S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 815–828 (2016) УДК 517.968.4+517.929

DOI 10.17377/semi.2016.13.065 MSC 45G10+34K05

КОРРЕКТНОСТЬ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ИСПОЛЬЗУЕМОГО В МОДЕЛЯХ ЖИВЫХ СИСТЕМ

Н. В. ПЕРЦЕВ, Б. Ю. ПИЧУГИН, А. Н. ПИЧУГИНА

Abstract. We consider a family of integral equations arising in mathematical models of some living systems. Depending on the choice of the survival of elements of living systems integral equation is reduced to the equivalent of the Cauchy problem for non-autonomous differential equations with a point or distributed delays. Problems of existence, uniqueness, nonnegativity and extendibility of solutions are investigated.

Keywords: Integral equation, delay differential equation, properties of solutions, mathematical model, living systems.

1. Введение

Живые системы представляют собой один из объектов, активно исследуемых с помощью метода математического моделирования. Для разработки математических моделей живых систем используется довольно широкий математический аппарат, в частности, дифференциальные и интегральные уравнения, включая уравнения с запаздывающими переменными. Наличие запаздывающих переменных обусловлено необходимостью учета предыстории развития многих живых систем. Примеры уравнений с запаздыванием, используемых в моделях живых систем, можно найти в работах [1]–[10].

Целью настоящей работы является исследование корректности одного семейства интегральных и дифференциальных уравнений с запаздыванием, возникающего в моделях живых систем. В задачи работы входит поиск условий,

---

Pertsev, N.V., Pichugin, B.Yu., Pichugina, A.N., The correctness of a family of integral and delay differential equations, used in models of living systems.

Поступила 19 марта 2016 г., опубликована 6 октября 2016 г.

при которых решение изучаемого семейства уравнений существует, единственно и непрерывным образом зависит от начальных данных на конечном промежутке времени. В силу специфики объекта моделирования к этим задачам добавляются вопросы, касающиеся условий неотрицательности и ограниченности решений.

Прежде чем перейти к описанию модели, остановимся на некоторых обозначениях, используемых в статье. Пусть $I, J \subset \mathbb{R}$ — промежутки в $\mathbb{R}$. Через $C(I,J)$ будем обозначать множество всех непрерывных функций $z : I \mapsto J$. Если промежуток I замкнут, то $C(I,\mathbb{R})$ будет банаховым пространством с нормой

$$||z|| = \max_{\theta\in I} |z(\theta)|, \quad z \in C(I,\mathbb{R}).$$

Для фиксированного $\gamma > 0$ определим на $C(I,\mathbb{R})$ норму (см. [11])

$$||z||_\gamma = \max_{\theta\in I} e^{-\gamma\,\theta}\,|z(\theta)|, \quad z \in C(I,\mathbb{R}). \tag{1}$$

Норма $||\cdot||_\gamma$ эквивалентна норме $||\cdot||$, так как для всех $z \in C(I,\mathbb{R})$ выполнено неравенство

$$e^{-\gamma\,b}||z|| \leqslant ||z||_\gamma \leqslant e^{-\gamma\,a}||z||,$$

где a и b — это левая и правая границы промежутка I.

2. Уравнения модели в интегральной форме

Рассмотрим некоторую живую систему, состоящую из элементов одного типа. Обозначим через $y(t)$ количество элементов системы в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Примем, что динамика $y(t)$ описывается следующим соотношениями:

$$y(t) = \psi(t) + \int_0^t P(a)\,e^{-\mu\,a}\,\beta(y_{t-a})\,da, \quad t \in [0;\infty), \tag{2}$$

$$y(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega = [-\omega; 0]. \tag{3}$$

Здесь неотрицательная и непрерывная функция $\psi(t)$ отражает суммарное количество существующих в момент времени t первоначальных элементов и элементов, иммигрировавших в систему из внешних источников. Первоначальными называются те элементы, которые появились в системе при $t < 0$. Интеграл

$$\int_0^t P(a)\,e^{-\mu\,a}\,\beta(y_{t-a})\,da \tag{4}$$

равен числу элементов воспроизведённых самой системой за время $[0;t]$ и доживших до момента t.

Неотрицательная и невозрастающая функция $P(a)$ такая, что $P(0) = 1$, является функцией дожития элементов системы. Если в момент $t - a$ система воспроизвела $N\,da$ элементов, то к моменту t из них не покинут систему вследствие старения и других индивидуальных особенностей $P(a)\,N\,da$ элементов. Будем считать, что существует константа $\sigma > 0$ такая, что $P(\sigma) = 0$. Это означает, что время пребывания в системе каждого элемента ограничено сверху константой σ.

Константа $\mu \geqslant 0$ равна интенсивности, с которой элементы покидают систему под воздействием внешних, не зависящих от самих элементов факторов. Если в момент t в системе существует N элементов, то к моменту $t+dt$ под воздействием внешних факторов систему покинут $\mu\,N\,dt + o(dt)$ элементов. Это означает, что если в момент $t-a$ система воспроизвела $N\,da$ элементов, то к моменту t из них не покинут систему под воздействием внешних факторов $e^{-\mu\, a}\,N\,da$ элементов.

Функция $y_s : I_\omega \mapsto \mathbb{R}$ — это срез функции y в момент $s \geqslant 0$, определённый по правилу

$$y_s(\theta) = y(s+\theta), \quad \theta \in I_\omega.$$

Функционал $\beta : C(I_\omega;\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ определяет скорость воспроизводства системой новых элементов. Если численность элементов системы на промежутке $[s-\omega; s]$, $s \geqslant 0$, описывается функцией z:

$$z(\theta) = y_s(\theta) = y(s+\theta), \quad \theta \in I_\omega,$$

то $\beta(z)\,da$ — это число элементов воспроизведённых системой в момент s. Принимаем, что функционал β непрерывен и, кроме того, $\beta : C(I_\omega, \mathbb{R}_+) \mapsto \mathbb{R}_+$.

Пусть $\tau > 0$ — некоторая константа. Обозначим через

$$C_{\psi,\tau} \subset C([-\omega;\tau], \mathbb{R}),$$

множество, состоящее из всех функций y таких, что $y(t) = \psi(t)$, $t \in I_\omega$.

Определение 1. *Функция $y \in C_{\psi,\tau}$, удовлетворяющая уравнению (2) для всех $t \in [0;\tau]$, называется решением системы (2), (3) на промежутке $[0;\tau]$.*

В завершение этого раздела отметим, что по аналогии с (4) функцию ψ можно задать конструктивно, используя формулу

$$\psi(t) = \int_0^\sigma P_0(a) e^{-\mu_0\, a}\,\varphi(t-a)\,da, \quad t \in \mathbb{R},$$

где локально интегрируемая и неотрицательная функция $\varphi(s)$ — это суммарная скорость поступления в систему первоначальных и иммигрировавших элементов в момент $s \in \mathbb{R}$; неотрицательная и невозрастающая функция $P_0(a)$ такая, что $P_0(0) = 1$, $P_0(\sigma) = 0$, — функция дожития для первоначальных и иммигрировавших элементов; константа $\mu_0 \geqslant 0$ — это интенсивность, с которой первоначальные и иммигрировавшие элементы покидают систему под воздействием внешних, не зависящих от самих элементов факторов. Непрерывность такой функции ψ вытекает из следующей леммы, если положить

$$Q(a) = P_0(a) e^{-\mu_0\, a}, \;\; a \in [0;\infty), \quad q(s) = \varphi(s), \;\; s \in \mathbb{R}.$$

Лемма 1. *Пусть $\sigma > 0$ — некоторая константа, функция Q почти всюду непрерывна и ограничена на $[0;\sigma]$, а функция q локально интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда функция*

$$g(t) = \int_0^\sigma Q(a)\,q(t-a)\,da, \quad t \in \mathbb{R},$$

непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Зафиксируем $t \in \mathbb{R}$ и выберем последовательность $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ так, что $t_n \to t$ при $n \to \infty$. Тогда

$$g(t_n) = \int_0^\sigma Q(a)\,q(t_n - a)\,da = \int_{t_n-\sigma}^{t_n} Q(t_n - s)\,q(s)\,ds = \int_a^b f_n(s)\,ds,$$

$$a = \inf_n (t_n - \sigma), \quad b = \sup_n t_n, \quad f_n(s) = \mathbb{I}(s \in [t_n - \sigma; t_n])\,Q(t_n - s)\,q(s), \quad s \in [a;b],$$

где $\mathbb{I}(\cdot)$ — индикаторная функция, принимающая значение 1, если условие в скобках выполнено, и значение 0 в противном случае. Так как функция $Q(a)$

почти всюду непрерывна на $[a; b]$, то последовательность функций $f_n(s)$ почти всюду на $[a; b]$ сходится к функции

$$f(s) = \mathbb{I}(s \in [t - \sigma; t])\, Q(t - s)\, q(s).$$

Функции $f_n(s)$ ограничены сверху по абсолютной величине интегрируемой на $[a; b]$ функцией $M\,|q(s)|$, где

$$M = \sup_{a \in [0;\sigma]} |Q(a)|.$$

Согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости,

$$\lim_{n\to\infty} g(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(s)\, ds = \int_a^b f(s)\, ds = g(t).$$

Следовательно, в силу произвольности выбора последовательности $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, функция $g(t)$ непрерывна в точке t. $\square$

В следующих двух разделах будем изучать корректность системы (2), (3). Для решения поставленных задач применим теорему Банаха о неподвижной точке сжимающего оператора в сочетании с методом эквивалентных норм [11]. Кроме того, используем элементы теории функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа [12, 13] и дифференциальных уравнений в банаховых пространствах [14]. Поскольку уравнение (2) содержит в общем случае нелинейный функционал β, то все утверждения будут сформулированы в терминах тех или иных предположений относительно этого функционала.

3. Корректность модели в случае глобальной липшицевости функционала β

Определим оператор $F : C_{\psi,\tau} \mapsto C_{\psi,\tau}$, который каждой функции $y \in C_{\psi,\tau}$ сопоставляет функцию $F(y) \in C_{\psi,\tau}$ по формуле

$$F(y)(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} F(y)(t) &= \psi(t) + \int_0^t P(a)\, e^{-\mu\, a}\, \beta(y_{t-a})\, da \\ &= \psi(t) + \int_0^t P(t-s) e^{-\mu(t-s)}\, \beta(y_s)\, ds, \quad t \in [0;\tau]. \end{aligned} \tag{6}$$

Тот факт, что $F(y) \in C_{\psi,\tau}$ вытекает из (5) и леммы 1, если положить

$$Q(t) = P(a)\, e^{-\mu\, a},\ \ a \in [0;\infty), \quad q(s) = \chi(s)\, \beta(y_s),\ \ s \in \mathbb{R},$$

где χ — это индикаторная функция полуоси $[0;\infty)$.

Определение 2. *Функционал β является глобально липшицевым с константой $L > 0$, если для любых $z^{(1)}, z^{(2)} \in C(I_\omega, \mathbb{R})$ выполняется неравенство*

$$|\beta(z^{(1)}) - \beta(z^{(2)})| \leqslant L\, ||z^{(1)} - z^{(2)}||.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены все предположения относительно функций, входящих в уравнения системы (2), (3), и функционал β является глобально липшицевым с константой $L > 0$. Тогда система (2), (3) имеет единственное решение на любом конечном промежутке $[0;\tau]$, и это решение является неотрицательным.*

Доказательство. Зафиксируем $\tau > 0$ и будем рассматривать систему (2), (3) на промежутке $[0;\tau]$, представив ее в виде системы

$$y(t) = F(y)(t), \quad t \in [0;\tau], \quad y(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega. \tag{7}$$

Множество $C_{\psi,\tau}$ замкнуто в $C([-\omega;\tau],\mathbb{R})$. Следовательно, оно является полным метрическим пространством как в метрике, порождённой нормой $||\cdot||$, так и в метриках, порождённых нормами $||\cdot||_\gamma$.

Пусть константа $\gamma > 0$ такова, что $\mu + \gamma > L$. Покажем, что в норме $||\cdot||_\gamma$, которая определена равенством (1), оператор F будет сжимающим в метрическом пространстве $C_{\psi,\tau}$ с коэффициентом сжатия

$$q = \frac{L}{\mu+\gamma} \in (0;1). \tag{8}$$

Тогда по теореме Банаха о неподвижной точке сжимающего оператора будет существовать единственная функция $y^* \in C_{\psi,\tau}$, удовлетворяющая равенству $F(y^*) = y^*$. Эта функция будет решением системы (7) и, следовательно, системы (2), (3) на промежутке $[0;\tau]$.

Пусть $y^{(1)}, y^{(2)} \in C_{\psi,\tau}$. Тогда для каждого $t \in [-\omega;0]$ верно, что

$$e^{-\gamma t}\,|F(y^{(1)})(t) - F(y^{(2)})(t)| = 0,$$

а для каждого $t \in [0;\tau]$ выполняется оценка

$$\begin{aligned}
e^{-\gamma t}\,|F(y^{(1)})(t) - F(y^{(2)})(t)| &\leqslant e^{-\gamma t}\int_0^t P(t-s)e^{-\mu(t-s)}|\beta(y_s^{(1)}) - \beta(y_s^{(2)})|\,ds\\
&\leqslant e^{-\gamma t}\int_0^t P(t-s)e^{-\mu(t-s)}\,L\,||y_s^{(1)} - y_s^{(2)}||\;ds\\
&\leqslant L\,e^{-(\mu+\gamma)t}\int_0^t e^{(\mu+\gamma)s}\,e^{-\gamma s}\max_{\theta\in I_\omega}\Big(|y^{(1)}(s+\theta) - y^{(2)}(s+\theta)|\Big)\,ds\\
&\leqslant L\,e^{-(\mu+\gamma)t}\int_0^t e^{(\mu+\gamma)s}\max_{\theta\in I_\omega}\Big(e^{-\gamma(s+\theta)}\,|y^{(1)}(s+\theta) - y^{(2)}(s+\theta)|\Big)\,ds\\
&\leqslant L\,e^{-(\mu+\gamma)t}\int_0^t e^{(\mu+\gamma)s}\max_{s\in[0;t]}\,\max_{\theta\in I_\omega}\Big(e^{-\gamma(s+\theta)}|y^{(1)}(s+\theta) - y^{(2)}(s+\theta)|\Big)\,ds\\
&\leqslant L\,e^{-(\mu+\gamma)t}\int_0^t e^{(\mu+\gamma)s}\max_{s+\theta\in[-\omega;\tau]}\Big(e^{-\gamma(s+\theta)}\,|y^{(1)}(s+\theta) - y^{(2)}(s+\theta)|\Big)\,ds\\
&= \frac{L}{\mu+\gamma}\,||y^{(1)} - y^{(2)}||_\gamma\,\big(1 - e^{-(\mu+\gamma)t}\big) \leqslant \frac{L}{\mu+\gamma}\,||y^{(1)} - y^{(2)}||_\gamma.
\end{aligned}$$

Отсюда приходим к оценке

$$||F(y^{(1)}) - F(y^{(2)})||_\gamma \leqslant q\,||y^{(1)} - y^{(2)}||_\gamma.$$

Следовательно, оператор F является сжимающим на метрическом пространстве $C_{\psi,\tau}$ с метрикой, которая порождена нормой $||\cdot||_\gamma$.

Покажем теперь, что неподвижная точка $y^* \in C_{\psi,\tau}$ оператора F является неотрицательной функцией. Для этого рассмотрим замкнутое подмножество $C^+_{\psi,\tau} \subset C_{\psi,\tau}$ состоящее из всех неотрицательных функций из $C_{\psi,\tau}$. По построению оператора F имеем, что $F : C^+_{\psi,\tau} \mapsto C^+_{\psi,\tau}$.

Пусть $y^{(1)} \in C^+_{\psi,\tau}$. Тогда последовательность функций $\{y^{(n)}(t)\}$, построенная по формуле

$$y^{(n+1)} = F(y^{(n)}), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

целиком лежит в $C^+_{\psi,\tau}$. Из теоремы Банаха о неподвижной точке сжимающего оператора следует, что последовательность $\{y^{(n)}(t)\}$ является фундаментальной и сходится к y^*, а так как множество $C^+_{\psi,\tau}$ замкнуто, то $y^* \in C^+_{\psi,\tau}$. □

Теорема 2. *Пусть выполнены все предположения относительно функций, входящих в уравнения системы (2), (3), и функционал β является глобально липшицевым с константой $L > 0$. Тогда решение системы (2), (3) на любом конечном промежутке $[0;\tau]$ непрерывным образом зависит от изменения функции ψ.*

Доказательство. Зафиксируем $\tau > 0$. Пусть $\psi^{(1)}, \psi^{(2)} \in C([-\omega;\tau], \mathbb{R})$. Этим функциям отвечают операторы $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$, совпадающие с оператором F при $\psi = \psi^{(1)}$ и $\psi = \psi^{(2)}$ соответственно, и решения $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ системы (7) при $F = F^{(1)}$ и $F = F^{(2)}$ соответственно.

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $||\psi^{(1)} - \psi^{(2)}|| < \delta$ следует неравенство $||y^{(1)} - y^{(2)}|| < \varepsilon$.

Пусть константа $\gamma > 0$ такова, что $\mu + \gamma > L$. Построим оценку разности $y^{(1)} - y^{(2)}$ в норме $||\cdot||_\gamma$. Для всех $t \in [-\omega; 0]$ выполнена оценка

$$e^{-\gamma\, t}\, |y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t)| = e^{-\gamma\, t}\, |\psi^{(1)}(t) - \psi^{(2)}(t)| < e^{\gamma\, \omega}\, \delta.$$

Для $t \in [0;\tau]$ запишем (опуская оценки, аналогичные оценкам теоремы 1)

$$\begin{aligned} e^{-\gamma\, t}\, |y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t)| &= e^{-\gamma\, t}\, |F^{(1)}(y^{(1)})(t) - F^{(2)}(y^{(2)})(t)| \\ &\leqslant e^{-\gamma t}\, |\psi^{(1)}(t) - \psi^{(2)}(t)| + e^{-\gamma t} \int_0^t P(t-s) e^{-\mu(t-s)} |\beta(y_s^{(1)}) - \beta(y_s^{(2)})|\, ds \\ &\leqslant \delta + q\, ||y^{(1)} - y^{(2)}||_\gamma, \end{aligned}$$

где константа $q \in (0;1)$ определена формулой (8). Собирая вместе оценки на обоих промежутках, получаем

$$||y^{(1)} - y^{(2)}||_\gamma < e^{\gamma\, \omega}\, \delta + \delta + q\, ||y^{(1)} - y^{(2)}||_\gamma.$$

Следовательно,

$$||y^{(1)} - y^{(2)}||_\gamma < \frac{e^{\gamma\, \omega} + 1}{1 - q}\, \delta.$$

Так как $e^{-\gamma\, \tau} ||y|| \leqslant ||y||_\gamma$ для всех $y \in C([-\omega, \tau], \mathbb{R})$, то

$$||y^{(1)} - y^{(2)}|| < \frac{e^{\gamma\, (\omega+\tau)} + e^{\gamma\, \tau}}{1 - q}\, \delta.$$

Выбирая

$$\delta = \frac{1 - q}{e^{\gamma\, (\omega+\tau)} + e^{\gamma\, \tau}}\, \varepsilon,$$

приходим к требуемому неравенству

$$||y^{(1)} - y^{(2)}|| < \varepsilon.$$

□

4. Корректность модели в случае ограниченности и локальной b-липшицевости функционала β

В этом и следующем разделах доказывается корректность модели (2), (3) при предположениях на β, не требующих глобальной липшицевости.

Определение 3. *Функционал β является ограниченным, если существует константа $b_\beta \geqslant 0$ такая, что для всех $z \in C(I_\omega, \mathbb{R})$ выполнено неравенство*

$$|\beta(z)| \leqslant b_\beta.$$

Определение 4. *Пусть $b > 0$ — некоторая константа. Функционал β называется локально b-липшицевым с константой $L_b > 0$, если для любых $z^{(1)}, z^{(2)} \in C(I_\omega, \mathbb{R})$, таких, что $||z^{(1)}|| \leqslant b$ и $||z^{(2)}|| \leqslant b$, выполнено неравенство*

$$|\beta(z^{(1)}) - \beta(z^{(2)})| \leqslant L_b \, ||z^{(1)} - z^{(2)}||.$$

Теорема 3. *Пусть $\tau > 0$, выполнены все предположения относительно функций, входящих в уравнения системы (2), (3), функционал β ограничен константой b_β и является локально b-липшицевым для некоторого $b > 0$, а функция ψ такова, что*

$$\sup_{t \in I_\omega} \psi(t) \leqslant b, \qquad \sup_{t \in [0;\tau]} \psi(t) \leqslant b - b_\beta \, J_{P,\mu}, \qquad J_{P,\mu} = \int_0^\sigma P(a) \, e^{-\mu \, a} \, da. \tag{9}$$

Тогда на промежутке $[0;\tau]$:

1) система (2), (3) имеет единственное решение, это решение неотрицательно и ограничено сверху константой b;

2) решение системы (2), (3) непрерывным образом зависит от изменения функции ψ, пока выполняются ограничения (9).

Доказательство. Рассмотрим систему (2), (3) на промежутке $[0;\tau]$ в форме (7), где оператор F определён равенствами (5), (6).

Выберем функцию ψ так, что выполнены ограничения (9) и докажем первое утверждение теоремы. Определим множество

$$C_{\psi,\tau,b} \subset C_{\psi,\tau} \subset C([-\omega;\tau], \mathbb{R}),$$

состоящее из всех таких функций $y \in C_{\psi,\tau}$, что $|y(t)| \leqslant b$, $t \in [-\omega;\tau]$. Множество $C_{\psi,\tau,b}$ замкнуто в $C([-\omega;\tau], \mathbb{R})$. Следовательно, оно является полным метрическим пространством во всех метриках, порождённых нормами $|| \cdot ||$ и $|| \cdot ||_\gamma$.

Покажем, что оператор F всякую функцию из $C_{\psi,\tau}$ отображает в $C_{\psi,\tau,b}$. Пусть $y \in C_{\psi,\tau}$. Тогда для $t \in [-\omega; 0]$,

$$|F(y)(t)| = \psi(t) \leqslant \sup_{t \in I_\omega} \psi(t) \leqslant b,$$

При $t \in [0;\tau]$ с учётом (9) имеем, что

$$|F(y)(t)| \leqslant \psi(t) + b_\beta \int_0^t P(a) \, e^{-\mu \, a} \, da \leqslant \sup_{t \in [0;\tau]} \psi(t) + b_\beta \, J_{P,\mu} \leqslant b.$$

Следовательно, $F(y) \in C_{\psi,\tau,b}$, и поэтому множество $C_{\psi,\tau,b}$ является инвариантным для оператора F.

Пусть $L_b > 0$ — это константа, с которой функционал β является b-липшицевым. Тогда для любых двух функций $y^{(1)}, y^{(2)} \in C_{\psi,\tau,b}$ и любого $t \in [0;\tau]$ будут выполнены неравенства

$$||y_t^{(1)}|| \leqslant b, \quad ||y_t^{(2)}|| \leqslant b, \quad |\beta(y_t^{(1)}) - \beta(y_t^{(2)})| \leqslant L_b\, ||y_t^{(1)} - y_t^{(2)}||.$$

Следовательно, на множестве $C_{\psi,\tau,b}$ для оператора F справедливы оценки, аналогичные оценкам, приведенным в теореме 1. Поэтому F является сжимающим оператором в метрическом пространстве $C_{\psi,\tau,b}$, метрика которого порождена нормой $||\cdot||_\gamma$, если константа γ такова, что $\mu + \gamma > L_b$. Норма $||\cdot||_\gamma$ определена равенством (1).

Принимая во внимание то, что оператор F всякую функцию из $C_{\psi,\tau}$ отображает в $C_{\psi,\tau,b}$, окончательно делаем вывод о том, что на промежутке $[0;\tau]$ система (2), (3) имеет единственное решение y^*. Это решение неотрицательно, так как $F : C^+_{\psi,\tau} \mapsto C^+_{\psi,\tau}$, и ограничено сверху константой b, так как $y^* \in C_{\psi,\tau,b}$.

Доказательство второй части этой теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 2 при условии, что для функций $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ выполняются ограничения (9). □

5. Корректность модели в случае ν-мажорируемости и локальной b-липшицевости функционала β

Определение 5. *Функционал β называется ν-мажорируемым, если существует определённая и неубывающая на I_ω функция ν такая, что для всех $z \in C(I_\omega, \mathbb{R})$ выполнено неравенство*

$$|\beta(z)| \leqslant p + \int_{-\omega}^{0} |z(\theta)|\, d\nu(\theta), \tag{10}$$

где $p \geqslant 0$ — некоторая константа. Интеграл в правой части неравенства (10) понимается в смысле Стилтьеса [15].

Теорема 4. *Пусть выполнены все предположения относительно функций, входящих в уравнения системы (2), (3), функционал β является ν-мажорируемым и локально b-липшицевым для всех $b > 0$. Тогда на любом конечном промежутке $[0;\tau]$:*

1) система (2), (3) имеет единственное решение $y^* \in C_{\psi,\tau}$, это решение неотрицательно и ограничено сверху экспоненциальной функцией

$$y^*(t) \leqslant c\, e^{\eta\, t}, \quad t \in [-\omega;\tau], \tag{11}$$

где $c \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$ — это любые константы, для которых выполнены неравенства

$$\psi(t) \leqslant c\, e^{\eta\, t}, \;\; t \in I_\omega, \tag{12}$$

$$\psi(t) \leqslant \frac{\mu + \eta - \Delta\nu}{\mu + \eta}\, c\, e^{\eta\, t} - p\, J_{P,\mu}, \quad t \in [0;\tau], \tag{13}$$

$$\Delta\nu = \nu(0) - \nu(-\omega), \quad J_{P,\mu} = \int_0^\sigma P(a)\, e^{-\mu\, a}\, da.$$

2) решение системы (2), (3) непрерывным образом зависит от изменения функции ψ.

Доказательство. Рассмотрим систему (2), (3) на промежутке $[0;\tau]$ в форме (7), где оператор F определён равенствами (5), (6).

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть c, η таковы, что выполнены неравенства (12), (13). Очевидно, что такие константы найдутся для любой функции ψ. Определим множество

$$C_{\psi,\tau,c,\eta} \subset C_{\psi,\tau} \subset C([-\omega;\tau],\mathbb{R}),$$

состоящее из всех таких функций $y \in C_{\psi,\tau}$, что $|y(t)| \leqslant c\,e^{\eta\,t}$, $t \in [-\omega;\tau]$. Множество $C_{\psi,\tau,c,\eta}$ замкнуто в $C([-\omega;\tau],\mathbb{R})$. Следовательно, оно является полным метрическим пространством во всех метриках, порождённых нормами $||\cdot||$ и $||\cdot||_\gamma$.

Покажем, что оператор F всякую функцию из $C_{\psi,\tau,c,\eta}$ отображает в $C_{\psi,\tau,c,\eta}$. Пусть $y \in C_{\psi,\tau,c,\eta}$. Тогда для $t \in [-\omega;0]$ в силу (12) имеем, что

$$|F(y)(t)| = \psi(t) \leqslant c\,e^{\eta\,t}.$$

Так функционал β является ν-мажорируемым, выполнено (13), $|y(t)| \leqslant c\,e^{\eta\,t}$, $c \geqslant 0$ и $\eta \geqslant 0$, то при $t \in [0;\tau]$ имеем, что

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leqslant \psi(t) + \int_0^t P(a)\,e^{-\mu\,a}|\beta(y_{t-a})|\,da \\
&\leqslant \psi(t) + \int_0^t P(a)\,e^{-\mu\,a}\left(p + \int_{-\omega}^0 |y_{t-a}(\theta)|\,d\nu(\theta)\right)da \\
&\leqslant \psi(t) + p\int_0^\sigma P(a)\,e^{-\mu\,a}\,da + \int_0^t P(a)\,e^{-\mu\,a}\int_{-\omega}^0 |y(t-a+\theta)|\,d\nu(\theta)\,da \\
&\leqslant \psi(t) + p\,J_{P,\mu} + \int_0^t P(a)\,e^{-\mu\,a}\int_{-\omega}^0 c\,e^{\eta\,(t-a+\theta)}\,d\nu(\theta)\,da \\
&= \psi(t) + p\,J_{P,\mu} + c\,e^{\eta\,t}\int_0^t P(a)\,e^{-(\mu+\eta)a}\int_{-\omega}^0 e^{\eta\,\theta}\,d\nu(\theta)\,da \\
&\leqslant \psi(t) + p\,J_{P,\mu} + c\,e^{\eta\,t}\,\Delta\nu\int_0^t P(a)\,e^{-(\mu+\eta)\,a}\,da \\
&\leqslant \psi(t) + p\,J_{P,\mu} + c\,e^{\eta\,t}\,\Delta\nu\int_0^t e^{-(\mu+\eta)\,a}\,da \\
&= \psi(t) + p\,J_{P,\mu} + c\,e^{\eta\,t}\,\frac{\Delta\nu}{\mu+\eta}(1 - e^{-(\mu+\eta)\,t}) \\
&\leqslant \psi(t) + p\,J_{P,\mu} + c\,e^{\eta\,t}\,\frac{\Delta\nu}{\mu+\eta} \\
&\leqslant \frac{\mu+\eta-\Delta\nu}{\mu+\eta}\,c\,e^{\eta\,t} - p\,J_{P,\mu} + p\,J_{P,\mu} + c\,e^{\eta\,t}\,\frac{\Delta\nu}{\mu+\eta} = c\,e^{\eta\,t}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $F(y) \in C_{\psi,\tau,c,\eta}$, и поэтому множество $C_{\psi,\tau,c,\eta}$ является инвариантным для оператора F.

Пусть $L_b > 0$ — это константа, с которой функционал β является b-липшицевым при $b = c\,\exp(\eta\,\tau)$. Тогда для любых двух функций $y^{(1)}, y^{(2)} \in C_{\psi,\tau,c,\eta}$ и любого $t \in [0;\tau]$ будут выполнены неравенства

$$||y_t^{(1)}|| \leqslant b, \quad ||y_t^{(2)}|| \leqslant b, \quad |\beta(y_t^{(1)}) - \beta(y_t^{(2)})| \leqslant L_b\,||y_t^{(1)} - y_t^{(2)}||.$$

Поэтому на множестве $C_{\psi,\tau,c,\eta}$ для оператора F справедливы все оценки теоремы 1, и F является сжимающим оператором на метрическом пространстве $C_{\psi,\tau,c,\eta}$ в норме $||\cdot||_\gamma$, если константа γ такова, что $\mu+\gamma > L_b$. Норма $||\cdot||_\gamma$ определена равенством (1).

Согласно теореме Банаха о неподвижной точке сжимающего оператора, существует единственная функция $y^* \in C_{\psi,\tau,c,\eta}$ такая, что $y^* = F(y^*)$. Функция y^* является решением системы (2), (3) на промежутке $[0;\tau]$. Это решение неотрицательно, так как $F : C^+_{\psi,\tau} \mapsto C^+_{\psi,\tau}$, и ограничено сверху экспоненциальной функцией (11), так как $y^* \in C_{\psi,\tau,c,\eta}$.

Докажем теперь, что в множестве $C_{\psi,\tau} \setminus C_{\psi,\tau,c,\eta}$ нет решений системы (2), (3). Пусть $y^\circ \in C_{\psi,\tau} \setminus C_{\psi,\tau,c,\eta}$ — решение системы (2), (3). Тогда существуют константы $c_1 \geqslant c$, $\eta_1 \geqslant \eta$ такие, что

$$|y^\circ(t)| \leqslant c_1\, e^{\eta_1 t}, \quad t \in [-\omega;\tau].$$

Последнее неравенство означает, что $y^\circ \in C_{\psi,\tau,c_1,\eta_1}$. Заметим, что если неравенства (12), (13) выполнены для c и η, то они также будут выполнены для c_1 и η_1. Так как функционал β является b-липшицевым при $b = c_1\, e^{\eta_1 \tau}$, то оператор F будет сжимающим в C_{ψ,τ,c_1,η_1} и будет иметь в этом множестве единственную неподвижную точку. Эта неподвижная точка будет решением системы (2), (3) и, поэтому, должна совпадать с y°. С другой стороны функция y^* также является неподвижной точкой оператора F и лежит в C_{ψ,τ,c_1,η_1}, так как $C_{\psi,\tau,c,\eta} \subset C_{\psi,\tau,c_1,\eta_1}$. Это противоречит единственности неподвижной точки. Следовательно, предположение о существовании решения системы (2), (3) в множестве $C_{\psi,\tau} \setminus C_{\psi,\tau,c,\eta}$ не верно. Первое утверждение теоремы доказано.

Доказательство второй части этой теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 2, если константы c, η выбрать так, чтобы неравенства (12), (13) выполнялись одновременно и для $\psi^{(1)}$, и для $\psi^{(2)}$. □

6. Уравнения модели в дифференциальной форме с распределённым запаздыванием

Предположим, что функция ψ — непрерывно дифференцируема на $[0;\infty)$, а функция дожития P имеет вид

$$P(a) = \int_a^\infty r(s)\, ds, \quad a \in [0;\infty), \tag{14}$$

где функция $r(s)$ неотрицательна и непрерывна на $[0;\infty)$, $r(s) = 0$ для всех $s \in [\sigma;\infty)$, $\int_0^\infty r(s)\, ds = 1$.

Пусть функция y непрерывна на $[-\omega;\infty)$ и удовлетворяет (2), (3). Функция P непрерывно дифференцируема, y_t — непрерывна, функционал β — непрерывен. Следовательно, к интегралу (4) применима формула Лейбница дифференцирования интеграла, зависящего от параметра. Продифференцируем по t

интеграл (4), используя при $t=0$ правостороннюю производную. Имеем, что

$$\frac{d}{dt}\int_0^t P(a)\,e^{-\mu\,a}\,\beta(y_{t-a})\,da = \frac{d}{dt}\Big(e^{-\mu t}\int_0^t P(t-s)e^{\mu s}\,\beta(y_s)\,ds\Big)$$

$$= -\mu\int_0^t P(a)\,e^{-\mu\,a}\,\beta(y_{t-a})\,da + e^{-\mu t}\,\frac{d}{dt}\int_0^t P(t-s)e^{\mu s}\,\beta(y_s)\,ds$$

$$= -\mu\int_0^t P(a)\,e^{-\mu\,a}\,\beta(y_{t-a})\,da + e^{-\mu t}\,\Big(P(0)e^{\mu t}\,\beta(y_t) - \int_0^t r(t-s)e^{\mu s}\,\beta(y_s)\,ds\Big)$$

$$= -\mu\int_0^t P(a)\,e^{-\mu\,a}\,\beta(y_{t-a})\,da + \beta(y_t) - \int_0^t r(a)e^{-\mu\,a}\,\beta(y_{t-a})\,da$$

$$= -\mu\big(y(t)-\psi(t)\big) + \beta(y_t) - \int_0^t r(a)e^{-\mu\,a}\,\beta(y_{t-a})\,da, \quad t\in[0;\infty).$$

Так как правая часть (2) дифференцируема справа на $[0;\infty)$, то функция y также дифференцируема справа на $[0;\infty)$. Продифференцируем по t уравнение (2) (при $t=0$, как и ранее, используем правостороннюю производную). Получим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt}(t) = \rho(t) + \beta(y_t) - \mu\,y(t) - \int_0^t r(a)e^{-\mu\,a}\,\beta(y_{t-a})\,da, \quad t\in[0;\infty), \tag{15}$$

$$\rho(t) = \frac{d\psi}{dt}(t) + \mu\,\psi(t), \quad t\in[0;\infty), \tag{16}$$

$$y(t) = \psi(t), \quad t\in I_\omega. \tag{17}$$

Интегрирование уравнения (15) по методу вариации постоянной с учетом (14) и (16), приводит к уравнению (2). Поэтому задача Коши (15)–(17) эквивалентна системе (2), (3) [12, 13].

Уравнение (15) является интегро-дифференциальным уравнением с распределенным запаздыванием.

Определение 6. *Функция $y\in C_{\psi,\tau}$, дифференцируемая справа на $[0;\tau)$ и удовлетворяющая уравнению (15) для всех $t\in[0;\tau)$, называется решением задачи Коши (15)–(17) на промежутке $[0;\tau)$.*

Так как задача Коши (15)–(17) эквивалентна системе (2), (3), то для нее справедливы теоремы 1, 2, 3, 4.

7. Уравнения модели в дифференциальной форме с постоянным (сосредоточенным) запаздыванием

В некоторых моделях живых систем часто используются дифференциальные уравнения по структуре близкие к (15), но имеющие постоянное (сосредоточенное) запаздывание. Предположим, что функция ψ — непрерывно дифференцируема на $[0;\infty)$ и выберем функцию дожития P в виде:

$$P(a)=1, \quad a\in[0;\sigma), \quad P(a)=0, \quad a\in[\sigma;\infty).$$

В этом случае система (2), (3) принимает вид:

$$y(t) = \psi(t) + \int_0^t e^{-\mu\,a}\,\beta(y_{t-a})\,da, \quad t\in[0;\sigma), \tag{18}$$

$$y(t) = \psi(t) + \int_0^\sigma e^{-\mu\, a}\, \beta(y_{t-a})\, da, \quad t \in [\sigma; \infty), \tag{19}$$

$$y(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega. \tag{20}$$

Пусть функция y непрерывна на $[-\omega; \infty)$ и удовлетворяет (2), (3). Так как функционал β — непрерывен, то интегралы в (18), (19) допускают дифференцирование по параметру t. Дифференцируя (18) по t (с использованием правосторонней производной при $t = 0$), получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt}(t) &= \frac{d\psi}{dt}(t) + \frac{d}{dt}\int_0^t e^{-\mu\, a}\, \beta(y_{t-a})\, da = \frac{d\psi}{dt}(t) + \frac{d}{dt}\left(e^{-\mu\, t}\int_0^t e^{\mu\, s}\, \beta(y_s)\, ds\right) \\
&= \frac{d\psi}{dt}(t) - \mu\, e^{-\mu\, t}\int_0^t e^{\mu\, s}\, \beta(y_s)\, ds + e^{-\mu\, t}\, e^{\mu\, t}\, \beta(y_t) \\
&= \frac{d\psi}{dt}(t) - \mu\int_0^t e^{-\mu\, a}\, \beta(y_{t-a})\, da + \beta(y_t) = \frac{d\psi}{dt}(t) - \mu\,(y(t) - \psi(t)) + \beta(y_t) \\
&= \frac{d\psi}{dt}(t) + \mu\, \psi(t) + \beta(y_t) - \mu\, y(t) = \rho(t) + \beta(y_t) - \mu\, y(t), \quad t \in [0; \sigma),
\end{aligned}$$

где функция ρ определена равенством (16). Дифференцируя (19) по t (с учетом правосторонней производной при $t = \sigma$), получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt}(t) &= \frac{d\psi}{dt}(t) + \frac{d}{dt}\int_0^\sigma e^{-\mu\, a}\, \beta(y_{t-a})\, da = \frac{d\psi}{dt}(t) + \frac{d}{dt}\left(e^{-\mu\, t}\int_{t-\sigma}^t e^{\mu\, s}\, \beta(y_s)\, ds\right) \\
&= \frac{d\psi}{dt}(t) - \mu\, e^{-\mu\, t}\int_{t-\sigma}^t e^{\mu\, s}\, \beta(y_s)\, ds + e^{-\mu\, t}\left(e^{\mu\, t}\, \beta(y_t) - e^{\mu\,(t-\sigma)}\, \beta(y_{t-\sigma})\right) \\
&= \frac{d\psi}{dt}(t) - \mu\,(y(t) - \psi(t)) + \beta(y_t) - e^{-\mu\, \sigma}\, \beta(y_{t-\sigma}) \\
&= \rho(t) + \beta(y_t) - \mu\, y(t) - e^{-\mu\, \sigma}\, \beta(y_{t-\sigma}), \quad t \in [\sigma; \infty).
\end{aligned}$$

В итоге приходим к задаче Коши

$$\frac{dy}{dt}(t) = \rho(t) + \beta(y_t) - \mu\, y(t), \quad t \in [0; \sigma), \tag{21}$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = \rho(t) + \beta(y_t) - \mu\, y(t) - e^{-\mu\, \sigma}\, \beta(y_{t-\sigma}), \quad t \in [\sigma; \infty). \tag{22}$$

$$\rho(t) = \frac{d\psi}{dt}(t) + \mu\, \psi(t), \quad t \in [0; \infty), \tag{23}$$

$$y(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega. \tag{24}$$

Определение 7. *Функция $y \in C_{\psi,\tau}$, дифференцируемая справа на $[0; \tau)$ и удовлетворяющая уравнениям (21), (22) для всех $t \in [0; \tau)$, называется решением задачи Коши (21)–(24) на промежутке $[0; \tau)$.*

Задача Коши (21)–(24) эквивалентна системе (2), (3). Поэтому для нее справедливы теоремы 1, 2, 3, 4.

Отметим, что уравнение (21) играет важную роль в корректности задачи. Действительно, если математическую модель строить на основе уравнения (22) без учета (21), то возникает задача Коши

$$\frac{dy}{dt}(t) = \rho(t) + \beta(y_t) - \mu\, y(t) - e^{-\mu\,\sigma}\,\beta(y_{t-\sigma}), \quad t \in [\sigma; \infty). \tag{25}$$

$$y(t) = y^{(0)}(t), \quad t \in [-\omega; \sigma], \tag{26}$$

где $y^{(0)}$ — произвольная неотрицательная и непрерывная на $[-\omega; \sigma]$ функция. Покажем, что система (25), (26) допускает решение, принимающее отрицательные значения. Пусть, например, функция ψ равна нулю при $t \geqslant \sigma$, $\beta(z) = k\, z(-\omega)$, $k > 0$ — некоторая константа, функция $y^{(0)}$ строго убывает, $y^{(0)}(-\omega) > 0$, $y^{(0)}(\sigma) = 0$. Подставим $t = \sigma$ в (25):

$$\frac{dy}{dt}(\sigma) = \rho(\sigma) + \beta(y_\sigma) - \mu\, y(\sigma) - e^{-\mu\,\sigma}\,\beta(y_{\sigma-\sigma}) = k\, y^{(0)}(\sigma - \omega) - e^{-\mu\,\sigma}\, k\, y^{(0)}(-\omega).$$

Поскольку $y^{(0)}(-\omega) > y^{(0)}(\sigma - \omega)$, то существует $\mu \geqslant 0$ такое, что

$$\frac{dy}{dt}(\sigma) = k\, \Big(y^{(0)}(\sigma - \omega) - e^{-\mu\,\sigma}\, y^{(0)}(-\omega)\Big) < 0.$$

Так как $y(\sigma) = y^{(0)}(\sigma) = 0$, то найдется $s > \sigma$, такое, что $y(t) < 0$ для всех $t \in (\sigma; s)$.

Аналогичный вывод справедлив и для модели (15)–(17), если ее изучать как задачу Коши

$$\frac{dy}{dt}(t) = \rho(t) + \beta(y_t) - \mu\, y(t) - \int_0^\sigma r(a) e^{-\mu\, a}\, \beta(y_{t-a})\, da, \quad t \in [\sigma; \infty), \tag{27}$$

$$y(t) = y^{(0)}(t), \quad t \in [-\omega; \sigma], \tag{28}$$

где $y^{(0)}$ — произвольная неотрицательная и непрерывная на $[-\omega; \sigma]$ функция.

Следовательно, модели вида (25)–(26) и (27)–(28) при произвольном задании начальных функций не являются корректными.

8. Заключение

Представленные результаты свидетельствуют о корректности модели живой системы, заданной в форме системы (2), (3). Среди установленных свойств решений этой модели наиболее важными являются существование, единственность и неотрицательность решений на любом конечном отрезке $[0; \tau]$ и, следовательно, на полуоси $[0; \infty)$. Эти свойства соответствуют биологическому смыслу переменной $y(t)$, описывающей количество элементов системы в момент времени $t \in \mathbb{R}$.

Еще одним важным результатом работы является структура уравнений модели в форме задачи Коши для дифференциального уравнения с запаздыванием, рассматриваемого на промежутках времени $[0; \sigma)$ и $[\sigma; \infty)$.

References

[1] S. Busenberg, K. Cooke, *The Effect of Integral Conditions in Certain Equations Modelling Epidemics and Population Growth*, J. Math. Biol., **10** (1980), 13–32. Zbl 0464.92022

[2] H. W. Hethcote, H. W. Stech, P. van den Driessche, *Stability analisys for models of diseases without immunity*, J. Math. Biol., **13** (1981), 185–198. Zbl 0475.92014

[3] J. Belair, *Lifespans in Population Models: Using Time Delay*, Lecture Notes in Biomathematics, New York: Springer, 1991, 16–27.

[4] W. G. Aiello, H. I. Freedman, J. Wu, *Analysis of a model representing stage–structured population growth with state–dependent time delay*, SIAM J. Appl. Math., **52**:3 (1992), 855–869. Zbl 0760.92018

[5] G. Bocharov, K. Hadeler, *Structured Population Models, Conservation Laws and Delay Equations*, J. Diff. Equ.,**168**:1 (2000), 212–237. Zbl 0972.34059

[6] G. Bocharov, F. Rihan, *Numerical modelling in biosciences using delay differential equations*, J. Comput. Appl. Math., **125** (2000), 183–199. Zbl 0969.65124

[7] N. V. Pertsev, *A two-sided estimates for solutions of a integro differential equation describing the process of hematopoiesis*, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, **6** (2001), 58–62. Zbl 1025.34082

[8] T. Luzyanina, D. Roose, G. Bocharov, *Numerical bifurcation analysis of immunological models with time delays*, J. Comput. Appl. Math., **184** (2005), 165–176. Zbl 1072.92025

[9] N. V. Pertsev, B. Y. Pichugin, A. N. Pichugina, *Investigation of an asymptotic behavior of solutions of some epidemic processes models*, The Mathematical Biology and Bioinformatics, **8**:1 (2013), 21–48.

[10] G. Fan, H. R. Thieme, H. Zhu, *Delay differential systems for tick population dynamis*, J. Math. Biol., **71** (2015), 1071–1048. Zbl 06498038

[11] M. A. Krasnoselskiy, G. M. Vainikko, P. P. Zabreiko, J. B. Rutitskiy, V. J. Stretsko, *Approximate solution of operator equations*, M.: Nauka, 1969.

[12] V. B. Kolmanovskiy, V. R. Nosov, *Stability and periodic modes of a controlled systems with aftereffect*, M.: Nauka, 1981. Zbl 0457.93002

[13] J. Hale, *The theory of functional–differential equations*, M.: Mir, 1984. Zbl 0662.34064

[14] Y. L. Daletskiy, M. G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach spaces*, M.: Nauka, 1970.

[15] I. P. Natanson, *The theory of functions of a real variable*, M.: Gosudarstvennoe izdatelstvo techniko–teoreticheskoj literatury, 1957.

Nikolay Viktorovitch Pertsev
Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova st., 13,
644043, Omsk, Russia
E-mail address: homlab@ya.ru

Boris Yurievich Pichugin
Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova st., 13,
644043, Omsk, Russia
E-mail address: boris.pichugin@gmail.com

Anna Nikolayevna Pichugina
Omsk State University,
pr. Mira, 55A,
644077, Omsk, Russia
E-mail address: anna.pichugina@gmail.com