоритмов $\mathcal{A}_2$. Лемма 2 справедлива не только для цепи Маркова, ассоциированной с алгоритмом из класса $\mathcal{A}_2$, но и для более широкого класса цепей Маркова, определенных в положительном квадранте. В качестве X_n достаточно взять цепь*

Маркова такую, что выражение $L(X_1) - L(x) - \nabla L(x) \cdot (X_1 - x)$ *будет равномерно интегрируемо и будет сходится к нулю по вероятности при* $|x| \to \infty$. *В частности, лемма 2 справедлива для любой цепи Маркова, ассоциированной с алгоритмом из класса* $\mathcal{A}_1$.
Лемма 3 справедлива для более широкого класса функций $p(z)$ *не обязательно представимых в виде (4). В качестве* $p(z)$ *достаточно взять любую дважды непрерывно дифференцируемую монотонно возрастающую функцию такую, что* $p(0) = 0,\ p(z)e^{-z} \to 0$ *при* $z \to \infty$ *и функция* $p(z)e^{-z}$ *имеет единственную точку максимума при* $z > 0$.

4. Стабильность

Доказательство теоремы 1.
Напомним, что $X_n = (S_n, N_n)$ — цепь Маркова, принимающая значения в положительном квадранте и при $s + m \to \infty,\ m/s \to z$ для $s > i_0 \cdot Ch(s)$,

$$j(s,m) := \mathbf{E}(J_n | X_n = (s,m)) \sim j(z, \beta(s)) = j_1(z, \beta(s)) + j_2(z),$$

$$\mathbf{P}(J_n \neq 0 | X_n = (s,m)) = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=i}^{i_0} \mathbf{P}(J_n = i | B_n = j) \cdot \mathbf{P}(B_n = j | X_n = (s,m))$$

$$= \sum_{j=1}^{i_0} \sum_{i=1}^{j} C_j^i q_j^i (1-q_j)^{j-i} \frac{C_m^j}{2} \left(\left(\frac{\beta(s)}{s}\right)^j \left(1 - \frac{\beta(s)}{s}\right)^{m-j} + \left(\frac{1}{s}\right)^j \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{m-j} \right)$$

$$\sim \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i_0} (1 - (1-q_j)^j)((\beta(s) z)^j e^{-\beta(s)\cdot z} + z^j e^{-z})/j! := j^*(z, \beta(s)),$$

где $j^*(0, \beta(s)) = j^*(\infty, \beta(s)) = 0$ и $j^*(z, \beta(s)) \sim j^*(z, 1)$ при $s \to \infty$. В силу того, что $j^*(z,1) \le e^{-z} \sum\limits_{i=1}^{i_0} z^i / i!$ получаем

$$\max_{z \in [0,\infty]} j^*(z, \beta(s)) \le \max_{z \in [0,\infty]} e^{-z} \sum_{i=1}^{i_0} z^i / i! = \exp(-(i_0!)^{1/i_0}) \sum_{i=1}^{i_0} (i_0!)^{i/i_0} / i! := \kappa_{i_0} < 1.$$

Кроме того,

$$a(s,m) := \mathbf{E}(N_{n+1} - N_n | S_n = s, N_n = m) \sim a(z, \beta(s)) = \lambda - j(z, \beta(s)),$$

$$\begin{aligned} b(s,m) &:= \mathbf{E}(S_{n+1} - S_n | S_n = s, N_n = m) \sim b(z, h(s), \beta(s)) \\ &= C(1 - j^*(z, \beta(s))) + Ch(s)(j_1(z, \beta(s)) - j_2(z)), \end{aligned}$$

равномерно по всем $\beta(s) \in [0.5, 1]$.
Заметим, что $a(z, \beta(s)) \sim \lambda - p(z)e^{-z} = \lambda - j(z,1) = a^*(z)$ при $s \to \infty$. Обозначим через $t_1^*,\ t_2^*$ корни уравнения $b(z, h(s), \beta(s)) = 0$, через $z_1^*,\ z_2^*$ корни $a(z, \beta(s)) = 0$ и через $z_1,\ z_2$ корни уравнения $a^*(z) = 0$. В силу леммы 3 при увеличении s корни t_1^* и t_2^* сходятся сверху, соответственно, к нулю и z_0. Так как $j(z, \beta(s)) \le j(z,1)$ при $z \le z_0$ и $j(z, \beta(s)) \ge j(z,1)$ при $z \ge z_0/\beta(s)$, то при увеличении s корни z_1^* и z_2^* сходятся сверху, соответственно, к z_1 и z_2.

Для стабильности алгоритма достаточно показать, что найдутся пробная функция $L(x)$ и постоянная K такие, что

$$(1)\quad \mathbf{E}_x(L(X_1) - L(x) | L(x) \le K) < \infty,$$

$$(2)\quad \mathbf{E}_x(L(X_1) - L(x) | L(x) > K) < -\delta < 0.$$

Будем строить линии уровня тестовой функции $L(x)$ по вышеуказанному правилу (см. рис. 1). Выберем $t_1 < \frac{\lambda}{4C}$ и ε так, чтобы

$$t_1 + \varepsilon < z_1 < z_0 - \varepsilon < z_0 < z_2 - \varepsilon.$$

Пусть $z = m/s$ и

$$k(z,s) = \frac{a(z,\beta(s))}{b(z,h(s),\beta(s))},$$

тогда при достаточно малом t_1, положительном $b(z,h(s),\beta(s))$ и $z \le t_1$ верно, что

$$k(z,s) > \frac{a(t_1,\beta(s))}{C} > \frac{a^*(t_1)}{C} > \frac{\lambda}{2C} = k_2.$$

Аналогично при $z > z_2$ и $C > \frac{2\lambda}{(1-\kappa_{i_0})\cdot z_0}$ верно

$$k(z,s) < \frac{\lambda}{2\lambda/z_0} = z_0/2 = k_1,$$

т. к. $j_1(z,\beta(s)) - j_2(z) > 0$ и, следовательно,

$$b(z,h(s),\beta(s)) > C(1 - j^*(z,\beta(s))) > C(1-\kappa_{i_0}) > 2\lambda/z_0.$$

Из леммы 1 и определения $X_n = (S_n, N_n)$ для любого конечного K получаем справедливость (1). Для доказательства (2) достаточно показать, что

$$\limsup_{s+m\to\infty} \mathbf{E}_x(L(X_1) - L(x)) < 0.$$

Действительно, в силу леммы 2 достаточно показать, что

$$\limsup_{|x|\to\infty} \nabla L(x)\cdot \mathbf{E}_x(X_1 - x) = \limsup_{s+m\to\infty} \begin{pmatrix} G_1(\frac{m}{s}) \\ G_2(\frac{m}{s}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b\left(\frac{m}{s}, h(s), \beta(s)\right) \\ a\left(\frac{m}{s}, \beta(s)\right) \end{pmatrix}$$
$$:= \limsup_{s+m\to\infty} \delta(s,m) < -\delta < 0.$$

Докажем справедливость последнего. Пусть $m/s \to \infty$, тогда

$$\delta(s,m) \to \begin{pmatrix} -k_1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda - k_1\cdot C < -\lambda\kappa_{i_0}/(1-\kappa_{i_0}) < 0.$$

Пусть теперь $m/s \to z \in [0,\infty)$, тогда $s\to\infty$ и, начиная с некоторого s_0, для всех $s \ge s_0$ справедливо

$$t_1^* < t_1 < t_1 + \varepsilon < z_1 < z_1^* < z_0 - \varepsilon < z_0 < t_2^* < z_2 - \varepsilon < z_2 < z_2^*.$$

По построению $L(x)$ ясно, что для $z > z_2$ при достаточно больших s и m выполнено $\delta(s,m) < -\delta < 0$. То же самое верно и для $z \le z_2$, т. к. в этом случае, начиная с некоторого большого s_0, для всех $s \ge s_0$ справедливо, что G_1 и b принимают разные знаки так же как G_2 и a, а т. к. они непрерывны и одновременно не обращаются в ноль, получаем требуемое.
Доказательство теоремы 1 завершено.

Чтобы убедиться в справедливости замечания 1, нужно вместо $h(s)$ выбрать достаточно большую постоянную $D(\lambda_-,\lambda_+)$, а вместо $\varepsilon_h(s)$ выбрать достаточно малое значение $\varepsilon_D(\lambda_-,\lambda_+)$ такие, что все проделанные в доказательстве теоремы 1 выкладки останутся справедливыми для всех λ из отрезка $[\lambda_-,\lambda_+]$.

5. Оценки скорости сходимости

Пусть $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ — однородная по времени цепь Маркова, принимающая значения в измеримом пространстве $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$, и $T : \mathcal{Y} \to [0, \infty)$ — измеримая неотрицательная функция. Если $Y_0 = y$, то под $\Delta T(y)$ понимаем приращение $T(Y_1) - T(y)$.

Для измеримого множества $V \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ определим момент попадания (момент возвращения, если $y \in V$) $\tau_V = \min\{n : \ n > 0, \ Y_n \in V\}$. Пусть $Q(n) \geq 0, \ n \geq 0,$ — монотонная функция т. ч. $\lim_{n\to\infty} Q(n) = \infty$.

Сформулируем три предложения, доказательство которых можно найти в книге Калашникова В. В. (см. [4], стр. 113-118).

Предложение 1. *Для того, чтобы среднее* $\mathbf{E}_y Q(\tau_V)$ *было конечно для любого* $y \in \mathcal{Y}$*, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $W(y, n), \ y \in \mathcal{Y}, \ n \geq 0$*, удовлетворяющая следующим условиям:*

(a) $\inf\limits_y W(y, n) \geq Q(n)$;

(b) $\mathbf{A}W(y, n) := \mathbf{E}W(Y_1, n + 1) - W(y, n) \leq 0, \ y \notin V, \ n \geq 0$;

(c) $\mathbf{A}W(y, 0) < \infty, \ y \in V$.

При выполнении данных условий справедливо следующее неравенство:

$$\mathbf{E}_y Q(\tau_V) \leq \begin{cases} W(y, 0) & \text{при } y \notin V, \\ W(y, 0) + \mathbf{A}W(y, 0) & \text{при } y \in V. \end{cases}$$

Предложение 2. *Для того, чтобы среднее* $\mathbf{E}_y \exp(\mu\tau_V), \ \mu > 0$*, было конечно для любого* $y \in \mathcal{Y}$*, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $T(y) \geq 1, \ y \in \mathcal{Y}$*, удовлетворяющая следующим условиям:*

(a) $\mathbf{E}_y \Delta T(y) < \infty, \ y \in V$;

(b) $\mathbf{E}_y \Delta T(y) \leq -(1 - e^{-\mu})T(y), \ y \notin V$.

При выполнении данных условий справедливо следующее неравенство:

$$\mathbf{E}_y e^{\mu\tau_V} \leq \begin{cases} T(y) & \text{при } y \notin V, \\ e^{\mu}(T(y) + \mathbf{E}_y \Delta T(y)) & \text{при } y \in V. \end{cases}$$

Предложение 3. *Пусть существуют неотрицательная функция* $T(y)$*,* $y \in \mathcal{Y}$*, положительные числа* $\delta > 0, \ \alpha > 1$ *и семейство случайных величин* $\{\delta(y)\}_{y\in\mathcal{Y}}$*, удовлетворяющие следующим условиям:*

(a) $\sup\limits_{y\in V} T(y) < \infty$;

(b) $\mathbf{P}(\Delta T(y) \leq \delta(y)) = 1 \quad \forall y \in \mathcal{Y}$;

(c) $\sup\limits_{y\notin V} \mathbf{E}\delta(y) \leq -\delta < 0$;

(d) $\sup\limits_{y\in\mathcal{Y}} \mathbf{E}|\delta(y)|^{\alpha} < \infty$.

Тогда

$$\mathbf{E}_y(\tau_V)^{\alpha} \leq \begin{cases} (c_1 + 2T(y)/\delta)^{\alpha} & \text{при } y \notin V, \\ c_2 & \text{при } y \in V\ . \end{cases}$$

Предложения 2 и 3 будут использованы для доказательства теоремы 3 и теоремы 2 для алгоритмов с ограниченными скачками из класса $\mathcal{A}_1$. Так как для алгоритмов с растущими скачками из класса $\mathcal{A}_2$ условие (d) из предложения 3 трудно проверяемо (или вообще не выполнимо), то используя предложение 1 мы докажем предложение 4 (аналог предложения 3) с более слабыми ограничениями на пробную функцию $T(y)$. Далее предложение 4 будет использовано для доказательства теоремы 2 для алгоритмов с растущими скачками из класса $\mathcal{A}_2$. При фиксированном $\delta > 0$ положим

$$t_n(y) := \frac{1 + \frac{2}{\delta}\Delta T(y)}{1 + n + \frac{2T(y)}{\delta}}, \quad \text{при } n \geq 0,\ y \in \mathcal{Y}.$$

Так как $T(y) + \Delta T(y) \geq 0$, то $t_n(y) \geq -1$.

Предложение 4. *Пусть существуют неотрицательная функция $T(y)$, $y \in \mathcal{Y}$, и положительные числа $\delta > 0$ и $\alpha > 1$, для которых выполнены следующие условия:*

(a) $\sup\limits_{y\in V} T(y) < \infty$, $\quad \sup\limits_{y\in V} \mathbf{E}_y|\Delta T(y)|^\alpha < \infty$;

(b) $\sup\limits_{y\notin V} \mathbf{E}_y \Delta T(y) \leq -\delta < 0$;

(c_1) $\sup\limits_{y\notin V} \mathbf{E}_y|t_0(y)|^\alpha(1 + \frac{2}{\delta}T(y)) \leq 1$, *если* $\alpha \leq 2$,

(c_2) $\sup\limits_{y\notin V} \max\left(\mathbf{E}_y|t_0(y)|^\alpha, \mathbf{E}_y|t_0(y)|^2\right)(1 + \frac{2}{\delta}T(y)) \leq \frac{1}{2^{\alpha-2}\alpha(\alpha-1)}$, *если* $\alpha > 2$.

Тогда

$$\mathbf{E}_y(\tau_V)^\alpha \leq \begin{cases} (1 + 2T(y)/\delta)^\alpha & \text{при } y \notin V, \\ c(\delta,\alpha) & \text{при } y \in V. \end{cases}$$

Доказательство предложения 4.

Для доказательства воспользуемся предложением 1 с $Q(n) = n^\alpha$. Определим тестовую функцию $W(y,n) = (1+n+2T(y)/\delta)^\alpha > n^\alpha$. Тогда с необходимостью получаем справедливость условий (a) и (c) предложения 1. Проверим условие (b) предложения 1.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}W(y,n) &= \mathbf{E}_y\left(\left(2 + n + \frac{2}{\delta}(T(y) + \Delta T(y))\right)^\alpha - \left(1 + n + \frac{2T(y)}{\delta}\right)^\alpha\right) \\ &= \left(1 + n + \frac{2T(y)}{\delta}\right)^\alpha \mathbf{E}_y\left((1 + t_n(y))^\alpha - 1\right).\end{aligned}$$

Будем использовать следующее алгебраическое неравенство, которое легко доказать разложением в ряд Тейлора. Для $t \geq -1$ справедливо

$$(1+t)^\alpha \leq 1 + \alpha t + \begin{cases} |t|^\alpha, & \text{если } 1 < \alpha \leq 2, \\ \alpha(\alpha-1)t^2(1 + |t|^{\alpha-2})2^{\alpha-3}, & \text{если } \alpha > 2. \end{cases}$$

Следовательно, в силу условий (c_1) и (c_2) для $y \notin V$ имеем

$$\mathbf{E}_y((1 + t_n(y))^\alpha - 1) \leq (1 + n + 2T(y)/\delta)^{-1} \cdot (-\alpha + 1) < 0.$$

Доказательство предложения 4 завершено.

Доказательство теоремы 2.

Если конечен степенной момент, то для доказательства достаточно (см. [5]), чтобы существовало измеримое множество V такое, что

$$\sup_{x\in V} \mathbf{E}_x(\tau_V)^\alpha < \infty.$$

Положим $T(x) = L(x)$. Из доказательства теоремы 1 известно, что для функции L выполнены условия критерия Фостера. Поэтому, для алгоритмов с ограниченными скачками достаточно воспользоваться предложением 3, положив $\delta(x) = \Delta L(x)$. В случае алгоритмов с растущими скачками справедливость теоремы следует из предложения 4 и леммы 1.

Доказательство теоремы 2 завершено.

Доказательство теоремы 3.
Пусть $V = \{L(x) \leq K\}$, где K — некоторая постоянная и L — тестовая функция определенная в параграфе 3. Будем предполагать (см. доказательство теоремы 1), что $\mathbf{E}_x \Delta L(x) \leq -\varepsilon < 0$ при $x \notin V$.
Если конечен экспоненциальный момент, то для доказательства достаточно (см. [5]), чтобы существовало измеримое множество V такое, что для некоторого $\mu' > 0$

$$\sup_{x \in V} \mathbf{E}_x e^{\mu' \tau_V} < \infty.$$

Следовательно, нам нужно построить тестовую функцию удовлетворяющую условиям предложения 2. Проверим условия предложения 2 для тестовой функции $T(x) = \exp(\delta L(x)) \geq 1$, где $\delta > 0$ — некоторая постоянная. В силу определения функции L существует положительная постоянная $c = c(V)$ такая, что

$$\mathbf{E}_x \Delta T(x) = e^{\delta L(x)} \left(\mathbf{E}_x e^{\delta \Delta L(x)} - 1 \right)$$
$$< e^{\delta L(x)} \left(\mathbf{E} e^{\delta T_2 (c + \xi_1)} - 1 \right) < \infty,$$

при $\delta \leq \mu / T_2,\ x \in V$. Получаем справедливость условия (a) предложения 2.

Проверим условие (b). Пусть $g(t) = \mathbf{E}_x e^{t \Delta L(x)}$. Для любого алгоритма с ограниченными скачками из класса $\mathcal{A}_1$, получаем, что $g(t) < \infty$ при $t \in [0, \mu/T_2]$, равномерно по $x \in \mathbf{Z}_+^2$. Заметим, что $g(0) = 1$ и $g'(0) = \mathbf{E}_x \Delta L(x) \leq -\varepsilon < 0$, равномерно по $x \notin V$. Следовательно, существует некоторое $\delta \in (0, \mu/T_2]$ такое, что $g(\delta) < 1$ равномерно по $x \notin V$.
Доказательство теоремы 3 завершено.

Рассмотрим $X_0 = x = x(s) = (s, [2s/z_0])$ при $s \to \infty$. Тогда в силу формулы конечных приращений и определения функции L при достаточно больших s справедливо, что

$$L(s + Ci_0 h(s), [2s/z_0] - i_0) - L(s, [2s/z_0]) = k_2 C i_0 h(s).$$

Так как $\lim\limits_{s \to \infty} \mathbf{P}_x (X_1 = (s + Ci_0 h(s), [2s/z_0] - i_0)) > 0$, то для любого фиксированного $t > 0$ существует $x = x(s(t)) \notin V$ такое, что $g(t) = \mathbf{E}_x e^{t \Delta L(x)} > 1$ при $t > 0$, для любого алгоритма с растущими скачками из класса $\mathcal{A}_2$. Следовательно, доказать аналог теоремы 3 для алгоритмов с растущими скачками, используя в качестве пробной функции $e^{\delta L(x)}$ при $\delta > 0$, не представляется возможным.

Мы не видим варианта, как доказать аналог теоремы 3 для алгоритмов с растущими скачками, используя предложение 2. Пусть $T_1(x) = \ln(T(x))$, тогда пункт (b) предложения 2 можно будет переписать в следующем виде: $\mathbf{E}_x e^{\Delta T_1(x)} < 1$ при $x \notin V$. Выбирая в качестве начальной точки $X_0 = x = (s, [2s/z_0])$ и повторяя рассуждения из предыдущего абзаца, с необходимостью получаем, что первая компонента градиента $\nabla T_1(x)$ должна стремиться к нулю при $s \to \infty$. Построить такую функцию $T_1(x)$ используя рассуждения из параграфа 3 не представляется возможным.

Автор выражает благодарность за полезные обсуждения и замечания в ходе работы над этой статьей Фоссу С. Г. и Ковалевскому А. П..

6. Приложение

Доказательство леммы 1.

1) Так как $L(0,0)=0$, то полагая $(x_1^0,x_2^0)=(0,0)$, получаем

$$L(x)=\int_0^{x_1} L'_{x_1}(u,0)du+\int_0^{x_2} L'_{x_2}(x_1,u)du \le \int_0^{x_1} T_2 du+\int_0^{x_2} T_2 du = T_2\cdot(x_1+x_2).$$

Рассмотрим линию уровня $L(x)=c$, из построения можно заметить, что каждая точка данной линии покоординатно меньше точки пересечения прямых $x_2=k_1x_1+c$ и $x_2=(z_0-\varepsilon)x_1$, т. е. точки $\left(\frac{c}{z_0-\varepsilon-k_1},\frac{c(z_0-\varepsilon)}{z_0-\varepsilon-k_1}\right)$.
Следовательно, $c/T_1=L(x)/T_1\ge x_1+x_2$.

2) В силу определения $\nabla L(x)$, используя формулу конечных приращений, получаем следующую оценку $|\Delta L(x)|\le T_2\cdot(h(s)+\xi_1+i_0)$. Следовательно, при $\alpha\ge 2$ подойдут все последовательности $h(s)=o(\sqrt{s})$. Для $\alpha<2$ подойдут $h(s)=o(s^{1-1/\alpha})$ при $s\to\infty$. В частности, если значение $\alpha<2$ нам не известно, то в качестве $h(s)$ можно взять лубую м. м. ф., например $h(s)=[\exp(\sqrt{\ln s})]$. Доказательство леммы 1 завершено.

Напомним следующее определение: последовательность $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ случайных величин называется *равномерно интегрируемой* (РИ), если

$$\sup_n \mathbf{E}(|X_n|;|X_n|\ge N)\to 0 \quad \text{при } N\to\infty.$$

Известно (см. [6], теорема 6.1.7, стр. 137), что если $X_n\to X$ по вероятности и последовательность $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — РИ, то существует $\mathbf{E}|X|$ и $\mathbf{E}|X_n-X|\to 0$ при $n\to\infty$.

Доказательство леммы 2.
Пусть $\eta=1-2\cdot I_0$, т. е. η — случайная величина, которая принимает значения 1 и -1 с вероятностью 1/2. Тогда

$$X_1-X_0=\begin{pmatrix} C\cdot(1+J_0\cdot(\eta\cdot h(s)-1)) \\ \xi-J_0\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\zeta(s)\\ \widehat{\xi}\end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $|\zeta(s)|\le_{\text{п. н.}} i_0\cdot C\cdot h(s)$, $|\widehat{\xi}|\le_{\text{п. н.}} \xi+i_0$.
По формуле конечных приращений для некоторого случайного $\theta=\theta(x,X_1)\in(0,1)$ имеем

$$L(X_1)-L(x)=\nabla L(x+\theta\cdot(X_1-x))\cdot(X_1-x).$$

Пусть $z_x=m/s$ и $z_{X_\theta}=(m+\theta\cdot\widehat{\xi})/(s+\theta\cdot\zeta(s))$ — угловые коэффициенты точек x и $x+\theta(X_1-x)$.
Обозначим через $\eta_1^{s,m}=(G_1(z_{X_\theta})-G_1(z_x))\cdot\zeta(s)$, $\eta_2^{s,m}=(G_2(z_{X_\theta})-G_2(z_x))\cdot\widehat{\xi}$.
В силу определения $\nabla L(x)$ (6) принимает следующий вид

$$\lim_{|x|\to\infty}\mathbf{E}_x((\nabla L(x+\theta\cdot(X_1-x))-\nabla L(x))\cdot(X_1-x))$$

$$=\lim_{|x|\to\infty}\mathbf{E}_x(\eta_1^{s,m}+\eta_2^{s,m})=0. \tag{9}$$

Выберем $s_0 > \max(i_0/z_2, 1)$ такое, что для всех $s \geq s_0$ выполнено $i_0 \cdot C \cdot h(s)/\sqrt{s} < 1/2$. Рассмотрим два семейства случайных величин $\{\eta_1^{s,m}\}_{s\geq s_0, m\geq 0}$ и $\{\eta_2^{s,m}\}_{s\geq s_0, m\geq 0}$.

Для доказательства (9) достаточно показать, что оба семейства РИ и что $\eta_1^{s,m} \to 0$ и $\eta_2^{s,m} \to 0$ п. н. при $|x| \to \infty$.

Пусть $z_x \geq 4 \cdot z_2$, тогда

$$z_{X_\theta} = \frac{z_x + \theta \cdot \widehat{\xi}/s}{1 + \theta \cdot \zeta(s)/s} >_{\text{п. н.}} \frac{z_x - i_0/s}{2} > z_2,$$

и в силу определения $\nabla L(x)$ получаем, что $\eta_1^{s,m} \equiv 0,\ \eta_2^{s,m} \equiv 0$ (т. к. $G_1(z_{X_\theta}) = G_1(z_x),\ G_2(z_{X_\theta}) = G_2(z_x)$).

Пусть $z_x \leq 4 \cdot z_2 < \infty$ (в данном случае, т. к. $|x| \to \infty$ с необходимостью получаем, что $s \to \infty$), тогда в силу (8)

$$|z_{X_\theta} - z_x| = \left| \frac{\theta \cdot \widehat{\xi}/s - z_x \cdot \theta \cdot \zeta(s)/s}{1 + \theta \cdot \zeta(s)/s} \right| <_{\text{п. н.}} 2\left(\frac{\xi + i_0}{s} + \frac{2 \cdot z_2}{\sqrt{s}} \right). \tag{10}$$

Заметим, что $|\eta_2^{s,m}| \leq_{\text{п. н.}} 2(\xi + i_0)$, т. к. $|G_2(z_{X_\theta}) - G_2(z_{X_0})| \leq 2$. Следовательно, семейство $\{\eta_2^{s,m}\}_{s\geq s_0, m\geq 0}$ — РИ, т. к. $\mathbf{E}\xi < \infty$.

Так как $\sup_{z\geq 0} \max(|G_1'(z)|, |G_2'(z)|) = 1/\varepsilon$, то в силу определения $\nabla L(x)$, пользуясь теоремой об оценке конечных приращений, получаем

$$|G_1(z_{X_\theta}) - G_1(z_x)| \leq \frac{k_1 + k_2}{\varepsilon}|z_{X_\theta} - z_x|, \quad |G_2(z_{X_\theta}) - G_2(z_x)| \leq \frac{2}{\varepsilon}|z_{X_\theta} - z_x|. \tag{11}$$

Следовательно, в силу (8), (10) и (11) при $s \to \infty$

$$|\eta_2^{s,m}| \leq_{\text{п. н.}} \frac{2}{\varepsilon}|z_{X_\theta} - z_x| \cdot (\xi + i_0) <_{\text{п. н.}} \frac{4}{\varepsilon}\left(\frac{(\xi + i_0)^2}{s} + \frac{2 \cdot z_2 \cdot (\xi + i_0)}{\sqrt{s}} \right) \to_{\text{п. н.}} 0,$$

$$|\eta_1^{s,m}| \leq_{\text{п. н.}} \frac{k_1 + k_2}{\varepsilon}|z_{X_\theta} - z_x| \cdot i_0 C h(s)$$

$$<_{\text{п. н.}} \frac{2(k_1 + k_2)}{\varepsilon}\left(\frac{\xi + i_0}{2\sqrt{s}} + \frac{2 z_2 i_0 C h(s)}{\sqrt{s}} \right) \to_{\text{п. н.}} 0.$$

Из последнего получаем, что семейство $\{\eta_1^{s,m}\}_{s\geq s_0, m\geq 0}$ — РИ, т. к. $\mathbf{E}\xi_1 < \infty$. Доказательство леммы 2 завершено.

Доказательство леммы 3.

Разложим $p((1 - \varepsilon_h(s))z)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$p((1 - \varepsilon_h(s))z) = p(z) - \varepsilon_h(s) z p'(z) + \frac{\varepsilon_h^2(s) z^2}{2} p''(z - \theta\varepsilon_h(s) z),$$

где $\theta \in (0, 1)$. В силу эквивалентности $e^x \sim 1 + x$ при $x \to 0$, получаем

$$p((1 - \varepsilon_h(s))z) \cdot e^{-(1-\varepsilon_h(s))\cdot z} - p(z)e^{-z}$$

$$\sim e^{-z} \cdot \left(\left(p(z) - \varepsilon_h(s) z p'(z) + \frac{\varepsilon_h^2(s) z^2}{2} p''(z - \theta\varepsilon_h(s) z)\right) \cdot (1 + \varepsilon_h(s) z) - p(z) \right)$$

$$= \varepsilon_h(s) z e^{-z} \cdot (p(z) - p'(z)) + \varepsilon_h^2(s) z^2 e^{-z} \cdot \left(-p'(z) + \frac{1 + \varepsilon_h(s) z}{2} p''(z - \theta\varepsilon_h(s) z)\right) \tag{12}$$

при $s \to \infty$. Так как z_0 единственная точка максимума функции $p(z)e^{-z}$, то

$$(p(z)e^{-z})''|_{z=z_0} = (p''(z_0) - 2p'(z_0) + p(z_0))e^{-z_0} = (p''(z_0) - p'(z_0))e^{-z_0} \le 0$$

и т. к. $p'(z) > 0$, то

$$-p'(z_0) + \frac{p''(z_0)}{2} < 0. \tag{13}$$

Таким образом (7) следует из (12), (13) и того, что $h(s) \cdot \varepsilon_h^2(s) \to \infty$ при $s \to \infty$ (т. е. предел равен $-\infty$ при $z \le z_0$ и $+\infty$ при $z > z_0$).
Доказательство леммы 3 завершено.

Лемма 4. *Если* $\lambda > \lambda_{max}$ *и* $\mathbf{P}(\xi \ge i_0 + 1) > 0$, *то любой алгоритм* (*протокол*) *ALOHA нестабилен.*

Для доказательства леммы 4 мы воспользуемся основным результатом из работы [22]. Основная теорема в [22] была сформулирована для неоднородных цепей Маркова. Для простоты, мы приведем формулировку основного результата из [22] для однородных цепей Маркова.

Пусть $\{Y_n\}_{n \ge 0}$ — однородная по времени цепь Маркова с начальным состоянием $Y_0 = y = \mathrm{const}$, принимающая значения в измеримом пространстве $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$. Далее, пусть $T : \mathcal{Y} \to [0, \infty)$ — измеримая неотрицательная функция, $\Delta_y = T(Y_1) - T(y)$ и $\Delta_y^- = -\min(\Delta_y, 0)$. Для числа $M > 0$ определим $\tau_y(M) = \min\{n \ge 1 \ : \ T(Y_n) \ge M\}$.

Теорема 4 (см. [22]). Предположим, что существуют числа $M > 0$, $\varepsilon > 0$, $M' > 0$ и измеримая функция $\phi \ : \ [0, \infty) \to [1, \infty)$ такие, что

(1) $\tau_y(M) < \infty$ п. н. при всех $y \in \mathcal{Y}$;

(2) $\mathbf{E}\{\Delta_y \cdot I(\Delta_y \le M')\} \ge \varepsilon$ при всех $y \in \mathcal{Y}$ таких, что $T(y) \ge M$;

(3) интеграл $\int_1^\infty (\phi(t))^{-1} dt$ сходится и при $t \ge 1$ функция $\phi(t)/t$ является неубывающей и выпуклой вверх;

(4) семейство случайных величин $\{\phi(\Delta_y^-); T(y) \ge M\}$ равномерно интегрируемо.

Тогда $\mathbf{P}(\lim\limits_{n\to\infty} T(Y_n) = \infty) = 1$ при всех $y \in \mathcal{Y}$.

Доказательство леммы 4.
Пусть $X_0 = x = (s, m)$ и $T(X_n) = N_n$. Возьмем произвольный алгоритм ALOHA $A = \{p_n\}_{n \ge 1}$ и проверим условия теоремы 4. Так как $\mathbf{P}(\xi \ge i_0 + 1) = p > 0$, то для любого $M > 0$ можно оценить $\tau_x(M)$ геометрической случайной величиной с параметром p^M, умноженной на M. Следовательно, условие (1) выполнено.

Отметим, что $\mathbf{E}(\Delta_x) \ge \lambda - \sup\limits_p \mathbf{E}(J_n)$, где последнее выражение стремится при $m \to \infty$ и $p \cdot m \to z \in [0, \infty]$, к разности $\lambda - p(z)e^{-z}$. В силу того, что $\lambda - \lambda_{max} > 0$, где $\lambda_{max} = \max\limits_{0 \le z \le \infty} p(z)e^{-z}$, значит найдется число $M > 0$, такое что $\mathbf{E}(\Delta_x) \ge \frac{\lambda - \lambda_{max}}{2}$ при $m \ge M$. Следовательно, для всех $x = (s, m)$ таких, что $m \ge M$, существует M', при котором выполнено условие (2). Так как $\Delta_y^- \le i_0$

п. н., то условия (3) и (4) выполнены автоматически с $\phi(t) = t^{3/2}$. Доказательство леммы 4 завершено.

References

[1] M. Bramson, *Stability of queueing networks*, Lecture Notes in Mathematics 1950. Berlin: Springer, 2008. Zbl 1152.60004

[2] S. Meyn, R. L. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer, 1993. Zbl 0925.60001

[3] S. G. Foss, B. Hajek, A. M. Turlikov, *Doubly Randomised Protocols for a Random Multiple Access Channel with «Success-Nonsuccess» Feedback*, Problems of Information Transmission, **52**:2 (2016), 60–70.

[4] V. V. Kalashnikov, *Mathematical methods in queuing theory*, Springer Science+Business Media Dordrecht, 1994. Zbl 0836.60098

[5] V. V. Kalashnikov, *Estimates of convergence rates and stability for regeneration and renewal Markov processes*, Queueing theory, VNIISI AS USSR, (1981), 7–12.

[6] A. A. Borovkov, *Probability Theory*, Universitext, London: Springer, 2013. Zbl 1297.60002

[7] G. Fayolle, E. Gelembe, J. Labetoulle, *Stability and optimal control of the packet switching broadcast channel*, J. of Assoc. Comput. Mach., **24** (1977), 375–386. Zbl 0364.94004

[8] G. I. Falin, *Random processes in structurally complex queueing systems*, Dissertation d.f.-m.s. - M.: MSU, 1989.

[9] B. S. Tsybakov, V. A. Mihajlov, *Free synchronized access in a broadcast channel with a feedback*, Problems of Information Transmission, **14**:4 (1978), 32–59. Zbl 0423.94013

[10] J. L. Capetanakis, *Tree algorithms for packet broadcast channels*, IEEE Transactions on Information Theory, **25**:5 (1979), 505—515. Zbl 0414.94019

[11] B. Hajek, T. van Loon, *Decentralized dynamic control of a multiaccess broadcast channel*, IEEE Trans. Automatic Control, **27**:3 (1982), 559–569. Zbl 0486.93077

[12] V. A. Mihajlov, *Geometrical Analysis of the Stability of Markov Chains in* $\mathbf{R}_+^n$ *and Its Application to Throughput Evaluation of the Adaptive Random Multiple Access Algorithm*, Problems of Information Transmission, **24**:1 (1988), 47—56. Zbl 0673.60072

[13] N. Mehravari, T. Berger, *Poisson multiple-access contention with binary feedback*, IEEE Transactions on Information Theory, **30**:5 (1984), 745-–751. Zbl 0553.94002

[14] B. Paris, B. Aazhang, *Near-optimum control of multiple-access collision channels*, IEEE Transactions on Wireless Communications, **40** (1992), 1298-–1308. Zbl 0825.94162

[15] A. Malkov, A. Turlikov, *Random multiple access protocols for communication systems with «success-failure» feedback*, IEEE International Workshop on Information Theory, (1995), 1–39.

[16] B. S. Tsybakov, A. N. Beloyarov, *Random multiple access in a channel with a binary feedback «Success-Failure»*, Problems of Information Transmission, **26**:3 (1990), 67–82. Zbl 0719.94010

[17] B. S. Tsybakov, A. N. Beloyarov, *Random multiple access in a channel with a binary feedback*, Problems of Information Transmission, **26**:4 (1990), 83–98. Zbl 0746.94014

[18] A. Turlikov, S. Foss, *On ergodic algorithms in random multiple access systems with «success-failure» feedback*, Problems of Information Transmission, **46**:2 (2010), 185–201. Zbl 1237.94006

[19] S. G. Foss, *Stochastic recursive sequences and their applications in Queueing*, Dissertation d.f.-m.s. Novosibirsk, IM SB RAS, 1992.

[20] D. Aldous, *Ultimate instability of exponential back-off protocol for acknowledgment based transmission control of random access communication channels*, IEEE Transactions on Information Theory, **33**:2 (1987), 219—223. Zbl 0626.94001

[21] A. Ephremides, B. Hajek, *Information theory and communication networks: An unconsummated union*, IEEE Trans. Inform. Theory, **44:6** (1998), 2416—2434. Zbl 1125.94302

[22] S. G. Foss, D. E. Denisov, *On transience conditions for Markov chains*, Sibirsk. Mat. Zh., **42**:2 (2001), 425—433. Zbl 1074.60505

Mikhail Georgievich Chebunin
Novosibirsk State University,
str. Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: chebuninmikhail@gmail.com