S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 829–848 (2016) УДК 517.988.68

DOI 10.17377/semi.2016.13.066 MSC 65J20

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОРОГОВОГО (КОРРЕЛЯЦИОННОГО) МЕТОДА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ЛОКАЛИЗАЦИИ ОСОБЕННОСТЕЙ

Д.В. КУРЛИКОВСКИЙ, А.Л. АГЕЕВ, Т.В. АНТОНОВА

Abstract. The localization of singularities for functions of one (δ-functions and discontinuities of the first kind) and two (line of discontinuity) dimensions is discussed. General scheme of the study of this ill-posed problems is presented. Using this scheme new problems of localization of singularities are investigated.

Keywords: ill-posed problems, discontinuities of the first kind, line of discontinuity, localization of singularities, regularizing method, separation threshold.

1. Введение

Во многих прикладных исследованиях требуется локализовать (т. е. определить положение) особенностей зашумленной функции одной или двух переменных, или функции, являющейся решением одномерного или двумерного интегрального уравнения 1-го рода. В качестве особенностей функции одной переменной рассматриваются δ-функции, разрывы первого рода или изломы (разрывы производной). Такие задачи встречаются, например, в спектроскопии [1, 2], астрономии [3], медицине [4, 5], технике [6]. В двумерном случае возникают задачи локализации линий разрыва, т. е. линий на которых измеряемая функция двух переменных терпит разрыв, а вне линий функция является

Kurlikovskii, D.V., Ageev, A.L., Antonova, T.V. Research of a threshold (correlation) method and application for localization of singularities.

Работа поддержана РФФИ (грант №15-01-00629а) и комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект №15-16-1-14).

Поступила 29 декабря 2015 г., опубликована 7 октября 2016 г.

гладкой. Важность задач локализации линий разрыва вызвана тем, что границы объектов на изображениях часто являются линиями разрыва [7] (см. также [3, 6, 8, 9, 13, 14]).

Проблема заключается в том, что для многих типов возмущений обсуждаемая задача некорректно поставлена [10, 11, 12], поскольку количество и положение особенностей, определяемые по зашумленным данным, могут как угодно сильно отличаться от искомых количества и положения особенностей неизвестной точной функции[1]. Следовательно, для решения задач локализации необходимо строить регуляризирующие алгоритмы. В цикле работ [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21] был предложен и теоретически исследован широкий класс регулярных методов усреднения для решения некорректно поставленных задач локализации особенностей. Ядром всех этих алгоритмов является нелинейный пороговый метод[2], который применяется к вспомогательной функции, строящейся для каждой из рассматриваемых задач. Во всех вышеуказанных работах приходилось приводить в сущности одно и то же доказательство, обосновывающее работоспособность порогового метода и позволяющее получить оценки точности локализации. Естественно попытаться предложить общую схему исследования порогового метода, позволяющую избежать дублирования. Для части задач локализации особенностей функции одной переменной такая схема была создана в [14]. В настоящей работе предлагается новая более общая схема, подходящая для всех алгоритмов из работ [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. В качестве приложения данной схемы в статье изучены две новые задачи локализации особенностей (для функций одной и двух переменных) и для них получены оценки характеристик методов локализации.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 выписаны условия, которым должна удовлетворять вспомогательная функция F^δ, приводится пороговый метод локализации и доказывается общее утверждение о его сходимости и оценке точности аппроксимации особенностей. В данном разделе предполагается, что a priori для вспомогательной функции F^δ вне окрестностей особенностей известна оценка сверху, а в положениях особенностей известна оценка снизу. Эти оценки, в частности, справедливы для всех рассматриваемых задач [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. Отдельно сформулировано и доказано утверждение в частном случае, когда F^δ имеет специальный вид (справедливо основное разложение). Раздел 3 посвящён задаче локализации положения δ-функций, входящих в решение уравнения 1-го рода типа свертки, имеющее фон из $L_1(\mathbb{R})$. Раздел 4 включает результаты по задаче локализации линий разрыва функции двух переменных.

2. Исследование порогового метода

Приведем два известных примера [14] задач локализации особенностей (численный и теоретический), в которых проводится построение вспомогательной функции, и на которых иллюстрируется идея порогового метода.

---

[1] Например, ясно, что любую функцию одной или двух переменных из $L_2(\mathbb{R})$ или $L_2(\mathbb{R}^2)$ можно как угодно точно приблизить в соответствующей метрике бесконечно дифференцируемой функцией, не имеющей разрывов (это следует, в частности, из теоремы Планшереля [23, стр. 24]).

[2] В прикладных исследованиях такой метод часто называют корреляционным, хотя вероятностная интерпретация метода не приводится.

Пример 1. Пусть точная функция $f(x)$ (см. рис.1) имеет пять разрывов первого рода в точках $x_1 = -4,\ x_2 = -3.96,\ x_3 = 0,\ x_4 = 3.7,\ x_5 = 4$. Опишем процедуру дискретизации функции f. Исходную точную функцию строим на отрезке $[-6, 6]$. На этом отрезке выберем равномерную сетку x^j с шагом 0.001. Возмущение моделируем с помощью гауссовой некоррелированной случайной величины ξ: $f^{\delta j} = f(x^j) + \xi_j,\ j = 1, 2, \ldots, N$, где ξ_j — реализация случайной величины ξ. Относительную погрешность возмущения будем вычислять по формуле $n = \sqrt{D\xi}/\|f\| \times 100\%$, где $D\xi$ — дисперсия случайной величины ξ; математическое ожидание $M_\xi = 0$; $\|\cdot\|$ — дискретный аналог нормы $L_2[-6, 6]$. Требуется по набору $f^{\delta j},\ j = 1, 2, \ldots, N$, определить количество и аппроксимировать положение точек разрыва $x_k, k = 1, 2, \cdots, 5$, функции f.

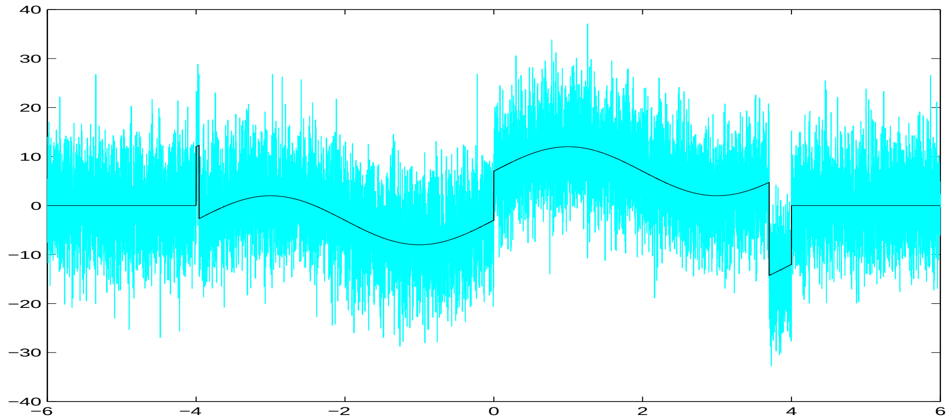

Рис. 1. Точная функция f, имеющая пять разрывов 1-го рода, и зашумленные статистическим шумом значения функции $f^{\delta j}$ при $n = 35\%$.

Положим $\varphi_\lambda(x) = \varphi(x/\lambda)$, $\quad \varphi(x) = \exp(-x^2/2)$, $\lambda > 0$ — параметр регуляризации. Договоримся для упрощения записи вместо $(\phi_\lambda(t))'_t|_{t=u}$ писать $\phi'_\lambda(u)$. Для решения данной задачи построим вспомогательную функцию

$$F^\delta_\lambda(x^m) = 0.001 \sum_{j=1}^{N} f^{\delta j} \varphi'_\lambda(x^m - x^j), \qquad m = 1, 2, \cdots, N.$$

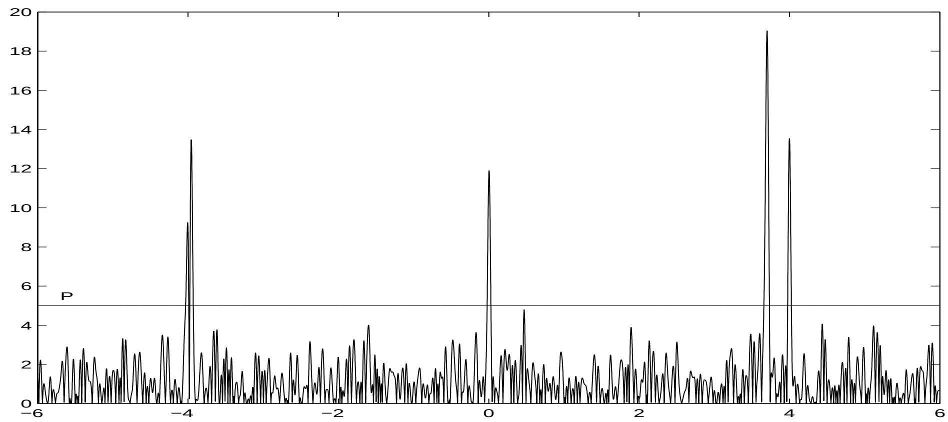

Рис. 2. Модуль вспомогательной функции $|F^\delta_\lambda|$ при $\lambda = 0.09$ и прямая линия, соответствующая порогу $P = 5$.

В данном примере для фиксированного уровня погрешности $\sqrt{D\xi}$ удалось подобрать параметр регуляризации $\lambda = 0.09$ и порог $P = 5$ такие, что в окрестностях точек разрыва $\{x_k\}_1^5$ функция $|F_\lambda^\delta|$ имеет пики, превышающие порог P, а вне окрестностей точек $\{x_k\}_1^5$ функция $|F_\lambda^\delta|$ меньше порога P. Идея порогового метода заключается в том, что локальные максимумы x_k^δ модуля вспомогательной функции аппроксимируют точки разрыва x_k (см. рис. 2).

Чтобы проиллюстрировать возможность теоретического обоснования порогового метода и получение оценок точности аппроксимации $|x_k^\delta - x_k|$, рассмотрим пример с детерминированным шумом.

Пример 2. Пусть функция f имеет конечное число l разрывов первого рода в точках $\{x_k\}_1^l$, вне которых функция достаточно гладкая и имеет соответствующие пределы $f(x_k+0),\ f(x_k-0)$. Обозначим скачок функции f в точке x_k через $\Delta_k = f(x_k+0) - f(x_k-0)$. Определим линейное пространство MW_2^1 функций f, удовлетворяющих следующим условиям[3]:

(i) функция f и ее производная f' принадлежат $L_2 := L_2(\mathbb{R})$;

(ii) на любом конечном отрезке таком, что соответствующий интервал не содержит точек разрыва, функция f абсолютно непрерывна.

Постановка задачи. Пусть функция $f \in MW_2^1$. Требуется по известной функции $f^\delta \in L_2$ и уровню погрешности δ таким, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \le \delta$, определить число l и аппроксимировать положение разрывов $\{x_k\}_1^l$.

Для вспомогательной функции

$$F_\lambda^\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^\delta(t)\varphi'_\lambda(x-t)dt$$

справедливо [14] *основное разложение*

$$F_\lambda^\delta(x) = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \varphi_\lambda(x - x_k) + \alpha_\lambda(x) + \Delta F_\lambda^\delta(x),$$

где функции $\alpha_\lambda(x)$, $\Delta F_\lambda^\delta(x)$ удовлетворяют оценкам

$$\sup_x |\alpha_\lambda(x)| \le A_0 \lambda^{1/2}, \qquad \sup_x |\Delta F_\lambda^\delta(x)| \le A_1 \delta \lambda^{-1/2}, \tag{1}$$

$$A_0 = \|f'\|_{L_2} \|\varphi\|_{L_2}, \qquad A_1 = \|\varphi'\|_{L_2}.$$

Легко подобрать [14] (см. также лемму 2 настоящей работы) зависимость параметра регуляризации $\lambda = \lambda(\delta)$ и порог P так, чтобы для всех достаточно малых δ величина $\sup_x |\alpha_\lambda(x) + \Delta F_\lambda^\delta(x)|$ была мала. При этом качественно будет возникать ситуация, изображенная на рис. 2. Определяя интервалы, на которых модуль функции F_λ^δ больше P, можно получить оценки точности локализации положения разрывов.

Построение вспомогательной функции и её основного разложения для каждой задачи локализации особенностей требует индивидуального подхода. Для задачи, рассматриваемой в примере 2, и для других задач локализации особенностей зашумленной функции одной переменной оценки (1) являются степенными. Однако, например, в задаче локализации особенностей решения одномерного интегрального уравнения 1-го рода [14] оценка третьего слагаемого в

[3] Возможно обобщить это определение для случая счётного числа разрывов [14].

основном разложении имеет не степенной характер. Ещё более сложная ситуация в случае двумерных задач, поскольку, к сожалению, аналогичное разложение вспомогательной функции получить не удаётся. Тем не менее, в настоящей работе все эти случаи включены в общую схему.

Перейдем к основному содержанию этого пункта. Рассмотрим абстрактную задачу аппроксимации точек $\{x_k\}_1^l$ по параметрическому семейству непрерывных функций $F^\delta(x)$, $x \in \mathbb{R}$, зависящих от δ (впоследствии — уровня погрешности измерений).

Предполагается, что при фиксированном δ функция F^δ устроена следующим образом (см. примеры 1, 2): существует конечный набор непересекающихся интервалов (содержащих точки x_k), вне которых модуль функции F^δ принимает заведомо малые значения, меньше некоторого порога P, а в точках x_k функция $|F^\delta|$ принимает значения бо́льшие, чем P. Иными словами, функция $|F^\delta|$ в окрестности каждой точки x_k должна иметь локальный максимум (пик), превышающий порог P. Такое поведение функции F^δ позволяет применить к ней пороговый метод для определения приближений x_k^δ к положениям x_k и выписать оценки точности их аппроксимации.

Приведем точную формулировку условий, которым должна удовлетворять вспомогательная функция F^δ при фиксированном δ, для применения порогового метода.

(F) При любом $\delta > 0$ функция $F^\delta(x)$ непрерывна; для заданного множества точек $\{x_k\}_1^l$ существует константа $P > 0$ и положительная функция $h(\delta)$: $h(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, такие, что функция F^δ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$(2) \qquad |F^\delta(x)| < P \text{ для любого } x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^{l} \{x \in \mathbb{R}\colon |x - x_k| < h(\delta)\};$$

$$(3) \qquad |F^\delta(x_k)| > P \text{ для всех } k = 1, 2, \ldots, l.$$

Перейдем к изложению порогового метода. Предположим, что нам известен интервал $(-w, w), w > 0$, содержащий все искомые положения $\{x_k\}_1^l$. Метод выделяет непересекающиеся отрезки $[a_k, b_k]$, на которых функция $|F^\delta|$ больше порога P. Середины x_k^δ этих отрезков будут аппроксимировать точки x_k. При этом количество отрезков m совпадает с числом особенностей l при достаточно малом δ.

Метод П. *Положим начальное* $\tilde{x} := -w - 3h(\delta)$, $m := 0$.

Цикл: если уравнение $|F^\delta(x)| - P = 0$ *на отрезке* $[\tilde{x}, w]$ *не имеет корней, то выходим из цикла; иначе наименьший корень обозначим* $\bar{x}$, *положим* $m := m + 1$, $a_m := \bar{x}$, $b_m := \bar{x} + h(\delta)$, $x_m^\delta := (a_m + b_m)/2$, $\tilde{x} := b_m + h(\delta)$ *и повторим итерацию цикла.*

Покажем, что применение порогового метода **П** к функции F^δ, удовлетворяющей условию **(F)**, позволяет локализовать $\{x_k\}_1^l$ с оценкой точности аппроксимации.

Заметим, что существуют [14, 17] разные варианты порогового метода, отличающиеся, в том числе, по точности локализации: вместо середины отрезка $[a_k, b_k]$ в качестве приближения x_k^δ можно брать точку максимума функции $|F^\delta|$ на отрезке $[a_k, b_k]$ или выражение, вычисляемое по максимуму и минимуму функции F^δ.

Для всех вариантов порогового метода нетрудно получить аналог следующей леммы [14].

Лемма 1. *Пусть для функции F^δ выполнено условие* (**F**). *Тогда для всех $\delta > 0$ при выполнении неравенства $\min\limits_{k \neq j} |x_k - x_j| \geq 3h(\delta)$ для метода $\mathbf{\Pi}$ получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k^\delta - x_k| \leq h(\delta)/2$.*

Доказательство. Для простоты изложения доказательство проведем при $l{=}2$, т. е. метод $\mathbf{\Pi}$ должен сделать два шага и на каждом шаге выделить интервал, содержащий одну точку x_k. Для произвольного l доказательство проводится аналогично, при этом метод $\mathbf{\Pi}$ должен сделать l шагов. Без ограничения общности будем считать, что $x_1 < x_2$. Возьмем и зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Положим $h := h(\delta)$. По условию леммы $x_2 - x_1 \geq 3h$.

Ввиду оценок (2), (3) и непрерывности функции $|F^\delta|$, в методе $\mathbf{\Pi}$ найдется точка $\bar{x}$, для которой $|F^\delta(\bar{x})| = P$. Значит, $\bar{x} \in \Omega$, т. е. $|\bar{x} - x_1| < h$, так как $x_1 < x_2$. А поскольку из (3) следует, что $|F^\delta(x_1)| > P$, то $x_1 > \bar{x}$. Следовательно, $x_1 \in [\bar{x}, \bar{x} + h] = [a_1, b_1]$.

Рассмотрим отрезок $[b_1 + h, w]$. Он не содержит точек x таких, что $|x - x_1| \leq h$. С другой стороны, так как $x_2 - x_1 \geq 3h$ (т. е. $x_1 + 2h \leq x_2 - h$) и $b_1 < x_1 + h$, то $b_1 + h < x_1 + 2h \leq x_2 - h$. Следовательно, наименьший корень $\bar{x}$ уравнения $|F^\delta(x)| = P$ на отрезке $[b_1 + h, w]$ строго меньше x_2, при этом $|\bar{x} - x_2| < h$, т. е. $\bar{x} \in \Omega$. А в силу (3) $x_2 \in [\bar{x}, \bar{x} + h] = [a_2, b_2]$.

Поскольку $b_1 + h < x_2 - h$ и $x_2 - h < a_2$, то $a_2 - b_1 > x_2 - h - b_1 > h > 0$, т. е. отрезки $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ разделяются.

Рассмотрим отрезок $[b_2 + h, w]$. Ясно, что он не содержит точек множества Ω, и, следовательно, уравнение $|F^\delta(x)| = P$ на этом отрезке не имеет корней. Таким образом, $m = 2$, и процесс завершен.

Пусть x_k^δ — середина отрезка $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2$. Поскольку для всех точек $x \in [a_k, b_k]$ имеем $|x - x_k| \leq h$, то для середины отрезка справедлива оценка $|x_k^\delta - x_k| \leq h/2$. □

Таким образом, лемма 1 утверждает, что при выполнении условия **(F)** на функцию F^δ, метод $\mathbf{\Pi}$ правильно определит число особенностей (т. е. $m = l$) и выдаст приближения x_k^δ для аппроксимации положений особенностей x_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, с погрешностью аппроксимации $h(\delta)/2$.

Рассмотрим частный случай. Приведем достаточные условия на функцию F^δ, при котором выполняется условие **(F)** и, следовательно, можно применить пороговый метод локализации особенностей. Пусть для заданного множества точек $\{x_k\}_1^l$ существует набор чисел $\{\Delta_k\}_1^l$ и непрерывная функция $\varphi(x)$ такие, что для вспомогательной функции F^δ имеет место оценка

$$(4)\quad \left| F^\delta(x) - \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \varphi_\lambda(x - x_k) \right| \leq \delta^\mu \eta_1(\lambda) + \eta_2(\lambda), \qquad \varphi_\lambda(x) = \varphi(x/\lambda), \quad \lambda > 0,$$

где μ — положительный числовой параметр; $\eta_1(\lambda)$, $\eta_2(\lambda)$ — непрерывные функции с областью определения $\lambda > 0$; $\eta_1(\lambda)$ монотонно стремится к ∞ при $\lambda \to 0$; $\eta_2(\lambda)$ монотонно стремится к 0 при $\lambda \to 0$.

Эта оценка имеет место для вспомогательной функции в задачах локализации особенностей функции одной переменной [14, 15, 16, 17, 20, 21].

Покажем, что оценка (4) при правильно выбранной связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ и подходящей функции φ гарантирует выполнение условия **(F)** для функции F^δ.

Пусть функция $\varphi(x)$ обладает свойствами

(a) $\varphi \in C(\mathbb{R})$;

(b) $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |\varphi(x)| = \varphi(0) = 1$;

(c) для $x \notin (-1,1)$ $|\varphi(x)| \leq C/|x|$, C — константа.

Множество функций со свойствами (a)–(c) обозначим через Φ. Заметим, что аналогично можно рассматривать другие классы функций.

Перейдем от индивидуальной функции F^δ, как в лемме 1, к совокупности функций $\{F^\delta\}$, определяемой с помощью положительных констант L, $\Delta^{\min}$, $\Delta^{\max}$ и оценок

$$0 < l \leq L; \qquad \Delta^{\min} \leq |\Delta_k| \leq \Delta^{\max},\ k = 1, 2, \ldots, l. \tag{5}$$

В дальнейшем нам понадобится ряд констант и функций. Пусть λ_0 является корнем уравнения

$$\eta_2(\lambda_0) = \frac{\Delta^{\min}}{8}.$$

Положим

$$\delta_0 = \left(\frac{\Delta^{\min}}{8\eta_1(\lambda_0)}\right)^{1/\mu}. \tag{6}$$

Выберем $\lambda = \lambda(\delta)$ при фиксированном $\delta \leq \delta_0$ как наименьший корень уравнения

$$\delta^\mu \eta_1(\lambda) = \frac{\Delta^{\min}}{8}. \tag{7}$$

Ясно, что $\lambda(\delta)$ является монотонно возрастающей функцией при $\delta \leq \delta_0$ и $\lambda(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. В частности, для каждого $\delta \leq \delta_0$ получим $\lambda(\delta) \leq \lambda_0$. Положим

$$d = \frac{6L\Delta^{\max}\tilde{C}}{\Delta^{\min}}, \qquad \tilde{C} = \max\left\{C,\ \frac{\Delta^{\min}}{6L\Delta^{\max}}\right\}, \tag{8}$$

и выберем функцию $h(\delta) = d\lambda(\delta)$. Ясно, что константа $d \geq 1$, и $h(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Лемма 2. *Пусть для непрерывной функции F^δ имеет место оценка* (4) *с условиями* (5) *и функция $\varphi \in \Phi$. Тогда для всех $\delta \leq \delta_0$ при связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ и выполнении неравенства $\min\limits_{k\neq j} |x_k - x_j| \geq 3h(\delta)$ для метода* $\mathbf{\Pi}$ *получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k^\delta - x_k| \leq h(\delta)/2$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное значение $\delta \leq \delta_0$; положим $\lambda = \lambda(\delta)$. Покажем, что для функции F^δ выполняется условие **(F)**. Отметим, что указанный выше выбор $\lambda = \lambda(\delta)$ и δ_0 гарантирует выполнение оценки

$$\delta^\mu \eta_1(\lambda) + \eta_2(\lambda) \le \frac{\Delta^{\min}}{4}.$$

Для точек, не принадлежащих множеству $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{l} \{x \in \mathbb{R}\colon |x - x_k| < h(\delta)\}$, используя оценку (4), условие (5) и условие (c) на функцию φ, с учетом (8) имеем

$$\begin{aligned} |F^\delta(x)| &= \sum_{k=1}^{l} |\Delta_k||\varphi_\lambda(x - x_k)| + \delta^\mu \eta_1(\lambda) + \eta_2(\lambda) \\ &\le \frac{\Delta^{\min}}{4} + \frac{LC\Delta^{\max}}{d} \le \frac{5\Delta^{\min}}{12} < \frac{\Delta^{\min}}{2}. \end{aligned}$$

Теперь получим оценку снизу для функции $|F^\delta(x)|$ в точках x_k. Используя оценку (4), условие (5) и условие (b) на функцию φ, имеем

$$|F^\delta(x_k)| \ge \Delta^{\max} - \delta^\mu \eta_1(\lambda) - \eta_2(\lambda) - \Bigg| \sum_{i=1 (i \ne k)}^{l} \Delta_i \varphi_\lambda(x - x_i) \Bigg|. \tag{9}$$

Ввиду условия (c) на функцию φ и условия $\min\limits_{k \ne j} |x_k - x_j| \ge 3h(\delta)$, при всех x таких, что $|x - x_k| < h(\delta)$ для последнего слагаемого в (9) имеем оценку

$$\Bigg| \sum_{i=1 (i \ne k)}^{l} \Delta_i \varphi_\lambda(x - x_i) \Bigg| \le \frac{(L-1)C\Delta^{\max}}{d}.$$

Таким образом, для $k = 1, 2, \ldots, l$ имеем

$$|F^\delta(x_k)| \ge \Delta^{\min} - \frac{\Delta^{\min}}{4} - \frac{(L-1)C\Delta^{\max}}{d} > \Delta^{\min} - \frac{5\Delta^{\min}}{12} > \frac{\Delta^{\min}}{2}.$$

Следовательно, для функции F^δ оценки в условии **(F)** выполнены при $P = \Delta^{\min}/2$. Применяя лемму 1, получаем заключение настоящей леммы. □

В следующих разделах рассматриваются примеры конкретных задач, которые вкладываются в общую схему, описанную в разделе 2. В каждой задаче нашей целью будет построение вспомогательной функции, для которой применимы лемма 1 или лемма 2.

3. Локализация положения δ-функций решения интегрального уравнения 1-го рода типа свертки

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с оператором типа свертки

$$[Af](t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K(t - x) f(x) dx = g(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Здесь $K \in L_1 := L_1(\mathbb{R})$ известная функция, $f \in DL$, где DL — неклассическое пространство функций с особенностями:

$$DL = \left\{ f(x) = f_0(x) + \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \delta(x - x_k),\ f_0 \in L_1 \cap L_\infty \right\}, \qquad L_\infty := L_\infty(\mathbb{R}).$$

Определим действие оператора A в уравнении (10) на множестве функций DL формулой

$$[Af](t) \equiv \sum_{k=1}^{l} \Delta_k K(t-s_k) + \int_{-\infty}^{\infty} K(t-s)\, f_0(s)\, ds. \tag{11}$$

Поскольку функция K принадлежит L_1, то правая часть уравнения (10) принадлежит L_1 и оператор $A\colon DL \to L_1$.

Постановка задачи. Пусть точное решение f уравнения (10) принадлежит множеству DL и известна следующая дополнительная априорная информация:

– задано число $r > 0$ такое, что $\|f_0\|_{L_\infty} \le r$ (без ограничения общности будем считать, что $r = 1$);

– заданы положительные числа L, $\Delta^{\min}$ и $\Delta^{\max}$ такие, что

$$0 < l \le L; \qquad \Delta^{\min} \le |\Delta_k| \le \Delta^{\max},\ k = 1, 2, \ldots, l.$$

Требуется по известной функции $g^\delta \in L_1$ и уровню погрешности δ таким, что $\|g - g^\delta\|_{L_1} \le \delta$, определить число l и аппроксимировать точки $\{x_k\}_1^l$ с оценкой точности аппроксимации.

Рассматриваемая задача является некорректно поставленной, поскольку при фиксированном уровне погрешности $\delta > 0$ всегда можно заменить δ-функции узкими длинными пиками, т. е. точное решение уравнения (10) с правой частью g^δ вообще не будет содержать δ-функций ($l = 0$).

Построим непрерывную вспомогательную функцию для рассматриваемой задачи по формуле

$$F_\lambda^\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^\delta(t) f_\lambda(t-x) dt, \qquad \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

где функция $f_\lambda \in L_\infty$ является решением сопряженного уравнения[4]

$$[A^* f_\lambda](x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-x) f_\lambda(t) dt = \varphi_\lambda(-x), \qquad \varphi_\lambda(x) = \varphi(x/\lambda), \quad \lambda > 0. \tag{13}$$

Предполагаем, что усредняющая функция φ выбрана из множества $\Phi[K]$ функций, удовлетворяющих условиям:

– $\varphi \in L_1 \cap \Phi$;

– $\forall \lambda > 0 \exists f_\lambda \in L_\infty : [A^* f_\lambda](x) = \varphi'_\lambda(-x)$ и f_λ равномерно непрерывна.

Оператор A^* действует из L_∞ в L_1, т. е. функция f_λ принадлежит L_∞. Отметим, что в таком случае функция φ будет принадлежать $C(\mathbb{R})$ в силу [22, стр.256, п.3.9.6].

Следующая лемма вытекает из [22, стр.256, п.3.9.6].

Лемма 3. *Пусть $f_\lambda \in L_\infty$, $g^\delta \in L_1$. Тогда функция F_λ^δ, определенная равенством* (12)*, непрерывна и ограничена.*

---

[4]С формальной точки зрения оператор A^* в рассматриваемых пространствах не является сопряженным, но, допуская вольность речи, будем называть его так.

Лемма 4. *Пусть функция φ принадлежит классу $\Phi[K]$. Тогда для любых $\lambda, \delta > 0$ и непрерывной функции F_λ^δ, определенной формулой* (12), *имеет место оценка* (4)

$$\left| F_\lambda^\delta(x) - \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \varphi_\lambda(x - x_k) \right| \le \delta^\mu \eta_1(\lambda) + \eta_2(\lambda),$$

где $\mu = 1,\ \eta_1(\lambda) = \|f_\lambda\|_{L_\infty},\ \eta_2(\lambda) = A_0\lambda,\ A_0 = \|\varphi\|_{L_1}$.

Доказательство. Запишем функцию F_λ^δ в виде суммы двух функций $F_\lambda^\delta = F_\lambda + \Delta F_\lambda^\delta$, где

$$F_\lambda(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_\lambda(t - x)dt, \qquad \Delta F_\lambda^\delta(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (g^\delta(t) - g(t)) f_\lambda(t - x)dt.$$

Оценим модуль функции ΔF_λ^δ следующим образом:

$$|\Delta F_\lambda^\delta| \le \|g^\delta(t) - g(t)\|_{L_1} \sup_t |f_\lambda(t)| \le \delta \|f_\lambda\|_{L_\infty}.$$

Положим

$$F_\lambda(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau) f(\tau) d\tau \right) f_\lambda(t - x)dt \tag{14}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau) f_0(\tau) d\tau \right) f_\lambda(t - x)dt + \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t - x_k) f_\lambda(t - x)dt.$$

Меняя порядок интегрирования в первом слагаемом в правой части (14), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau) f_0(\tau) d\tau \right) f_\lambda(t - x)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(\tau) \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t-\tau) f_\lambda(t - x)dt \right) d\tau$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(\tau) \varphi_\lambda(x - \tau) d\tau.$$

Введем обозначение

$$\alpha_\lambda(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(\tau) \varphi_\lambda(x - \tau) d\tau.$$

Ввиду того, что $\|f_0\|_{L_\infty} \le 1$ и $\|\varphi_\lambda\|_{L_1} = \lambda \|\varphi\|_{L_1}$, имеем

$$\sup_x |\alpha_\lambda(x)| \le \sup_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_0(\tau)| \cdot |\varphi_\lambda(x - \tau)| d\tau \le \|f_0\|_{L_\infty} \|\varphi_\lambda\|_{L_1} \le \lambda \|\varphi\|_{L_1}.$$

Поскольку для интеграла во втором слагаемом в правой части (14) имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t - x_k) f_\lambda(t - x)dt = \varphi_\lambda(x - x_k),$$

то лемма доказана. $\square$

Пусть функция $\bar{\eta}(\lambda)$ такова, что выполнено неравенство $\eta_1(\lambda) \le \bar{\eta}(\lambda)$, причем $\bar{\eta}(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to 0$. Положим

$$\delta_0 = \frac{\Delta^{\min}}{8\bar{\eta}(\Delta^{\min}/(8A_0))}, \qquad d = \frac{6L\Delta^{\max}\tilde{C}}{\Delta^{\min}}, \qquad \tilde{C} = \max\left\{C,\, \frac{\Delta^{\min}}{6L\Delta^{\max}}\right\}.$$

Пусть $\lambda(\delta)$ наименьший корень уравнения

$$\delta\bar{\eta}(\lambda(\delta)) = \frac{\Delta^{\min}}{8}, \qquad \delta \le \delta_0. \tag{15}$$

Положим $F^\delta(x) = F^\delta_{\lambda(\delta)}(x)$, $h(\delta) = d\lambda(\delta)$. Следующий результат для рассматриваемой задачи вытекает из леммы 2.

Теорема 1. *Пусть зафиксирована усредняющая функция $\varphi \in \Phi[K]$. Тогда для всех $\delta \le \delta_0$ в условиях рассматриваемой задачи при связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ и выполнении неравенства $\min\limits_{k\neq j}|x_k - x_j| \ge 3h(\delta)$ для метода $\mathbf{\Pi}$ получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x^\delta_k - x_k| \le (d/2)\lambda(\delta)$.*

Предложенный способ реализуем, если множество $\Phi[K]$ не пусто. Желательно иметь практически проверяемые, хотя бы в каких-то ситуациях, достаточные условия непустоты этого множества. Кроме того, возникает вопрос конструктивного способа построения функции $\varphi \in \Phi[K]$, практического определения зависимости $\lambda = \lambda(\delta)$ и других величин, используемых в теореме.

Обозначим через

$$\widehat{K}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x)e^{-izx}dx.$$

преобразование Фурье функции K и рассмотрим условие на функцию K:

(K) функция $K(x)$ является чётной, $\widehat{K}(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{R}$; $\widehat{K}(z)$ непрерывна.

В следующей лемме показано, что при выполнении условия **(K)** для усредняющей функции $\varphi \in \Phi[K]$, имеющей финитное преобразование Фурье, функция $\bar{\eta}(\lambda)$ выписывается в явном виде.

Лемма 5. *Пусть $\varphi \in L_1$ и $\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \subset [-a, a]$, где $a > 0$ — конечное число; для функции $K \in L_1$ выполнено условие* **(K)**. *Тогда уравнение* (13) *имеет единственное решение f_λ, являющееся равномерно непрерывной функцией из класса L_∞, причем*

$$\|f_\lambda\|_{L_\infty} \le \bar{\eta}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\|\widehat{\varphi}\|_{L_1} \sup_{|z|\le a/\lambda} \frac{1}{|\widehat{K}(z)|}, \quad \lambda > 0.$$

Доказательство. Существование. Положим

$$\widehat{f_\lambda}(z) \le \frac{\widehat{\varphi}_\lambda(-z)}{\sqrt{2\pi}\cdot\widehat{K}(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Ввиду финитности $\widehat{\varphi}$ и условия **(K)**, получаем, что $\widehat{f_\lambda}$ является непрерывной финитной функцией, а значит, $\widehat{f_\lambda} \in L_1$. Следовательно, по теореме 1.1 из [23, стр. 8] (для отображения $\widehat{f_\lambda} \mapsto f_\lambda$) существует функция

$$f_\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f_\lambda}(z)e^{izx}dz \qquad \forall z \in \mathbb{R},$$

которая принадлежит L_∞ и является равномерно непрерывной.

Проверим, что найденная функция f_λ является решением уравнения (13). В самом деле, вспоминая, что функция K чётная, для любого x получаем

$$[A^*f_\lambda](x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(t-x)f_\lambda(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(t-x)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}_\lambda(z)e^{izt}dz\Big)dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(t-x)\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widehat{\varphi}_\lambda(-z)}{\sqrt{2\pi}\cdot\widehat{K}(z)}e^{izt}dz\Big)dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(t-x)e^{iz(t-x)}dt\Big)\frac{\widehat{\varphi}_\lambda(-z)}{\widehat{K}(z)}e^{izx}dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x-t)e^{-iz(x-t)}dt\Big)\frac{\widehat{\varphi}_\lambda(-z)}{\widehat{K}(z)}e^{izx}dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{K}(z)\frac{\widehat{\varphi}_\lambda(-z)}{\widehat{K}(z)}e^{izx}dz=\varphi_\lambda(-x).$$

Итак, мы показали, что f_λ — решение уравнения (13). Далее, пользуясь тем, что $\widehat{\varphi}_\lambda(-z)=\lambda\widehat{\varphi}(-\lambda z)$, оценим норму $\|f_\lambda\|_{L_\infty}$. Имеем

$$\|f_\lambda\|_{L_\infty}=\sup_x|f_\lambda(x)|=\sup_x\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widehat{\varphi}_\lambda(-z)}{\widehat{K}(z)}e^{izx}dz\right|\le\frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_{-a/\lambda}^{a/\lambda}\left|\frac{\widehat{\varphi}(-\lambda z)}{\widehat{K}(z)}\right|dz$$

$$\le\frac{\lambda}{2\pi}\sup_{|z|\le a/\lambda}\frac{1}{|\widehat{K}(z)|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{\varphi}(-\lambda z)|dz=\frac{1}{2\pi}\|\widehat{\varphi}\|_{L_1}\sup_{|z|\le a/\lambda}\frac{1}{|\widehat{K}(z)|}.$$

Таким образом, получили требуемую оценку.

Единственность. Предположим, что кроме функции f_λ есть другое решение уравнения (13) $\tilde{f}_\lambda$ с указанными свойствами. Обозначим $q_\lambda=f_\lambda-\tilde{f}_\lambda\not\equiv0$. Тогда

$$q_\lambda(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\widehat{f}_\lambda(z)-\widehat{\tilde{f}}_\lambda]e^{izx}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\widehat{\varphi}_\lambda(-z)}{\sqrt{2\pi}\cdot\widehat{K}(z)}-\frac{\widehat{\varphi}_\lambda(-z)}{\sqrt{2\pi}\cdot\widehat{K}(z)}\right]e^{izx}dz\equiv0.$$

Получили противоречие. $\square$

Отметим, что фактически в доказательстве леммы 5 определена схема поиска решения уравнения (13).

Приведем пример усредняющей функции $\varphi\in\Phi[K]$, имеющей финитное преобразование Фурье.

Пример. Функция

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-x^2}, & x\ne\pm1,\\ \pi/4, & x=\pm1\end{cases}$$

принадлежит классу $\Phi[K]$, причем

$$\widehat{\varphi}(z) = \begin{cases} (\pi/2)\cos z, & |z| \le \pi/2, \\ 0, & |z| = \pi/2, \end{cases} \qquad a = \pi/2.$$

Аналогичная задача для случая $f_0 \in L_2(\mathbb{R})$ была решена в [20]. Используя лемму 2, можно получить известные результаты по локализации точек разрыва для $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$ [14, 17], определения положения изломов для $f \in C(\mathbb{R})$ и $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ [14, 16]. При этом методика решения остается неизменной: строится функция F_λ^δ, удовлетворяющая оценке (4) при $\lambda = \lambda(\delta)$, и затем к $F^\delta = F_{\lambda(\delta)}^\delta$ применяется пороговый метод.

4. Локализация линий разрыва зашумленной функции двух переменных в $L_2(\mathbb{R}^2)$

В предыдущем разделе рассматривалась задача локализации особенностей функции одной переменной, в которой для вспомогательной функции имеет место оценка (4), и возможность применимости порогового метода вытекает из леммы 2. Рассмотрим теперь задачу локализации линий разрыва зашумленной функции двух переменных. Как уже было сказано выше, в этом случае для вспомогательной функции оценка (4) не выписана, но тем не менее условие **(F)** выполнено, что, согласно лемме 1, позволяет применять пороговый метод из раздела 2.

Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ имеет конечное число линий разрыва $\Gamma_k, k = 1, 2, \cdots, l$ (см. рис. 3); вне этих линий функция f гладкая. Точные условия на линии разрыва и поведение функции f вне разрывов будут приведены ниже.

Зафиксируем некоторое значение переменной $y = \bar{y}$ и рассмотрим полосу

$$D = \{(x, y) \colon x \in \mathbb{R}, |y - \bar{y}| \le \bar{\delta}\},$$

где величина $\bar{\delta} > 0$ может быть сколь угодно малой. Пусть линии $\Gamma_k, k = 1, 2, \cdots, l$, в полосе D можно задать функциями $x = \gamma_k(y)$. Через x_k обозначены точки пересечения кривых Γ_k с линией $y = \bar{y}$: $x_k = \gamma_k(\bar{y}), k = 1, 2, \cdots, l$.

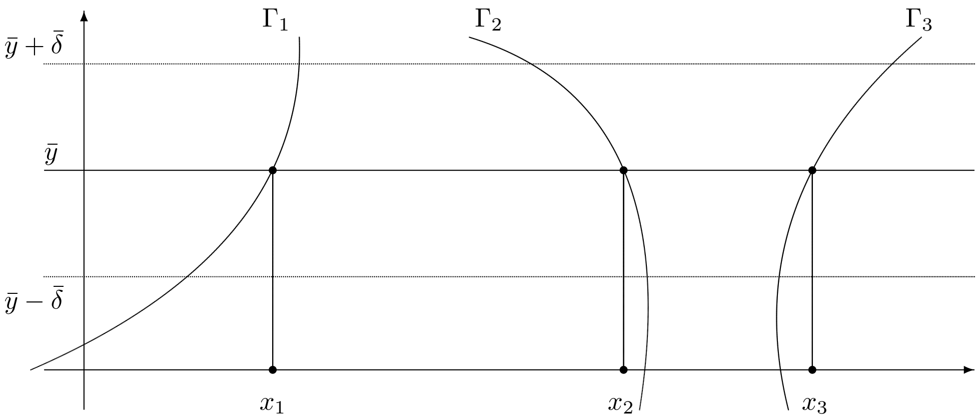

Рис. 3. Локализация линий разрыва функции двух переменных: Γ_k — линии разрыва функции f; x_k — аппроксимируемые величины.

Напомним, что множество MW_2^1 функций одной переменной с конечным числом точек разрыва было введено в примере 2 раздела 2. Введем множество $D_x MW_2^1$ функций двух переменных (априорная информация на точную функцию), для которых в полосе D выполнены следующие условия:

$(*)$ $f(x,y)$ принадлежит множеству MW_2^1 для почти всех y: $|y-\bar{y}| \le \bar{\delta}$, и $\|df(x,y)/dx\|_{L_2(D)} \le r$ (без ограничения общности можно считать, что $r=1$);

$(**)$ для любой точки $(x,y) \in \Gamma_k, k=1,2,\cdots,l$, существуют конечные величины $f(x\pm 0,y)$ и они не равны; соответствующий скачок функции обозначим через $\Delta_k(y), k=1,2,\cdots,l$; $\Delta_k(y)$ — непрерывная функция; существуют положительные константы $\Delta^{\min},\Delta^{\max}$: $\Delta^{\min} \le \min\limits_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \le \max\limits_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \le \Delta^{\max}$;

$(***)$ в полосе D линии $\Gamma_k, k=1,2,\cdots,l$, — гладкие: существуют производные γ_k', γ_k'', и $\max\limits_k |\gamma_k'(\bar{y})| \le M_1$, $\max\limits_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\gamma_k''(y)| \le M_2$.

Постановка задачи. Пусть функция $f \in D_x MW_2^1$. Требуется по известной функции $f^\delta \in L_2(\mathbb{R}^2)$ и уровню погрешности δ таким, что $\|f-f^\delta\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \le \delta$, определить число l и аппроксимировать точки $\{x_k\}_1^l$ с оценкой точности аппроксимации.

Рассматриваемая задача является некорректно поставленной, поскольку количество и положение линий разрыва известной зашумленной функции f^δ могут как угодно сильно отличаться от искомых количества и положения линий разрыва неизвестной точной функции f.

Поскольку возмущение $f-f^\delta$ двумерно, то в данной задаче для построения вспомогательной функции нужно проводить усреднение по двум переменным. Для усреднения по одной переменной возьмем усредняющую функцию из множества ΦF:

(a') $\varphi \in W_1^1(\mathbb{R})$; $|\varphi'(t)| \le C$, C — константа;
(b') $\sup\limits_{t\in[-1,1]} |\varphi(t)| = \varphi(0) = 1$;
(c') $\varphi(t) = 0$ для $t \notin [-1,1]$.

Отметим, что для функций $\varphi \in \Phi F$ нормы функций φ и φ' определены в $L_2(\mathbb{R})$ и ограничены.

Для усреднения по второй переменной введем второй класс усредняющих функций Ψ, который состоит из финитных функций $\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

(a'') $\psi \in L_2(\mathbb{R})$;
(b'') $\int\limits_{-1}^{1} \psi(t)dt = 1$;
(c'') $\psi(t) = 0$ для $t \notin [-1,1]$; $\psi(t) \ge 0$ для $t \in [-1,1]$.

Положим

$$\varphi_{\lambda_1}(t) = \varphi\left(\frac{t}{\lambda_1}\right), \qquad \psi_{\lambda_2}(t) = \frac{1}{\lambda_2}\psi\left(\frac{t}{\lambda_2}\right), \qquad \lambda_1,\lambda_2 > 0.$$

Ядро усреднения для функции $f^\delta(x,y)$ будем конструировать с помощью сдвига произведения функций $\varphi_{\lambda_1}'(x)\psi_{\lambda_2}(y)$ так же как в работах [18, 19]. Однако, в отличие от этих работ, область интегрирования будет состоять из $2M+1$

прямоугольника ($M > 0$ целое число) со сторонами параллельными осям координат (см. рис. 4) и с центрами на прямой, угол наклона которой к оси y равен величине ϑ.

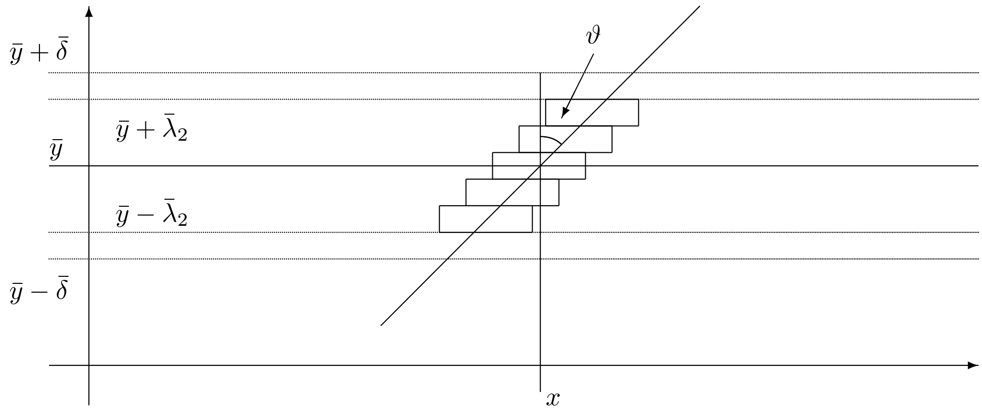

Рис. 4. Область интегрирования, состоящая из пяти прямоугольников ($M = 2$).

Обозначим $\bar{\lambda}_2 = (2M+1)\lambda_2$. Для $x \in \mathbb{R}$, $\bar{y}^i = \bar{y} + 2i\lambda_2$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm M$ введем функцию

$$F^{\delta,i}_{\lambda_1\lambda_2}(x) = \int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2} \int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f^\delta(\xi, y)\varphi'_{\lambda_1}(x-\xi)\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)d\xi dy. \tag{16}$$

Тогда, полагая $\tau^i(x,\vartheta) = x + 2i\lambda_2 \operatorname{tg}\vartheta$, $\vartheta \in [-\operatorname{arctg} M_1, \operatorname{arctg} M_1]$ (M_1 — константа из условия $(***)$), вспомогательную функцию вычисляем по формуле

$$F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta) = \sum_{i=-M}^{M} F^{\delta,i}_{\lambda_1\lambda_2}(\tau^i(x,\vartheta))$$

$$= \sum_{i=-M}^{M} \int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2} \int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} f^\delta(\xi,y)\varphi'_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\xi)\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)d\xi dy. \tag{17}$$

Пределы изменения угла ϑ выбраны таким образом, что для каждой кривой Γ_k величина $\vartheta_k = \operatorname{arctg}\gamma'_k(\bar{y})$ принадлежит отрезку $[-\operatorname{arctg} M_1, \operatorname{arctg} M_1]$.

Введем величину $K = \lambda_1 + 3M_1\bar{\lambda}_2$. Напомним, что M_1, M_2 — константы из условия $(***)$, величина $\bar{\delta}$ входит в определение полосы D. В следующей лемме получены оценки для функции $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta)$ вне окрестностей точек x_k для всех ϑ и в точках (x_k, ϑ_k).

Лемма 6. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\varphi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда для всех $\bar{\lambda}_2 \le \min\{\bar{\delta}, 4M_1/M_2\}$ в условиях рассматриваемой задачи справедливы следующие утверждения:*
(a) *если $|x - x_k| \ge K, k = 1, 2, \cdots, l$, то для функции $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta)$, определенной равенством* (17), *для всех $\vartheta \in [-\operatorname{arctg} M_1, \operatorname{arctg} M_1]$ имеет место оценка*

$$|F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta)| \le A_0\left(\frac{\lambda_1}{\bar{\lambda}_2}\right)^{1/2} + \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\bar{\lambda}_2)^{1/2}},$$

где $A_0 = \|\varphi\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}, A_1 = \|\varphi'\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$;
(б) *если* $\min\limits_{k\neq j}|x_j - x_k| \geq K$, *то для всех* $k = 1, 2, \cdots, l$ *имеет место оценка*

$$|F^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x_k, \vartheta_k)| \geq \Delta^{\min} - A_0\left(\frac{\lambda_1}{\bar\lambda_2}\right)^{1/2} - \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\bar\lambda_2)^{1/2}} - \frac{A_2^1\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{A_2^2\bar\lambda_2^2}{\lambda_1},$$

где $A_2^1 = CM_1\Delta^{\max}, A_2^2 = 2CM_2\Delta^{\max}$.

Доказательство. Условие $\bar\lambda_2 \leq \bar\delta$ гарантирует, что пределы интегрирования в (17) не выйдут из полосы D. Напомним, что $\bar y^i = \bar y + 2i\lambda_2$, $\tau^i(x, \vartheta) = x + 2i\lambda_2 \operatorname{tg}\vartheta$. Обозначим $\Delta f = f^\delta - f$. Тогда

$$F^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta) = \sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} f(\xi, y)\varphi'_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \xi)\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y - y)d\xi dy$$

$$+\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} \Delta f(\xi, y)\varphi'_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \xi)\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y - y)d\xi dy. \tag{18}$$

Второе слагаемое оценивается с помощью неравенства Коши–Буняковского и перехода от функций φ'_{λ_1}, ψ_{λ_2} к функциям φ', ψ.

$$\Big|\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} \Delta f(\xi, y)\varphi'_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \xi)\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y - y)d\xi dy\Big|$$

$$\leq \|\varphi'_{\lambda_1}\|_{L_2}\|\psi_{\lambda_2}\|_{L_2}\delta \leq \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}}.$$

Покажем, что при условии $|x - x_k| \geq K$ область интегрирования в (17) не пересекается с линией разрыва γ_k, т. е. выполнено неравенство $|x - \gamma_k(y)| \geq \lambda_1 + M_1\bar\lambda_2$.

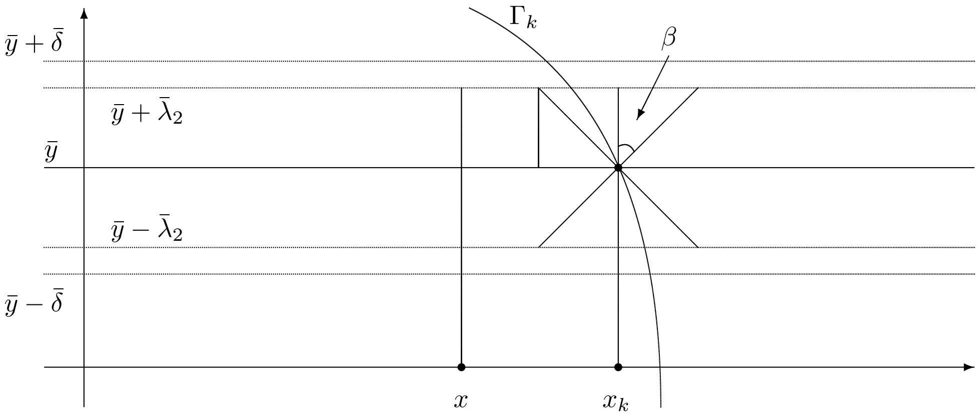

Рис. 5. Условие разделимости: Γ_k — линия разрыва функции f; $x_k - x$ — минимальное расстояние, при котором область интегрирования не пересекается с линией Γ_k.

Объединение всех областей интегрирования для всевозможных углов ϑ не выходит за пределы полосы $D_{\bar\lambda_2} = \{(x, y)\colon x \in \mathbb{R},\ |y - \bar y| \leq \bar\lambda_2\}$. Пусть точка

$(\tilde{x},\tilde{y}) \in \Gamma_k \cap D_{\bar{\lambda}_2}$. Тогда, ввиду разложения $\tilde{x} - x_k = \gamma_k(\tilde{y}) - \gamma_k(\bar{y}) = \gamma_k'(\bar{y})(\tilde{y} - \bar{y}) + \gamma_k''(\xi)(\tilde{y}-\bar{y})^2/2$, где $\xi \in (\tilde{y},\bar{y})$, и условия $(***)$, имеем оценку $|\tilde{x} - x_k| \le (M_1 + M_2\bar{\lambda}_2/2)|\tilde{y}-\bar{y}|$. Это значит, что множество $\Omega_k = \{(x,y)\colon |y-\bar{y}| \le \bar{\lambda}_2,\ |x - x_k| \le (M_1 + M_2\bar{\lambda}_2/2)|y-\bar{y}|\} \supseteq \Gamma_k \cap D_{\bar{\lambda}_2}$. Обозначим через β угол, тангенс которого равен $M_1 + M_2\bar{\lambda}_2/2$ (см. рис. 5). Нам нужно, чтобы расстояние от x до Ω_k было не меньше $\lambda_1 + M_1\bar{\lambda}_2$. Для этого требуется выполнение неравенства $|x - x_k| \ge \lambda_1 + M_1\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_2(M_1 + M_2\bar{\lambda}_2/2) = \lambda_1 + \bar{\lambda}_2(2M_1 + M_2\bar{\lambda}_2/2)$. Ввиду того, что $\bar{\lambda}_2 \le 4M_1/M_2$, достаточно потребовать $|x - x_k| \ge K = \lambda_1 + 3M_1\bar{\lambda}_2$.

Ясно, что для $x = x_m$ при условии $\min\limits_{m\ne k}|x_m - x_k| \ge K$ имеем $|x_m - \gamma_k(y)| \ge \lambda_1 + M_1\bar{\lambda}_2, m \ne k$.

Следовательно, в пункте (а) формулировки леммы в пределах интегрирования функция f не имеет разрывов. В пункте (б) в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k. Получим оценки для первого слагаемого в правой части (18) в том и в другом случае.

Рассмотрим случай (а). Перейдем от двойного интеграла в первом слагаемом в правой части (18) к повторному и для внутреннего интеграла применим лемму 1 работы [19]. Поскольку в пределах интегрирования функция f не имеет разрывов, то получаем оценку

$$\Bigl|\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2}\Biggl(\int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} f(\xi,y)\varphi_{\lambda_1}'(\tau^i(x,\vartheta)-\xi)\,d\xi\Biggr)\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)\,dy\Bigr|$$

$$=\Bigl|\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2}\Biggl(\int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} f_\xi'(\xi,y)\varphi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\xi)\,d\xi\Biggr)\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)\,dy\Bigr|$$

$$\le \|f_x'\|_{L_2}\|\varphi_{\lambda_1}\|_{L_2}\|\psi_{\bar{\lambda}_2}\|_{L_2}.$$

Переходя от функций φ_{λ_1}, $\psi_{\bar{\lambda}_2}$ к функциям φ, ψ и учитывая условие $(*)$, получаем требуемую оценку.

Рассмотрим случай (б). Поскольку в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k, то, применяя лемму 1 работы [19] для внутреннего интеграла в первом слагаемом (18), имеем равенство

$$\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2}\Biggl(\int\limits_{\tau^i(x_k,\vartheta_k)-\lambda_1}^{\tau^i(x_k,\vartheta_k)+\lambda_1} f(\xi,y)\varphi_{\lambda_1}'(\tau^i(x_k,\vartheta_k)-\xi)\,d\xi\Biggr)\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)\,dy$$

$$=\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2}\Delta_k(y)\varphi_{\lambda_1}(\tau^i(x_k,\vartheta_k)-\gamma_k(y))\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)\,dy$$

$$+\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2}\Biggl(\int\limits_{\tau^i(x_k,\vartheta_k)-\lambda_1}^{\tau^i(x_k,\vartheta_k)+\lambda_1} f_\xi'(\xi,y)\varphi_{\lambda_1}(\tau^i(x_k,\vartheta_k)-\xi)\,d\xi\Biggr)\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)\,dy. \tag{19}$$

Второй интеграл был рассмотрен выше при доказательстве случая (а). Поскольку $\varphi_{\lambda_1}(0) = 1$, то, используя формулу Лагранжа, первое слагаемое в правой части (19) можно представить в виде

$$\sum_{i=-M}^{M} \int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2} \Delta_k(y)\varphi_{\lambda_1}(\tau^i(x_k,\vartheta_k) - \gamma_k(y))\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)dy$$

$$= \sum_{i=-M}^{M} \int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2} \Delta_k(y)\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)dy$$

$$+ \sum_{i=-M}^{M} \int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2} \Delta_k(y)\varphi'_{\lambda_1}(\theta) \cdot (\tau^i(x_k,\vartheta_k) - \gamma_k(y))\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)dy, \tag{20}$$

где $\theta \in (\tau^i(x,\vartheta_k) - \tau^i(x_k,\vartheta_k), \tau^i(x,\vartheta) - \gamma_k(y))$. Поскольку функция $\Delta_k(y)$ непрерывна, то, в силу $(**)$, она сохраняет знак для всех y таких, что $|y-\bar{y}| \le \bar{\lambda}_2$. Тогда, используя условие (c'') на функцию ψ, имеем

$$\left| \int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2} \Delta_k(y)\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)dy \right| \ge \Delta^{\min} \int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2} \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)dy.$$

Следовательно, в силу условия (b'') на функцию ψ, для первого слагаемого в правой части (20) получаем оценку

$$\sum_{i=-M}^{M} \left| \int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2} \Delta_k(y)\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)dy \right| \ge \Delta^{\min} a.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (20). Поскольку $x_k = \gamma_k(\bar{y})$, $\mathrm{tg}\vartheta_k = \gamma'_k(\bar{y})$, то $|\tau^i(x_k,\vartheta_k) - \gamma_k(y)| \le \gamma'_k(\bar{y})(2i\lambda_2 + (\bar{y}-y)) + \gamma''_k(\xi)(\bar{y}-y)^2/2$, $\xi \in (y,\bar{y})$. Так как $|\bar{y}-y| \le (2i+1)\lambda_2$, то $|2i\lambda_2 + (\bar{y}-y)| \le \lambda_2$ и $|\tau^i(x_k,\vartheta_k) - \gamma_k(y)| \le M_1\lambda_2 + M_2|\bar{y}-y|^2/2$. В силу условия (a') на функцию φ, для второго слагаемого в правой части (20) получаем оценку

$$\sum_{i=-M}^{M} \left| \int\limits_{\bar{y}^i-\lambda_2}^{\bar{y}^i+\lambda_2} \Delta_k(y)\varphi'_{\lambda_1}(\theta) \cdot (\tau^i(x_k,\vartheta_k) - \gamma_k(y))\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)dy \right|$$

$$\le \Delta^{\max}\frac{C}{\lambda_1}\left(M_1\lambda_2 \int\limits_{\bar{y}-\bar{\lambda}_2}^{\bar{y}+\bar{\lambda}_2} \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)dy + \frac{M_2}{2} \int\limits_{\bar{y}-\bar{\lambda}_2}^{\bar{y}+\bar{\lambda}_2} |\bar{y}-y|^2\psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y}-y)dy \right) \le A_2^1\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + A_2^2\frac{\bar{\lambda}_2^2}{\lambda_1}.$$

Используя полученные выше оценки, имеем требуемую оценку сверху из пункта (б). □

Введем функцию одной переменной

$$\widehat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x) = \max_{\vartheta} |F^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta)|. \tag{21}$$

Напомним, что $P = \Delta^{\min}/2$, $K = \lambda_1 + 3M_1\bar{\lambda}_2$, $A_0 = \|\varphi\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$, $A_1 = \|\varphi'\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$, $A_2^1 = CM_1\Delta^{\max}$, $A_2^2 = 2CM_2\Delta^{\max}$. Введем константы

$$\gamma = \frac{P}{5A_0}, \qquad d = \frac{4A_1}{\gamma P}\left(\gamma^2 + 3M_1\right), \qquad \delta_0 = \min\left\{\frac{\bar{\delta}\gamma P}{4A_1},\ \frac{\gamma^3 P^2}{20A_1A_2^2},\ \frac{\gamma P M_1}{A_1 M_2}\right\}.$$

Величина M определяется как наименьшее целое положительное число, удовлетворяющее условию

$$2M + 1 \geq \frac{5A_2^1}{\gamma^2 P}.$$

Введем зависимости параметров регуляризации от уровня δ погрешности входных данных. Положим

$$\bar{\lambda}_2(\delta) = \frac{4A_1}{\gamma P}\delta, \qquad \lambda_2(\delta) = \frac{\bar{\lambda}_2(\delta)}{2M+1}, \qquad \lambda_1(\delta) = \gamma^2\bar{\lambda}_2(\delta), \qquad h(\delta) = K.$$

Заметим, что $K = d\delta$.

Используя оценки леммы 6, при данном выборе параметров для функции $\widehat{F}^{\delta}_{\lambda_1(\delta)\lambda_2(\delta)}(x)$, определяемой формулой (21), при $\delta \leq \delta_0$ получаем оценку сверху:

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\Omega \quad |\widehat{F}^{\delta}_{\lambda_1(\delta)\lambda_2(\delta)}(x)| < P, \qquad \Omega = \bigcup_{k=1}^{l}\{x \in \mathbb{R}\colon |x - x_k| < h(\delta)\};$$

и $\forall k = 1, 2, \ldots, l$ при условии $\min\limits_{k\neq j}|x_k - x_j| \geq h(\delta)$ имеем оценку снизу:

$$|\widehat{F}^{\delta}_{\lambda_1(\delta)\lambda_2(\delta)}(x_k)| < P.$$

Следовательно, для функции $F^{\delta}(x) = \widehat{F}^{\delta}_{\lambda_1(\delta)\lambda_2(\delta)}(x)$ выполнено условие **(F)**. Следующее утверждение вытекает из леммы 1.

Теорема 2. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\varphi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда для всех $\delta \leq \delta_0$ в условиях рассматриваемой задачи при связи параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\delta)$ и выполнении условия $\min\limits_{k\neq j}|x_k - x_j| \geq 3h(\delta)$ для метода $\mathbf{\Pi}$ получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k - x_k^{\delta}| \leq (d/2)\delta$.*

Отметим, что, используя лемму 1, можно получить известные результаты по локализации линий разрыва зашумленной функции двух переменных, изложенные в работах [18, 19]. В этих работах также строится вспомогательная функция $\sup\limits_{\vartheta}|F^{\delta}_{\lambda_1(\delta)\lambda_2(\delta)}(x,\vartheta)|$, для которой при согласовании параметров δ, λ_1, λ_2 выполняются оценки в условии **(F)**.

References

[1] V.Yu. Terebizh, *Image restoration with minimum a priori information*, Phys. Usp., **38**:2 (1995), 137–167.

[2] V.Yu. Terebizh, *Introduction to statistical theory of inverse problems*, M.: Phizmatlit (2005) [in Russian].

[3] A.V. Goncharskii, A.M. Cherepaschuk, A.G. Yagola, *Numerical methods of solving inverse problems of astrophysics*, M.: Nauka (1978) [in Russian]. Zbl 0495.35077

[4] G. Winkler, O. Wittich, V. Liebscher, A. Kempe, *Don't shed tears over breaks*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein, **107**:2 (2005), 57–87. Zbl 1175.93232

[5] C.G. M. Oudshoorn, *Asymptotically minimax estimation of a function with jumps*, Bernoulli, **4**:1 (1998), 15–33. Zbl 0920.62053

[6] V.S. Sizikov, *Mathematical methods for processing the results of measurements*, St. Petersburg: Politekhnika (2001) [in Russian].
[7] E.Yu. Derevtsov, V.V. Pickalov *Reconstruction of vector fields and their singularities from ray transform*, Numerical Analysis and Applications, **4**:1 (2011), 21–35. Zbl 1299.65294
[8] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing: the sparse way*, San Diego, CA: Academic Press, (1999). Zbl 0998.94510
[9] *Introduction to contour analysis and its applications to image and signal processing*, Ed. by Ya.A. Furman et al. Fizmatlit, Moscow, 2002 [in Russian].
[10] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin, *Solutions of ill-posed problems*, New York: Wiley, (1977). Zbl 0354.65028
[11] V. K. Ivanov, V. V. Vasin, V. P. Tanana, *Theory of linear ill-posed problems and its applications*, VSP, Utrecht, 2002. Zbl 1037.65056
[12] V. V. Vasin and A. L. Ageev, *Ill-posed problems with a priori information*, VSP, Utrecht, 1995. Zbl 0840.65048
[13] A. L. Ageev, T. V. Antonova, *On a new class of ill-posed problems*, Izv. Ural'sk. Gos. Univ., **58** (2008), 24–42 [in Russian]. Zbl 1194.35493
[14] A.L. Ageev, T.V. Antonova, *On ill-posed problems of localization of singularities*, Tr. Inst. Mat.Mech.UrO RAN, **17**:3 (2011), 30–45 [in Russian].
[15] A.L. Ageev, T.V. Antonova, *Regularizing algorithms for detecting discontinuities in ill-posed problems*, Comput.Math. and Math. Phys. **48**:8 (2008), 1284–1292. Zbl 1199.47064
[16] T.V. Antonova, *Regularizing algorithms for localization of breakpoints of noisy functions convection*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **2** (2009), 24–39. Zbl 1227.65017
[17] T.V. Antonova, *New methods for localizing discontinuities of a noisy function*, Numerical Analysis and Application **3**:4 (2010), 306–316. Zbl 1289.65022
[18] T. V. Antonova, *A method for localization of discontinuity lines of an approximately defined function of two variables*, Numerical Analysis and Application **5**:4 (2012), 285–296. Zbl 1299.65021
[19] A.L. Ageev, T.V. Antonova, *Approximation of discontinuity lines of a noisy function of two variables*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **6**:3 (2012), 269–279. Zbl 1324.65088
[20] A.L. Ageev, T.V. Antonova, *Localization algorithms for singularities of solutions to convolution equation of the first kind*, J.Inverse and Ill-Posed Problems, **16**:7 (2008), 639–650. Zbl 1158.65087
[21] D.V. Kurlikovskii, *Methods of localization of discontinuities in solution of first kind equation of convolution type*, Russian Mathematics, **58**:3 (2014), 60–63. Zbl 1303.65109
[22] V. I. Bogachev, *Fundamentals of measure theory, I*, Regular and Chaotic Dynamics, Moscow–Izhevsk, 2006 [in Russian].
[23] E.M. Stein, G.L. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Zbl 0232.42007

Dmitrii Vladimirovich Kurlikovskii
Institute of Mathematics and Mechanics,
ul.S.Kovalevskoi, 16,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: ageev@imm.uran.ru

Alexandr Leonidovich Ageev
Institute of Mathematics and Mechanics,
ul.S.Kovalevskoi, 16,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: ageev@imm.uran.ru

Tatiana Vladimirovna Antonova
Institute of Mathematics and Mechanics,
ul.S.Kovalevskoi, 16,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: tvantonova@imm.uran.ru