

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 13, стр. 799–814 (2016)

УДК 517.51

DOI 10.17377/semi.2016.13.064

MSC 41A63

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЭРМИТОВЫХ КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Н.В. БАЙДАКОВА

ABSTRACT. The article presents an algorithm of setting Hermite interpolation conditions in tetrahedra of triangulated area in order to obtain a continuous piecewise-polynomial function. The use of the obtained finite element space requires additional restrictions on triangulation as compared with the space under construction using Lagrange interpolation, but the obtained finite element space has a smaller dimension.

Keywords: multidimensional interpolation, finite elements.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть имеется триангуляция исходного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, т. е. множество Ω разбито на конечное число n тетраэдров $\mathfrak{T} = \{T^s\}_{s=1}^n$, таких что $\bigcup_{s=1}^n T^s = \Omega$ и любые два тетраэдра либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину или общее ребро или общую грань (в частности, это означает, что всякая грань произвольного тетраэдра триангуляции является либо частью границы множества Ω , либо гранью другого тетраэдра в триангуляции). Если два тетраэдра имеют общую грань, их называют соседними (далее при необходимости будем указывать, относительно какой грани имеет место данное свойство). Договоримся далее множество вершин всех тетраэдров из разбиения множества Ω называть множеством узлов триангуляции и обозначать через a_i .

БАЙДАКОВА, N.V., AN ALGORITHM FOR CONSTRUCTING A FINITE ELEMENT OF THE THIRD DEGREE.

© 2016 Байдакова Н.В.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда, проект № 14-11-00702.

Поступила 23 мая 2016 г., опубликована 30 сентября 2016 г.

Через $W^{m+1}M$ обозначим множество функций, непрерывных вместе со всеми своими производными до $(m+1)$ -го порядка включительно и при всех $u \in \Omega$ удовлетворяющих условию

$$\left| \frac{\partial^{m+1} f(u)}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_{m+1}} \right| \leq M,$$

где ξ_1, \dots, ξ_{m+1} — произвольные единичные векторы. Мы ограничимся значением $m = 3$. В статье предлагается алгоритм выбора условий интерполяции функции $f \in W^4M$ на каждом из тетраэдров T^s , по которым локально на каждом T^s строится многочлен 3-й степени. Получающаяся в результате кусочно-полиномиальная функция \mathcal{S} будет обладать свойством непрерывности на множестве Ω . В общем случае задача состоит в построении кусочно-полиномиальных функций, являющихся интерполяционными многочленами (с простой или кратной интерполяцией) степени не выше m (по совокупности переменных) на каждом тетраэдре T^s из триангуляции \mathfrak{T} .

Договоримся писать, что для любых величин ψ_1 и ψ_2 имеет место отношение

$$\psi_1 \stackrel{(\geq)}{\lesssim} \psi_2,$$

если существует число $C > 0$, не зависящее от функции f и геометрических характеристик тетраэдра (допускается зависимость от степеней многочленов и от размерности), такое что $\psi_1 \stackrel{(\geq)}{\leq} C\psi_2$.

Рассмотрим произвольный тетраэдр T с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4 и диаметром H . Известно [1], что при условии существования соответствующих многочленов для $f \in W^{m+1}M$ имеют место оценки

$$\|D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s (f - P_m)\|_{C(T)} \lesssim M \frac{H^{m+1-s}}{\rho^s},$$

$$0 \leq s \leq m,$$

где $D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s$ — производная порядка s по направлениям произвольных единичных векторов ξ_1, \dots, ξ_s ; P_m — интерполяционный многочлен типа Лагранжа, Эрмита или Биркгофа степени m по совокупности переменных; H — диаметр T ; ρ — радиус шара, вписанного в T . Эти оценки требуют наложения "условия наименьшего угла" на триангуляцию. Это требование можно ослабить, если использовать оценки другого типа.

Пусть $E = \{e_s\}_{s=1}^3$ — множество единичных линейно независимых векторов; ξ — произвольный единичный вектор из \mathbb{R}^3 ; $\mathcal{E} = \{e_s\}_{s=1}^{12}$ — множество единичных векторов, параллельных сторонам тетраэдра T ; θ_s — угол между ξ и прямой с направляющим вектором e_s (т. е. $0 \leq \theta_s \leq \pi/2$). Положим

$$(1) \quad \theta = \min_{E \subset \mathcal{E}} \max_{\xi \in \mathbb{R}^3} \min_{e_s \in E} \{\theta_s\}.$$

Пусть теперь P_m — многочлен Лагранжа степени m , интерполирующий значения функции f в равномерных узлах тетраэдра T . Тогда [2] имеют место оценки

$$\|D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s (f - P_m)\|_{C(T)} \lesssim M \frac{H^{m+1-s}}{(\cos \theta)^s}, \quad s = 0, \dots, m.$$

Таким образом, если существует θ_* такое, что

$$(2) \quad \theta \leq \theta_* < \frac{\pi}{2}$$

(”условие наибольшего угла” для тетраэдра) то

$$(3) \quad \|D^s(f - P_m)\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{m+1-s}, \quad s = 0, \dots, m.$$

Насколько известно автору, среди существующих ограничений условие (2) является наименее жестким требованием к триангуляции, но величина θ сложно вычисляется на практике.

Рассмотрим величину

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq 4} \min_{j \neq i} \cos \beta_{ij},$$

где β_{ij} — угол между ребром b_{ij} , соединяющим a_i и a_j , и нормалью к плоскости, проходящей через точки $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \setminus \{a_j\}$. В [3] доказаны оценки

$$\|D_{\xi_1 \dots \xi_s}^s(f - P_m)\|_{C(\Delta)} \lesssim M \frac{H^{m+1-s}}{\lambda^s}, \quad s = 0, \dots, m.$$

Таким образом, если существует $\lambda_* > 0$ такое, что

$$(4) \quad \lambda \geq \lambda_*,$$

то имеет место оценка (3). Ограничение (4) является более жестким требованием к триангуляции, чем (2), но величина λ является более простой для практического вычисления, и если в триангуляции нет тетраэдров с геометрией, как у конечных элементов типа \mathcal{K}_1 , о которых речь пойдет ниже (в параграфе 2), то для контроля триангуляции можно использовать (4).

Для случая $m = 1$ и интерполяции значений функции в вершинах тетраэдра в [4] была введена следующая характеристика. Пусть α — наибольший двугранный угол между гранями тетраэдра T , ψ — наибольший из углов треугольников, являющихся гранями тетраэдра. Тогда ”условие наибольшего угла” формулируется следующим образом: если существует $\zeta_0 < \pi$ такое, что

$$(5) \quad \alpha \leq \zeta_0 \quad \text{и} \quad \psi \leq \zeta_0,$$

то при $m = 1$ имеет место оценка (3). В [5] было доказано, что условия (2) и (5) выполняются одновременно, т. е. выполнение условия (5) позволяет использовать оценки (3) при произвольном m . Кроме того, в [5] было замечено, что характеристика θ из (2) может быть переопределена следующим образом:

$$(6) \quad \theta = \max_{|\xi|=1} \min_{e \in \mathcal{E}} \arccos(\xi \cdot e).$$

В тетраэдре T с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4 через τ_{ij} будем обозначать единичные векторы, направленные от a_i к a_j ; через T_{ijk} — грани тетраэдра T , проходящие через вершины a_i, a_j, a_k .

Пусть P_3 — многочлен степени не выше 3 по совокупности переменных (степень монома не превосходит 3), интерполирующий функцию f и ее производные на T . Такой многочлен мы будем задавать с помощью 20 условий, из которых 16 имеют следующий вид:

$$(7) \quad P_3(a_i) = f(a_i), \quad \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial \tau_{ij}} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial \tau_{ij}}; \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}.$$

В качестве оставшихся четырех условий будем задавать по одной смешанной производной на каждой грани T_{ijk} в вершине при среднем или наибольшем

угле. Если для P_3 на T задается условие

$$(8) \quad \frac{\partial^2 P_3(a_i)}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{ik}} = \frac{\partial^2 f(a_i)}{\partial \tau_{ij} \partial \tau_{ik}},$$

где $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, то будем говорить, что в вершине a_i задается интерполяционное условие (i, j, k) или интерполяционное условие (i, j, k) типа (8).

Пусть γ_{ij} — угол между τ_{ij} и T_{jkl} ($i \neq j, k, l$); γ_i и γ — такие углы, что

$$\sin \gamma_i = \max_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ j \neq i}} \sin \gamma_{ij},$$

$$\sin \gamma = \min_{1 \leq i \leq 4} \sin \gamma_i.$$

Введем условие, которое также может использоваться для контроля триангуляции и состоит в том, что существует такое γ_0 , что

$$(9) \quad \gamma \leq \gamma_0 < \pi.$$

В параграфе 2 мы докажем, что условия (2) и (9) эквивалентны.

Далее на триангуляцию \mathfrak{T} наложим следующие ограничения: если $T \in \mathfrak{T}$ и $\{e_i\}_{i=1}^6$ — множество ребер этого тетраэдра, занумерованных в порядке возрастания их длин, т. е. $|e_i| \leq |e_{i+1}|$, $i = 1, \dots, 6$, то либо ребра e_1 и e_2 имеют общих точек и $|e_2| < |e_3|$, либо e_1, e_2, e_3 являются ребрами одной грани и $|e_3| < |e_4|$.

В статье предлагается алгоритм выбора условий (8) на каждом $T \in \mathfrak{T}$. В результате на каждом T получим многочлен Эрмита 3-й степени, который в сравнении с многочленом Лагранжа 3-й степени, интерполирующим значения функции f в равномерных узлах тетраэдра, обладает следующими свойствами:

1) многочлен Эрмита, как и многочлен Лагранжа, обеспечивает непрерывность результирующей кусочно-полиномиальной функции на исходной области Ω (следует из результатов параграфов 3 и 5);

2) величины погрешности аппроксимации интерполируемой функции f и ее производных многочленами Эрмита и Лагранжа и их производными имеют одинаковый порядок по H (следует из параграфа 2 и теоремы 2 параграфа 5);

3) в качестве условия наименьшего угла, используемого для триангуляции в случае интерполяции Эрмита, можно брать условие (2), которое используется в случае интерполяции Лагранжа; также можно использовать условие (9), которое дает тот же результат, что и (2), но является более простым для вычисления (следует из параграфа 2 и теоремы 2 параграфа 5);

4) в случае предлагаемой интерполяции Эрмита требуется описанное выше дополнительное ограничение на множество тетраэдров из триангуляции, в отличие от интерполяции Лагранжа, и в этом предлагаемый алгоритм проигрывает алгоритмам, использующим интерполяцию значений функции в равномерных узлах тетраэдра; в частности, мы не можем использовать тетраэдры, изображенные на рис. 1, если, например, $d_{34} < d_{23} < d_{14} < \min\{d_{12}, d_{13}, d_{24}\}$ или $d_{34} < d_{23} < d_{12} < \min\{d_{14}, d_{13}, d_{24}\}$ или $d_{13} < d_{23} = d_{34} \leq \min\{d_{12}, d_{14}, d_{24}\}$;

5) преимуществом предлагаемого способа интерполяции является то, что представляемый алгоритм требует меньшего числа определяющих параметров (значений функции и ее производных), которые надо искать в ходе реализации метода конечных элементов, решая систему линейных алгебраических уравнений. Пусть на Ω содержится N узлов триангуляции a_1, a_2, \dots, a_N , и для каждого узла a_s известно, что он является концом k_s отрезков, являющихся

ребрами тетраэдров (один отрезок является ребром нескольких тетраэдров; в k_s учитывается количество отрезков для узла a_s , независимо от числа тетраэдров, для которых каждый отрезок является ребром). Пусть K — общее число ребер, участвующих в построении триангуляции. Тогда число определяющих параметров в случае интерполяции Эрмита уменьшается на величину μ по сравнению с числом параметров в случае интерполяции Лагранжа, где, очевидно,

$$\mu = 2K - 3N = k_1 + k_2 + \dots + k_N - 3N \geq N.$$

Последнее неравенство написано в предположении, что $k_s \geq 4$ для всех $s = 1, 2, \dots, N$. Действительно, равенство $k_s = 3$ возможно только если a_s является вершиной некоторого тетраэдра, у которого три грани являются частью границы области Ω , и такие случаи можно исключить из рассмотрения.

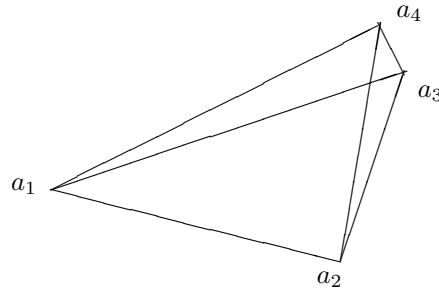


Рис. 1. Тетраэдры, исключенные из триангуляции

Отметим, что ранее в [6] был рассмотрен способ эрмитовой интерполяции на тетраэдрах, в котором использовались стандартные условия (7), а в качестве оставшихся брались условия, отличные от (8), однако этот способ либо не обеспечивает непрерывности результирующей кусочно-полиномиальной функции на Ω , либо требует корректировки для обеспечения непрерывности, что, вообще говоря, ведет к потере точности оценок аппроксимации производных.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В зависимости от соотношений длин ребер тетраэдров и выбранных интерполяционных условий будем различать пять множеств конечных элементов: три основных $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ (рис. 2) и два промежуточных \mathcal{K}_4 и \mathcal{K}_5 (рис. 3). Дадим определения этих множеств.

Множество \mathcal{K}_1 — это множество конечных элементов K_T , для которых выполнены следующие два условия:

1) наименьшее и следующее по величине ребра тетраэдра T не имеют общих точек (условимся далее два таких ребра называть наименьшими). Пусть, например, наименьшими являются ребра a_1a_4 и a_2a_3 , т. е.

$$(10) \quad \max\{d_{14}, d_{23}\} < \min\{d_{12}, d_{13}, d_{24}, d_{34}\}$$

2) многочлен P_3 , задаваемый на T и интерполирующий функцию $f \in W^4M$, определяется условиями (7) и четырьмя условиями следующего вида. Выберем произвольно по одной вершине у каждого из двух наименьших ребер тетраэдра T и в каждой из выбранных вершин интерполируем по две производных второго порядка по направлениям пар различных ребер, образующих наибольшие

или средние углы соответствующих граней тетраэдра (т. е. интерполируем две производных в одной из точек a_1 или a_4 , и две — в одной из точек a_2 или a_3). Для определенности пусть это будут точки a_1 и a_2 , т. е. задаются условия

$$(11) \quad (1, 2, 4), \quad (1, 3, 4) \quad (2, 1, 3) \quad (2, 4, 3).$$

Для множества конечных элементов $K_T \in \mathcal{K}_2$ требуем выполнения следующих двух условий:

1) длины ребер одной из граней тетраэдра строго меньше длин оставшихся ребер. Для определенности считаем, что это грань T_{123} и

$$(12) \quad \max\{d_{12}, d_{13}, d_{21}\}, \leq \min\{d_{41}, d_{42}, d_{43}\}.$$

2) для построения P_3 задаются условия (7) и интерполируются по две производных второго порядка в любых двух вершинах, принадлежащих T_{123} . Пусть это будут точки a_1 и a_2 , т. е. берутся условия

$$(13) \quad (1, 2, 4), \quad (1, 3, 4), \quad (2, 1, 4), \quad (2, 3, 4).$$

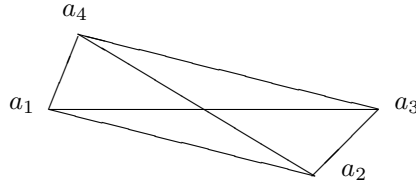
Множество конечных элементов K_T из \mathcal{K}_3 однозначно определяется следующими условиями:

1) для T имеет место соотношение (12);

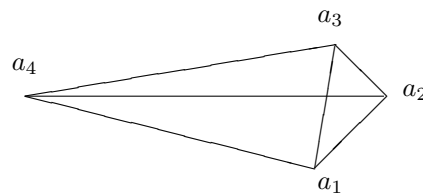
2) задаются производные второго порядка в вершинах, принадлежащих наименьшему ребру: три производных в одной вершине и одна — в другой. Т. е., если наименьшим ребром является $a_1 a_2$ ($d_{12} \leq \min_{i \neq j} d_{ij}$), то берутся условия

$$(14) \quad (1, 2, 3), \quad (1, 2, 4), \quad (1, 3, 4), \quad (2, 3, 4).$$

а) Тип \mathcal{K}_1



б) Тип \mathcal{K}_2



в) Тип \mathcal{K}_3

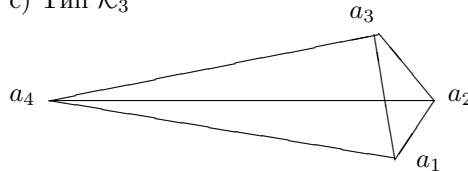


Рис. 2. Основные типы элементов $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$

Для конечных элементов K_T , принадлежащих множеству \mathcal{K}_4 требуем выполнения следующих условий:

1) для T имеет место соотношение (12);

2) в вершинах грани T_{123} задаются условия (14), но в рассматриваемом случае мы считаем, что наименьшим ребром является ребро a_1a_3 , т. е.

$$(15) \quad d_{13} \leq \min_{i \neq j} d_{ij},$$

что означает, что условия (14) задаются в вершинах ребра, не являющегося наименьшим ребром грани T_{123} (см. рис. 2).

Для конечных элементов K_T , принадлежащих множеству \mathcal{K}_5 требуем выполнения следующих условий:

1) для T имеют место соотношения (12) и (15);

2) в вершинах грани T_{123} задаются условия

$$(16) \quad (1, 2, 4), \quad (2, 3, 4), \quad (3, 1, 2), \quad (3, 1, 4).$$

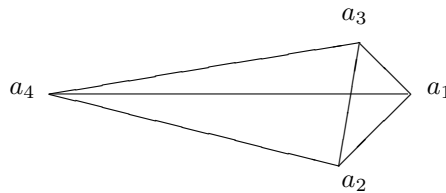


Рис. 3. Промежуточные типы элементов $\mathcal{K}_4, \mathcal{K}_5$

В [7] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $T \in \mathfrak{T}$, многочлен $P_3(u)$ задается на T интерполяционными условиями (7) и, в зависимости от вида тетраэдра T , одним из наборов условий (11), (13), (14), причем $K_T \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$. Тогда для $u \in T$ имеют место оценки

$$(17) \quad |D_{\xi_1 \dots \xi_r}^r (f(u) - P_3(u))| \leq \frac{CMH^{4-r}}{\sin^r \gamma},$$

где $0 \leq r \leq 3$, C — константа, не зависящая от f и T .

Оценки (17) означают, что если выполнено условие (9), то для интерполяционных многочленов Эрмита, о которых идет речь в теореме 1, имеют место оценки (3).

Лемма 1. Условия (2) и (9) эквивалентны.

Доказательство. Докажем, что если выполнено условие (2), то выполнено и (9). Действительно, пусть вершины тетраэдра T занумерованы таким образом, что

$$\sin \gamma = \sin \gamma_1 = \sin \gamma_{12}.$$

Пусть ξ_0 — единичная нормаль к плоскости треугольника T_{234} . Используя (6), получаем

$$\cos \theta \leq \max_{e \in \mathcal{E}} |\cos(\widehat{\xi_0, e})| = \max_{e \in \mathcal{E}} |\sin(\widehat{T_{234}, e})| = |\sin(\widehat{T_{234}, e_{12}})| = \sin \gamma_{12} = \sin \gamma,$$

где под $\sin(\widehat{T_{234}, e})$, $\sin(\widehat{T_{234}, e_{12}})$ понимается синус угла между плоскостью грани T_{234} и векторами e , e_{12} соответственно. Таким образом, требуемое утверждение доказано.

Докажем, что из (9) следует (2). Для этого получим неравенство $\sin \gamma \lesssim \sqrt{\cos \theta}$. Так как все неравенства доказываются с точностью до знака " \lesssim ", достаточно рассмотреть случай $\cos \theta \leq 1/\sqrt{3}$. Введем еще одно обозначение для граней тетраэдра: через T_i обозначим грань напротив вершины a_i . Обозначим через v_i и ω_i соответственно средний и наибольший углы треугольника T_i . Отметим, что всегда $\sin v_i \lesssim \sin \omega_i \lesssim \sin v_i$. Пусть вершины тетраэдра T занумерованы таким образом, что для всех $i = 1, 2, 3, 4$ выполняется соотношение

$$\sin \omega_i \lesssim \sin \omega_4.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что угол ω_4 образован векторами τ_{12} и τ_{13} .

Пусть $\sin \gamma_4 = \sin \gamma_{4j}$ при некотором $j \in \{1, 2, 3\}$. Тогда для любого $k \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{4, j\}$ справедливы неравенства

$$(18) \quad \sin \gamma \leq \sin \gamma_4 \lesssim \sin \omega_k \lesssim \sin \omega_4.$$

Положим

$$(19) \quad E_0 = \{\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{j4}\}, \quad \beta = \max_{\xi \in \mathbb{R}^3} \min_{e \in E_0} \{\theta_e\},$$

где $\theta_e = \arccos |(\xi, e)|$ — угол между вектором ξ и прямой с направляющим вектором e . Тогда в силу (1) будет

$$\cos \beta \leq \cos \theta.$$

К последовательности векторов $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{j4}$ применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим ортонормированную тройку векторов e_1, e_2, e_3 ($e_1 = \tau_{12}, e_2 \perp \tau_{12}, e_3 \perp \tau_{12}, e_3 \perp \tau_{13}$). Пусть $\xi_0 \in \mathbb{R}^3$ — единичный вектор, на котором реализуется (19). Если $\xi_0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, то $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. В силу (18)

$$(20) \quad \sin \gamma \leq \min \{ |(\tau_{13}, e_2)|, |(\tau_{j4}, e_3)| \}.$$

Также с учетом (19) для $\tau \in \{\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{j4}\}$ имеет место неравенство

$$|(\xi_0, \tau)| \leq \cos \beta \leq \cos \theta.$$

Тогда, взяв τ_{12} , получаем

$$|(\xi_0, \tau_{12})| = |\alpha_1| \leq \cos \theta.$$

Если $|\alpha_2| \geq \sqrt{\cos \theta}/\sqrt{3}$, то, поскольку

$$|(\xi_0, \tau_{13})| = |(\alpha_1 \tau_{12}, \tau_{13}) + (\alpha_2 e_2, \tau_{13})| \leq \cos \theta,$$

придем к неравенству

$$(21) \quad |(e_2, \tau_{13})| \leq \frac{\cos \theta + |\alpha_1|}{|\alpha_2|} \lesssim \sqrt{\cos \theta}.$$

Если $|\alpha_2| < \sqrt{\cos \theta}/\sqrt{3}$, то так как $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, можем утверждать, что $|\alpha_3| \geq \sqrt{\cos \theta}/\sqrt{3}$, и тогда соотношение

$$|(\xi_0, \tau_{j4})| = |(\alpha_1 \tau_{12}, \tau_{j4}) + (\alpha_2 e_2, \tau_{j4}) + (\alpha_3 e_3, \tau_{j4})| \leq \cos \theta$$

дает оценку

$$(22) \quad |(e_3, \tau_{j4})| \leq \frac{\cos \theta + |\alpha_1| + |\alpha_2|}{|\alpha_3|} \lesssim \sqrt{\cos \theta}.$$

Объединяя (20), (21) и (22), завершаем доказательство. \square

Предлагаемый ниже алгоритм построения кусочно-полиномиальной функции (пространства конечных элементов) на Ω состоит из двух основных этапов. На первом шаге строится кусочно-полиномиальная функция, обладающая свойством непрерывности и составленная из конечных элементов, принадлежащих $\bigcup_{i=1}^4 \mathcal{K}_i$. Для конечных элементов из множеств $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ имеют место оценки (17). Для тетраэдров из \mathcal{K}_4 справедливость оценок (17) не установлена (скорее всего, такие оценки не являются верными в данном случае), поэтому на втором этапе пространство перестраивается таким образом, чтобы, сохраняя непрерывность, исключить элементы типа \mathcal{K}_4 из триангуляции.

3. ВЫБОР НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Пронумеруем все точки триангуляции произвольным образом. Пусть T^s — тетраэдр из триангуляции \mathfrak{T} с вершинами $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}$. Назовем условие (i_1, i_2, i_3) исходно допустимым, если в треугольнике $T_{i_1 i_2 i_3}^s$ угол между сторонами $a_{i_1} a_{i_2}$ и $a_{i_1} a_{i_3}$ является средним или наибольшим углом данного треугольника. Для каждого тетраэдра $T = T^s \in \mathfrak{T}$ ($s = \overline{1, n}$) в вершинах зададим условия (7). Алгоритм решает задачу выбора оставшихся условий типа (8).

Пусть a_i — произвольная точка триангуляции. Назовем условие (i, j, k) типа (8) допустимым, если a_j и a_k — такие точки триангуляции, что a_i, a_j, a_k принадлежат (являются вершинами) одной грани $T_{ijk} = T_{ijk}^s$ какого-либо тетраэдра T^s из триангуляции (если треугольник с вершинами a_i, a_j, a_k не является частью границы исходной области Ω , то одновременно он является гранью некоторого тетраэдра T^{s^*} при $s^* \neq s$), угол треугольника T_{ijk}^s при вершине a_i является средним или наибольшим углом данного треугольника, и на этом треугольнике на текущий момент не задано ни одно из условий (j, k, i) или (k, i, j) . Таким образом, на начальном этапе каждый треугольник, являющийся гранью некоторого тетраэдра триангуляции, порождает не менее двух допустимых условий.

Алгоритм I.

Рассмотрим поочередно все точки триангуляции в порядке возрастания их номеров. Пусть a_i — очередная точка. Зададим в a_i все условия (i, j, k) типа (8), являющиеся допустимыми. Перейдем к рассмотрению следующей точки.

Отметим, что условия (i, j, k) типа (8) задаются алгоритмом I на каждом из соседних тетраэдров, имеющих общую грань T_{ijk} .

Лемма 2. *Алгоритм I обеспечивает непрерывность результирующей кусочно-полиномиальной функции на области Ω .*

Доказательство. Достаточно доказать, что выбор условий типа (8) на любом треугольнике T_{ijk} , являющемся общей гранью тетраэдров T^s и T^r , определяется алгоритмом I однозначно. Это действительно так, поскольку данное условие

задается в том из углов T_{ijk} (среднем или наибольшем), который имеет наименьший номер. \square

4. ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕСТРОЕНИЯ

Алгоритм I порождает элементы типов $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4$. Чтобы на каждом тетраэдре триангуляции имели место оценки (17) теоремы 1, надо исключить (заменить) все условия интерполяции, приводящие к появлению тетраэдров типа \mathcal{K}_4 .

Вершинам каждого тетраэдра $T^s \in \mathfrak{T}$ присвоим локальные номера следующим образом. Если $T^s \in \mathcal{K}_1$, то присваиваем вершинам номера 1, 2, 3, 4 так, чтобы сохранялись отношения порядка номеров этих вершин. Если $T^s \in \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \cup \mathcal{K}_4$, то номер 4 присвоим вершине a_{i_1} , при которой у тетраэдра T^s нет исходно допустимых условий, т. е. если $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4} \in T^s$, то ни одно из условий (i_1, i_j, i_k) ($j, k \in \{2, 3, 4\}, j \neq k$) не является исходно допустимым; номера 1, 2, 3 присваиваем оставшимся вершинам так, чтобы сохранялись отношения порядка номеров этих вершин.

Будем говорить, что грань T_{ijk}^s тетраэдра T^s имеет положительную внешнюю ориентацию, если направление обхода ее границы по стороне, внешней по отношению к T^s , происходит против часовой стрелки, если совершать его таким образом, чтобы при обходе путь от исходно допустимой вершины с наименьшим номером к исходно допустимой вершине с большим номером проходил через ребро, соединяющее эти вершины. Противоположную ориентацию назовем отрицательной. Отметим, что всякий треугольник T_{ijk} с вершинами a_i, a_j, a_k может быть общей гранью некоторых тетраэдров T^s и T^r , если только его ориентация как грани T_{ijk}^s тетраэдра T^s и ориентация как грани T_{ijk}^r тетраэдра T^r являются противоположными. Назовем это свойство согласованностью ориентаций соответствующих граней.

Далее для любого $T \in \mathfrak{T}$ и $K_T \in \mathcal{K}_i, i = 1, 2, 3, 4$, через $\varphi \begin{bmatrix} i_1 j_1 k_1 \\ i_2 j_2 k_2 \end{bmatrix} (K_T)$ будем обозначать конечный элемент \tilde{K}_T , полученный из K_T заменой интерполяционного условия (i_1, j_1, k_1) на условие (i_2, j_2, k_2) . Назовем $\varphi \begin{bmatrix} i_1 j_1 k_1 \\ i_2 j_2 k_2 \end{bmatrix}$ преобразованием грани для соответствующего конечного элемента. Если заменяются два условия (по одному на гранях $T_{i_1 j_1 k_1}$ и $T_{i_3 j_3 k_3}$), будем писать $\varphi \begin{bmatrix} i_1 j_1 k_1 \\ i_2 j_2 k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_3 j_3 k_3 \\ i_4 j_4 k_4 \end{bmatrix} (K_T)$ и называть такое преобразование двойным преобразованием граней. Преобразования граней будем выписывать, пользуясь локальной нумерацией вершин.

Если в результате работы алгоритма I оказалось $\mathcal{K}_4 \neq \emptyset$, заменим элементы множества \mathcal{K}_4 на элементы из $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$. Возьмем произвольный элемент $K_T \in \mathcal{K}_4$. Заменим $K_T \in \mathcal{K}_4$ на $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 124 \\ 214 \end{bmatrix} (K_T) \in \mathcal{K}_2$ или на $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 234 \\ 324 \end{bmatrix} (K_T) \in \mathcal{K}_3$. Отметим, что если $\tilde{K}_T \in \mathcal{K}_2$ или $\tilde{K}_T \in \mathcal{K}_3$, то в результате применения к \tilde{K}_T преобразования $\varphi \begin{bmatrix} 123 \\ 312 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 134 \\ 314 \end{bmatrix}$, получим конечный элемент из \mathcal{K}_2 или \mathcal{K}_3 соответственно, т. е. на нем также будет иметь место оценки (17).

Пусть T^* — тетраэдр, соседний с T и имеющий с ним общую грань T_{ijk} ($i < j < k$), и на этой грани для T и T^* было реализовано преобразование

$\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} i & j & k \\ j & i & k \end{bmatrix} (K_T)$ и $\tilde{K}_{T^*} = \varphi \begin{bmatrix} i & j & k \\ j & i & k \end{bmatrix} (K_{T^*})$ (если такового T^* не существует, то T_{ijk} является частью границы области Ω , и перенос условия для K_T завершен). При переходе от K_T к \tilde{K}_T возникает проблема возможности замены условия (i, j, k) на условие (j, i, k) в T^* с целью сохранения непрерывности результирующей кусочно-полиномиальной функции S на Ω . Эта проблема сводится к решению вопроса о возможности переноса одного из допустимых условий типа (8), заданного на одной из граней некоторого тетраэдра T при условии $K_T \in \mathcal{K}_i$ ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) в допустимую вершину с большим номером той же грани. Назовем эту проблему *задачей переноса условия для грани T_{ijk} тетраэдра T* .

Пусть $K_T \in \mathcal{K}_1$. Рассмотрим задачу переноса условия для грани T_{124} . Для этого заменяем K_T на $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 124 \\ 412 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 134 \\ 413 \end{bmatrix} (K_T) \in \mathcal{K}_1$ (перенос второго условия делается для того, чтобы тетраэдр оставался в классе \mathcal{K}_1). Если грань T_{134} является частью границы области Ω , то процесс переноса условий останавливается. Иначе далее требуется решать задачу переноса условия для грани T_{134} соседнего тетраэдра T^* . Точно так же, если требуется решить задачу переноса условия для грани T_{134} , применяем преобразование $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 124 \\ 412 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 134 \\ 413 \end{bmatrix} (K_T)$. При этом $\tilde{K}_T \in \mathcal{K}_1$, и далее требуется решать задачу переноса условия для грани T_{124} соседнего тетраэдра, если данная грань не является частью границы области Ω . Если решается задача переноса условия для грани T_{123} или T_{234} , то от K_T переходим к $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 213 \\ 312 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 234 \\ 324 \end{bmatrix} (K_T)$. При этом $\tilde{K}_T \in \mathcal{K}_1$, и далее требуется решать задачу переноса условия для грани T_{234} (если решалась задача для T_{123}) или T_{123} (если решалась задача для T_{234}) соседнего относительно соответствующей грани тетраэдра, если грань не является граничной.

Пусть $T \in \mathcal{K}_2$. Если решается задача переноса условия для грани T_{123} или T_{234} , то от K_T переходим к $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 213 \\ 312 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 234 \\ 324 \end{bmatrix} (K_T) \in \mathcal{K}_2$, и далее требуется решать задачу переноса условия для грани T_{234} (если решалась задача для T_{123}) или T_{123} (если решалась задача для T_{234}) соседнего относительно соответствующей грани тетраэдра, если грань не является граничной. Если решается задача переноса условия для грани T_{134} или T_{124} , то от K_T переходим к $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 124 \\ 214 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 134 \\ 314 \end{bmatrix} (K_T) \in \mathcal{K}_3$, и далее требуется решать задачу переноса условия для грани T_{134} (если решалась задача для T_{124}) или T_{124} (если решалась задача для T_{134}) соседнего относительно соответствующей грани тетраэдра, если грань не является граничной.

Пусть $T \in \mathcal{K}_3$. Если решается задача переноса условия для грани T_{123} или T_{124} , от K_T переходим к $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 123 \\ 213 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 124 \\ 214 \end{bmatrix} (K_T) \in \mathcal{K}_3$, и далее требуется решать задачу переноса условия для грани T_{124} (если решалась задача для T_{123}) или T_{123} (если решалась задача для T_{124}) соседнего относительно соответствующей грани тетраэдра, если грань не является граничной. Если решается задача переноса условия для грани T_{134} или T_{234} , то от K_T переходим к $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 234 \\ 324 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 134 \\ 314 \end{bmatrix} (K_T) \in \mathcal{K}_2$, и далее требуется решать задачу переноса условия для грани T_{234} (если решалась задача для T_{134}) или T_{134} (если решалась задача для T_{234}) соседнего относительно соответствующей грани тетраэдра, если грань не является граничной.

Пусть $T \in \mathcal{K}_4$. Если решается задача переноса условия для грани T_{124} или T_{234} , то от K_T переходим к $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 124 \\ 214 \end{bmatrix} (K_T) \in \mathcal{K}_2$ или $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 234 \\ 324 \end{bmatrix} (K_T) \in \mathcal{K}_3$ соответственно, и процесс останавливается. Если решается задача переноса

условия для грани T_{123} или T_{134} , от K_T переходим к $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 123 \\ 312 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 134 \\ 314 \end{bmatrix} (K_T)$, и далее требуется решать задачу переноса условия для грани T_{124} (если решалась задача для T_{123}) или T_{123} (если решалась задача для T_{124}) соседнего относительно соответствующей грани тетраэдра, если грань не является граничной. В этом случае $\tilde{K}_T \in \mathcal{K}_5$, и в дальнейшем для него надо будет решить задачу переноса условия на грани T_{124} или T_{234} .

Если $T \in \mathcal{K}_5$, то для решения задачи переноса условия для грани T_{124} или T_{234} от K_T переходим к $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 124 \\ 214 \end{bmatrix} (K_T) \in \mathcal{K}_2$ или $\tilde{K}_T = \varphi \begin{bmatrix} 234 \\ 324 \end{bmatrix} (K_T) \in \mathcal{K}_3$ соответственно, и процесс переноса условий останавливается. Задача переноса условия для грани T_{123} или T_{134} исключается, т. к. эти грани уже были задействованы в некоторой последовательности перестроений, в результате которых данный тетраэдр изменил свой тип с \mathcal{K}_4 на \mathcal{K}_5 (но при необходимости можно вернуться к исходным условиям на паре граней T_{123} и T_{134} ; тогда мы снова будем иметь дело с тетраэдром типа \mathcal{K}_4 , если возврат был осуществлен для K_T , или с тетраэдром типа \mathcal{K}_2 или \mathcal{K}_3 , если возврат осуществляется для \tilde{K}_T).

Замечание. Если к $K_T \in \mathcal{K}_i$, $i = \overline{1,4}$, применить оба описанных для каждого типа конечных элементов преобразования переноса условий (по два двойных — для типов $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$; одно однократное и одно двойное — для типа \mathcal{K}_4), то полученные конечные элементы будут принадлежать множеству $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$, и, следовательно, для них также будут иметь место оценки (17).

Отметим, что имеют место следующие свойства.

1°. Если $T = T^s \in \mathcal{K}_4 \cup \mathcal{K}_5$, то грани T_{124} и T_{234} имеют одинаковую внешнюю ориентацию.

2°. В остальных случаях (в том числе для пары граней T_{123} и T_{134} конечных элементов типа \mathcal{K}_4 или \mathcal{K}_5) для любого конечного элемента K_T все пары граней $T_{i_1 j_1 k_1}^s$ и $T_{i_3 j_3 k_3}^s$, к которым применяются описанные выше двойные преобразования $\varphi \begin{bmatrix} i_1 j_1 k_1 \\ i_2 j_2 k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_3 j_3 k_3 \\ i_4 j_4 k_4 \end{bmatrix} (T)$, имеют противоположные внешние ориентации.

5. АЛГОРИТМ ПЕРЕСТРОЕНИЯ

Обозначим через \mathcal{F} множество всех конечных элементов, полученных из тетраэдров триангуляции \mathfrak{T} с помощью алгоритма I; $\mathcal{M} = \{K_T^{s_i}\}_{i=1}^k$ — множество всех элементов $K_T^{s_i} = K_{T^{s_i}}$ из триангуляции, на которых требуется осуществить перенос условий (на начальном этапе это будет множество всех элементов типа \mathcal{K}_4 ; в ходе работы алгоритма типы элементов могут изменяться на \mathcal{K}_5 и обратно); \mathcal{M}_T — множество тетраэдров, на которых построены элементы из \mathcal{M} . Через \mathcal{N} обозначим множества пар $\{\tilde{K}_T^{s_i}, \varphi^{s_i}\}$, где конечные элементы $\tilde{K}_T^{s_i}$ построены на тетраэдрах T^{s_i} , принадлежат множеству $\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$ и получены в результате перестроения элементов $K_T^{s_i}$ типа \mathcal{K}_4 или \mathcal{K}_5 с помощью преобразования φ^{s_i} . На начальном этапе $\mathcal{N} = \emptyset$. Под записью $\tilde{K}_T^{s_i} \in \mathcal{N}$ договоримся понимать $\{\tilde{K}_T^{s_i}, \varphi^{s_i}\} \in \mathcal{N}$. Через $\mathcal{B}(q, \nu) = \{K_T^{r_i}\}_{i=1}^{m(q, \nu)}$ и

$\tilde{\mathcal{B}}(q, \nu)$ будем обозначать некоторые последовательности конечных элементов. Введем функцию $\delta : \mathfrak{T} \times \mathfrak{T} \rightarrow \{0, 1\}$ такую, что для любых $T^q, T^s \in \mathfrak{T}$ выполняется свойство $\delta(T^q, T^s) = \delta(T^s, T^q)$. Для всех $T^q, T^s \in \mathfrak{T}$ на начальном этапе положим $\delta(T^q, T^s) = 0$.

Алгоритм II.

1. Если $\mathcal{M} \neq \emptyset$, возьмем произвольно $K_T^q \in \mathcal{M}$ (если $\mathcal{M} = \emptyset$, алгоритм заканчивает свою работу). Исключим K_T^q из \mathcal{M} . Положим $s = q$.

2. Выберем произвольно $\varphi^s \in \{\varphi \begin{bmatrix} 124 \\ 214 \end{bmatrix}, \varphi \begin{bmatrix} 234 \\ 324 \end{bmatrix}\}$. Если $\varphi^s = \varphi \begin{bmatrix} 124 \\ 214 \end{bmatrix}$, положим $\nu = 3$. Если $\varphi^s = \varphi \begin{bmatrix} 234 \\ 324 \end{bmatrix}$, положим $\nu = 1$.

3. Полагаем $i = 1$, $r_1 = s$, $K_T^{r_1} = K_T^s$, $m(q, \nu) = 1$, $\mathcal{B}(q, \nu) = \{K_T^{r_i}\}_{i=1}^{m(q, \nu)} = \{K_T^s\}$. Строим $\tilde{K}_T^s = \varphi^s(K_T^s) \in \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$. Грань, для которой был выполнен перенос условий интерполяции, обозначим через Δ . Полагаем $\tilde{\mathcal{B}}(q, \nu) = \{\tilde{K}_T^{r_i}\}_{i=1}^{m(q, \nu)} = \{\tilde{K}_T^s\}$.

4. Поместим пару $\{\tilde{K}_T^s, \varphi^s\}$ в \mathcal{N} .

5. Если грань Δ является граничной, элементы из \mathcal{F} и конечные элементы из всех $\mathcal{B}(t, \nu)$ и $\tilde{\mathcal{B}}(t, \nu)$ при $t \neq q$, вошедшие в $\mathcal{B}(q, \nu)$ заменим на соответствующие элементы из $\tilde{\mathcal{B}}(q, \nu)$. Перейдем к шагу 1.

6. Если грань Δ не является частью границы области Ω , берем тетраэдр $T = T^l \in \mathfrak{T}$, соседний с T^s относительно грани Δ . Полагаем $s = l$, увеличиваем на единицу числа i и $m(q, \nu)$.

7. Для случаев а) $K_T^s \notin \mathcal{M}$ и $K_T^s \notin \mathcal{N}$; б) $K_T^s \notin \mathcal{M}$; $K_T^s \in \mathcal{N}$, $\Delta \in \{T_{123}^s, T_{134}^s\}$, в) $K_T^s \in \mathcal{M}$, $K_T^s \notin \mathcal{N}$, $\Delta \in \{T_{123}^s, T_{134}^s\}$ (иначе переходим к следующему пункту), полагаем $r_i = s$, $K_T^{r_i} = K_T^s$, $\mathcal{B}(q, \nu) = \{K_T^{r_i}\}_{i=1}^{m(q, \nu)}$. Выбираем двойное преобразование граней в соответствии с параграфом 3 и обозначаем его φ^s . Строим $\tilde{K}_T^s = \varphi^s(K_T^s) \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$. Грань, для которой был выполнен перенос условий интерполяции, отличную от Δ , обозначим через Δ_1 . Полагаем $\tilde{\mathcal{B}}(q, \nu) = \{\tilde{K}_T^{r_i}\}_{i=1}^{m(q, \nu)}$, $\Delta = \Delta_1$. Переходим к шагу 5.

8. Если $K_T^s \in \mathcal{M}$ и $K_T^s \notin \mathcal{N}$ (иначе переходим к следующему пункту), то $K_T^s \in \mathcal{K}_4 \cup \mathcal{K}_5$. Полагаем $r_i = s$, $K_T^{r_i} = K_T^s$, $\mathcal{B}(q, \nu) = \{K_T^{r_i}\}_{i=1}^{m(q, \nu)}$. Выбираем преобразование $\varphi^s = \varphi \begin{bmatrix} 124 \\ 214 \end{bmatrix}$ или $\varphi^s = \varphi \begin{bmatrix} 234 \\ 324 \end{bmatrix}$ в соответствии с параграфом 4. Строим $\tilde{K}_T^s = \varphi^s(K_T^s) \in \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$. Полагаем $\tilde{\mathcal{B}}(q, \nu) = \{(\tilde{K}_T^{r_i}, \varphi^{r_i})\}_{i=1}^{m(q, \nu)}$, помещаем пару $\{\tilde{K}_T^s, \varphi^s\}$ в \mathcal{N} . Удалим K_T^s из \mathcal{M} . Элементы из \mathcal{F} и конечные элементы из всех $\mathcal{B}(t, \nu)$ и $\tilde{\mathcal{B}}(t, \nu)$ при $t \neq q$, вошедшие в $\mathcal{B}(q, \nu)$ заменим на соответствующие элементы из $\tilde{\mathcal{B}}(q, \nu)$. Перейдем к шагу 1.

9. Так как $K_T^s \in \mathcal{N}$ (иначе алгоритм не обратился бы к данному шагу), то $K_T^s \in \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$, но для обеспечения непрерывности кусочно полиномиальной функции \mathcal{S} на Ω на текущий момент требуется перенос условия типа (8)

на грани Δ , т. е. требуется применить к T^s преобразование $\psi^s = \varphi \begin{bmatrix} 124 \\ 214 \end{bmatrix}$ или $\psi^s = \varphi \begin{bmatrix} 234 \\ 324 \end{bmatrix}$. Полагаем $r_i = s$, $K_T^{r_i} = K_T^s$, $\mathcal{B}(q, \nu) = \{K_T^{r_i}\}_{i=1}^{m(q, \nu)}$. Так как $K_T^s \in \mathcal{N}$, то на одной из граней T_{124}^s или T_{234}^s соответствующего тетраэдра T^s уже был реализован перенос условий с помощью преобразования $\varphi^s \in \{\varphi \begin{bmatrix} 124 \\ 214 \end{bmatrix}, \varphi \begin{bmatrix} 234 \\ 324 \end{bmatrix}\}$, отличного от ψ^s . Таким образом, существует такая последовательность $\tilde{\mathcal{B}}(q_0, \nu_0) = \{\tilde{K}_T^{r_i}\}_{i=1}^{m(q_0, \nu_0)}$, что $\delta(T^{r_1}, T^{r_{m(q_0, \nu_0)}}) = 1$ (элемент K_T^s является первым или последним элементом последовательности $\tilde{\mathcal{B}}(q_0, \nu_0)$). Конечные элементы из \mathcal{F} и из всех $\mathcal{B}(t, \nu)$, $\tilde{\mathcal{B}}(t, \nu)$ при $t \neq q_0$, вошедшие в $\tilde{\mathcal{B}}(q_0, \nu_0)$ заменим на соответствующие элементы из $\mathcal{B}(q_0, \nu_0)$, положим $\delta(T^{r_1}, T^{r_{m(q_0, \nu_0)}}) = 0$. Применим к K_T^s преобразование ψ^s , получим $\tilde{K}_T^s = \psi^s(K_T^s) \in \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$. Полагаем $\tilde{\mathcal{B}}(q, \nu) = \{\tilde{K}_T^{r_i}\}_{i=1}^{m(q, \nu)}$. Поместим пару $\{\tilde{K}_T^s, \psi^s\}$ в \mathcal{N} . Элементы из \mathcal{F} и конечные элементы из всех $\mathcal{B}(t, \nu)$ и $\tilde{\mathcal{B}}(t, \nu)$ при $t \neq q$, вошедшие в $\mathcal{B}(q, \nu)$ заменим на соответствующие элементы из $\tilde{\mathcal{B}}(q, \nu)$. Если $m(q_0, \nu_0) = 1$, переходим к шагу 1. Если $m(q_0, \nu_0) > 1$, из $\tilde{K}_T^{r_1}$ и $\tilde{K}_T^{r_{m(q_0, \nu_0)}}$ выберем элемент, отличный от K_T^s . Обозначим его $\tilde{K}_T^{r_j}$, где $j = 1$ или $j = m(q_0, \nu_0)$ (отметим, что $(\tilde{K}_T^{r_j}, \varphi^{r_j}) \in \mathcal{N}$). Удалим пару $\{\tilde{K}_T^{r_j}, \varphi^{r_j}\}$ из \mathcal{N} . Положим $s = r_j$ и возьмем $\varphi^s \in \{\varphi \begin{bmatrix} 124 \\ 214 \end{bmatrix}, \varphi \begin{bmatrix} 234 \\ 324 \end{bmatrix}\} \setminus \{\varphi^{r_j}\}$, возьмем $\nu_1 \in \{0, 1\} \setminus \{\nu\}$, положим $\nu = \nu_1$, перейдем к шагу 3.

Лемма 3. Алгоритм II заканчивает свою работу за конечное число шагов. В результате работы алгоритма II все конечные элементы, построенные на триангуляции \mathfrak{T} , принадлежат одному из типов $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$. Результирующая кусочно-непрерывная функция является непрерывной.

Доказательство. В силу того, что множество \mathcal{M} конечно и не пополняется в ходе работы алгоритма, количество обращений к шагу 1 будет конечным. Возникновение циклов возможно только в результате действия шагов 7 и 9.

Если алгоритм ни разу не обращается к шагу 9 или обращается к нему конечное число раз, то остается доказать конечность числа обращений к шагу 7 при фиксированном $T^q \in \mathcal{M} \subset \mathcal{K}_4 \cup \mathcal{K}_5$, точнее, конечность переходов от шага 7 к шагам 5–6. Докажем от противного. Пусть $m(q, \nu) = \infty$. Так как обращение к шагу 8 завершило бы построение последовательности $\mathcal{B}(q, \nu)$, то оно невозможно при $m(q, \nu) = \infty$. Следовательно, в $\mathcal{B}(q, \nu)$ нет элементов из $\mathcal{K}_4 \cup \mathcal{K}_5$, отличных от T^q . В силу конечности множества \mathcal{F} случай $m(q, \nu) = \infty$ возможен только если в $\mathcal{B}(q, \nu)$ имеется конечный упорядоченный набор элементов $\{K_T^{r_i}\}_{i=\mu_1}^{\mu_2}$ (индексы r_i определяются алгоритмом) такой, что $K_T^{r_{\mu_1}} = K_T^{r_{\mu_2}}$. Возможные преобразования (см. параграф 3) для элементов из $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$ являются двойными, и таким образом разбивают грани тетраэдров на пары, к которым перенос условий типа (8) применяется одновременно. Тогда равенство $K_T^{r_{\mu_1}} = K_T^{r_{\mu_2}}$ возможно только если $K_T^{r_{\mu_1}} = K_T^{r_1} = K_T^q$, и K_T^q и $K_T^{r_{\mu_2-1}}$ являются соседними относительно одной из граней T_{124}^q или T_{234}^q . Но это невозможно в силу свойств 1° – 2° и согласованности ориентаций. Остается доказать конечность множества обращений алгоритма к шагу 9.

Фиксируем элемент $T^q \in \mathcal{M}$, выбранный на шаге 1. Докажем, что если выбор этого элемента порождает цикл обращений алгоритма к шагу 9, то число этих обращений будет конечным. Обозначим через $\{T^{n_i}\}_{i=2}^p$ последовательность из тетраэдров, которые принадлежат \mathcal{M}_T и к которым происходят обращения шага 9 (точнее, последовательности шагов 9, обусловленной работой

цикла). Положим $T^{n_1} = T^q$ и в итоге рассмотрим последовательность $\{T^{n_i}\}_{i=1}^p$. Вообще говоря, p может быть конечным или бесконечным. Докажем, что p конечно. Предположим, что $p = \infty$, и придем к противоречию. Ко всем тетраэдрам (не только из \mathcal{M}_T), к которым происходит обращение алгоритма с момента рассмотрения $T^q = T^{n_1}$, кроме самого T^q , применяются двойные преобразования граней, причем в соответствии с параграфом 3 в каждой такой паре ни одна грань не может быть заменена на другую. Поэтому в силу конечности множества \mathcal{M}_T найдутся $\kappa, \omega \in \mathbb{N}$, такие, что

$$T^{n_\kappa} = T^{n_{\kappa+\omega}},$$

т. е. последовательность $\{T^{n_i}\}_{i=1}^\infty$, начиная с некоторого номера, становится периодической с периодом ω , и тогда для любого $i \geq \kappa$ будет выполняться равенство

$$T^{n_i} = T^{n_{i+\omega}}.$$

Так как в этом случае для последовательности $T^{n_\kappa}, T^{n_{\kappa+1}}, \dots, T^{n_{\kappa+\omega-1}}$ существуют (могут быть построены) соответствующие последовательности $\mathcal{B}(\kappa + i, \nu)$, $\tilde{\mathcal{B}}(\kappa + i, \nu)$ ($i = 0, 1, \dots, \omega; \nu \in \{1, 3\}$), то в силу условия согласованности ориентаций граней и свойств 1° и 2° число ω может быть только четным.

Переход от шага 3 к шагу 9 происходит, если при некотором i выполнены условия

$$(23) \quad \delta(T^{n_{i-1}}, T^{n_i}) = 0, \quad \delta(T^{n_{i+1}}, T^{n_{i+2}}) = 1.$$

В этом случае цель шага 9 — положить

$$\delta(T^{n_i}, T^{n_{i+1}}) = 1$$

и заменить второе из условий (23) на

$$\delta(T^{n_{i+1}}, T^{n_{i+2}}) = 0.$$

После выполнения этих действий происходит переход к шагу 3. Таким образом, количество переходов от шага 9 к шагу 3 может быть лишь конечным, так как в силу четности величины ω при некотором i будет выполнено первое из условий (23) (поскольку оно каждый раз устанавливается в конце работы шага 9) и не будет выполнено второе из условий (23). В этом случае от шага 3 мы перейдем к шагу 8 и работы цикла завершится переходом к шагу 1. Первая часть леммы доказана. Докажем вторую часть.

Все элементы, не принадлежащие типам $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$, принадлежат множеству \mathcal{M} . Поскольку алгоритм преобразует все элементы из \mathcal{M} к типам $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$, не порождает новых элементов, не относящихся к типам $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$, и работает до тех пор, пока множество \mathcal{M} не станет пустым, второе утверждение леммы также имеет место. Непрерывность результирующей кусочно-полиномиальной функции следует из того, что непрерывность сохраняется при всех перестроениях на каждом шаге работы алгоритма II. \square

Объединяя леммы 1 и 2, получаем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть имеется триангуляция $\{T^s\}_{s=1}^n$ исходного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Пусть на каждом тетраэдре T^s строится интерполяционный многочлен 3-й степени P_3^s по интерполяционным условиям, задаваемым алгоритмами I и II. Тогда результирующая кусочно-полиномиальная функция \mathcal{S} ,

определенная на Ω и такая, что $\mathcal{S}|_{T^s} = P_3^s$ для любого $s = \overline{1, n}$, будет непрерывна на Ω , и на каждом тетраэдре $T \in \mathfrak{T}$ будут иметь место оценки (17).

REFERENCES

- [1] P.G. Ciarlet, P.A. Raviart, *General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods*, Arch. Rational Mech. Anal., **46** (1972), 177–199. Zbl 0243.41004
- [2] P. Jamet, *Estimation d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés*, RAIRO Anal. Numer., **10** (1976), 43–60. Zbl 0346.65052
- [3] Yu. N. Subbotin, *The dependence of estimates of a multidimensional piecewise-polynomial approximation on the geometric characteristics of a triangulation*, Trudy Mat. Inst. Steklov, **189** (1989), 117–137.
- [4] M. Křížek, *On the maximum angle condition for linear tetrahedral elements*, SIAM J. Numer. Anal., **29** (1992), 513–520. Zbl 0755.41003
- [5] A. Rand, *Average interpolation under the maximum angle condition*, SIAM J. Numer. Anal., **50** (2012), 2538–2559. Zbl 1267.65166
- [6] A. Ženišek, J. Hoderova-Zlamalova, *Semiregular Hermite tetrahedral finite elements*, Appl. of Math., **4** (2001), 295–315. Zbl 1066.65118
- [7] N.V. Baidakova, *On some interpolation third-degree polynomials on a three-dimensional simplex*, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **14** (2008), 43–57.

NATALIA VASIL'EVNA BAIDAKOVA
KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
UL. S.KOVALEVSKOI, 16,
620990, EKATERINBURG, RUSSIA
E-mail address: baidakova@imm.uran.ru