

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 13, стр. 849–860 (2016)

DOI 10.17377/semi.2016.13.067

УДК 517.444

MSC 35C15

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ ДЛЯ ИТЕРИРОВАННОГО  
ВЕСОВОГО СФЕРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО И ЕГО  
ПРИЛОЖЕНИЯХ

С. М. СИТНИК, Э. Л. ШИШКИНА

**ABSTRACT.** Spherical means are well-known useful tool in the theory of partial differential equations with applications to solving hyperbolic and ultrahyperbolic equations and problems of integral geometry, tomography and Radon transforms. We generalize iterated spherical means to weighted ones based on generalized translation operators and consider applications to  $B$ -hyperbolic equations and transmission tomography problems.

**Keywords:** spherical means, weighted means, Åsgeirsson theorem, iterated means,  $B$ -hyperbolic equation, integral geometry, tomography.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Сферические средние имеют многочисленные применения в теоретической математике и её приложениях. В классических трудах [1]–[3] приводятся различные применения сферических средних к теории уравнений в частных производных, в том числе эллиптического, гиперболического и ультрагиперболического типов. Кроме того, сферические средние являются объектом изучения интегральной геометрии с приложением результатов исследований к томографии [4], например фотоакустической [5]. Известна также тесная связь сферических средних с преобразованием Фурье и потенциалом М. Рисса (см. [6]). Представление решений различных дифференциальных уравнений с частными производными с помощью сферических средних также связано с теорией

---

SHISHKINA, E.L., SITNIK, S.M. ON AN IDENTITY FOR THE ITERATED WEIGHTED SPHERICAL MEAN AND ITS APPLICATIONS.

© 2016 Ситник С.М., Шишкина Э.Л.

Работа первого автора частично поддержана грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8215.2016.1).

Поступила 24 июня 2016 г., опубликована 14 октября 2016 г.

операторов преобразования [7]–[8]. При этом существует известный подход к теории преобразования Радона, основанный на разложении функций в ряды по сферическим гармоникам [9], восходящий к основополагающей работе Д. Людвига (см. [4], [6]). При этом подходе фундаментальную роль играют операторы преобразования Бушмана–Эрдейи (или Гегенбауэра–Чебышёва, как принято называть их в работах по томографии), см. [10]–[13].

В этой работе мы будем рассматривать *весовое сферическое среднее*, в котором по каждой переменной подынтегральной функции действует обобщённый сдвиг, определенный в [14] (см. также [15]). Такое среднее изучалось в работах [16], [17]. В [16] были получены свойства весового сферического среднего и была доказана теорема о среднем значении типа теоремы Асгейрссона (см. [18]). Весовое сферическое среднее в [17] было использовано для построения решения задачи Коши для гиперболического уравнения, содержащего сингулярные дифференциальные операторы Бесселя по каждой из переменных (см. также [19], где решение этой задачи построено другим методом).

В настоящей работе доказаны новые тождества для итерированных весовых сферических средних, которые необходимы для получения явных формул при восстановлении функции по её весовым сферическим средним. Кроме того, с использованием весовых сферических средних в работе получена формула для представления функции через операторы обобщённого сдвига и преобразование Фурье–Бесселя или Ханкеля. Такие формулы используются в различных прикладных задачах томографии и интегральной геометрии.

## 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Будем рассматривать функции  $f(x)$ , определённые в области

$$\mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}.$$

**Определение 1.** Следуя [21] (см. стр. 21), функцию  $f \in C^\infty(\mathbb{R}_n^+)$  будем называть чётной по  $x_i$ , если  $\left. \frac{d^{2k+1}f}{dx_i^{2k+1}} \right|_{x_i=0} = 0$  при всех  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Если  $f(x)$  при  $x \in \mathbb{R}_n^+$  не является бесконечно дифференцируемой, то будем называть эту функцию четной по  $x_i$ , если её можно продолжить чётным образом на значения  $x_i \leq 0$  с сохранением её свойств.

Пространство  $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+) = S_{ev}$  – это подпространство пространства Шварца  $S(\mathbb{R}_n^+)$ , состоящее из функций  $\varphi(x)$ , чётных по каждой из своих переменных.

Пусть  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  – мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел, и  $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$  его длина.

Положим  $\mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i \xi_i)$ ,  $|\xi| = 1$ , где  $j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}$  – "малая" или "нормированная" функция Бесселя, которая связана с "большой" функцией Бесселя первого рода  $J_{\frac{\gamma_i-1}{2}}$  равенством

$$(1) \quad j_\omega(t) = \Gamma(\omega + 1) \left(\frac{2}{t}\right)^\omega J_\omega(t), \quad \omega > 0, \quad t \in \mathbb{R}_1.$$

Прямое и обратное преобразование Фурье–Бесселя для функции  $f \in S_{ev}$  определяются по формулам (см. [21]):

$$F_B[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n^+} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) f(x) x^\gamma dx, \quad x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i},$$

$$f(x) = F_B^{-1}[\widehat{f}(\xi)](x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} F_B[\widehat{f}(\xi)](x).$$

Часть шара  $|x| \leq r$ ,  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , принадлежащую  $\mathbb{R}_n^+$ , будем обозначать  $B_r^+(n)$ . Граница  $B_r^+(n)$  состоит из части сферы  $S_r^+(n) = \{x \in \mathbb{R}_n^+ : |x|=r\}$  и из частей координатных гиперплоскостей  $x_i=0$ ,  $i=1, \dots, n$ , таких что  $|x| \leq r$ .

Рассмотрим функцию  $g(s)$  одной переменной  $s > 0$ , чётную в смысле определения 1, и пусть  $\nu > 0$ . В [14] определён, а в [15] (см. стр. 121 и далее) подробно изучен оператор обобщённого сдвига вида

$$(2) \quad \nu \mathcal{T}_s^t g(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\pi g(\sqrt{s^2 + t^2 - 2st \cos \varphi}) \sin^{\nu-1} \varphi d\varphi.$$

Если рассматриваемая функция  $g(s) \in C^2(\mathbb{R}_1^+)$ , то  $\Phi(s, t) = \nu \mathcal{T}_s^t g(s)$  представляет собой единственное решение задачи Коши вида

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\nu}{t} \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

$$\Phi(s, 0) = g(s), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Оператор (2) заменой переменных сводится к виду

$$(3) \quad \nu \mathcal{T}_s^t g(s) = \frac{2}{(2st)^{\gamma-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_{|x-y|}^{x+y} z f(z) [(z^2 - (x-y)^2)((x+y)^2 - z^2)]^{\frac{\nu}{2}-1} dz.$$

Далее будем считать, что  $x \in \mathbb{R}_n^+$ ,  $f(x)$  — интегрируемая с весом  $x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$  функция, чётная по каждой координате своего аргумента в смысле определения 1. Рассмотрим многомерный обобщённый сдвиг

$$T^y f(x) = \prod_{i=1}^n (\gamma_i \mathcal{T}_{x_i}^{y_i} f)(x),$$

где каждый из одномерных обобщённых сдвигов  $\gamma_i \mathcal{T}_{x_i}^{y_i}$  определен формулами (2) или (3).

Весовое сферическое среднее, порождённое обобщённым сдвигом, имеет вид

$$(4) \quad M_r^\gamma f(x) = M_f^\gamma(x; r) = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_{S_1^+(n)} T^{ry} f(x) y^\gamma dS(y), \quad r > 0,$$

где коэффициент  $|S_1^+(n)|_\gamma$  вычисляется по формуле

$$(5) \quad |S_1^+(n)|_\gamma = \int_{S_1^+(n)} \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dS(y) = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}$$

(см. [22], стр. 20, формула (1.2.5), где надо положить  $N=n$ ).

Средние (4) изучались в [16], [17], [23]. В [24] применялось весовое сферическое среднее, порожденное смешанным обобщённым сдвигом, который действовал только по одной переменной.

Многомерный оператор Пуассона определяется формулой (см. [15], [21])

$$(6) \quad \mathcal{P}_x^\gamma f(x) = C(\gamma) \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(x_1 \cos \alpha_1, \dots, x_n \cos \alpha_n) \prod_{j=1}^n \sin^{\gamma_j-1} \alpha_j d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

где

$$C(\gamma) = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} 2^{n-1} \Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}.$$

Отметим, что для интегрируемой по  $B_R^+(n)$  с весом  $x^\gamma$  функции  $f(x)$  и для непрерывной при  $t \in [0, \infty)$  функции одной переменной  $g(t)$  посредством сферической замены переменных  $x = \rho\theta$ ,  $|x| = \rho$  получается формула

$$(7) \quad \int_{B_R^+(n)} g(|x|) f(x) x^\gamma dx = \int_0^R g(\rho) \rho^{n+|\gamma|-1} d\rho \int_{S_1^+(n)} f(\rho x) x^\gamma dS(x).$$

Если в (7) положить  $g(t) = 1$  и продифференцировать обе части по  $R$ , то будем иметь

$$(8) \quad \int_{S_1^+(n)} f(Rx) x^\gamma dS(x) = R^{1-n-|\gamma|} \frac{d}{dR} \int_{B_R^+(n)} f(x) x^\gamma dx.$$

Нам также потребуется формула

$$(9) \quad \int_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_\xi^\gamma g(\langle \xi, x \rangle) x^\gamma dS(x) = C(\gamma) \int_{-1}^1 g(|\xi|p) (1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} dp.$$

В книге [22] (стр. 44, формула 1.7.13) приведена общая формула для случая, когда только часть переменных нагружены весами, из которой получается (9) при отсутствии невесовых переменных. Отметим также, что общая формула, аналогичная формуле 1.7.13 из [22], получена И.А. Киприяновым и Л.А. Ивановым в статье [26] (формула (3) на стр. 57), однако в формуле (3) из [26] отсутствует умножение на константу  $C(\gamma)$ .

### 3. ИТЕРИРОВАННОЕ ВЕСОВОЕ СФЕРИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ И ЕГО СВОЙСТВА

*Итерированное весовое сферическое среднее* имеет вид (см. [25]):

$$I_f^\gamma(x; \lambda, \mu) = I_{\lambda, \mu}^\gamma f(x) = M_\lambda^\gamma M_\mu^\gamma f(x)$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_{S_1^+(n)} \int_{S_1^+(n)} T_x^{\lambda\zeta} T_x^{\mu\xi} [f(x)] \zeta^\gamma \xi^\gamma dS(\xi) dS(\zeta).$$

Используя перестановочное свойство обобщённого сдвига (см. [15], формула (7.1)), получим, что итерированное весовое сферическое среднее симметрично относительно  $\lambda$  и  $\mu$ :

$$I_f^\gamma(x; \lambda, \mu) = I_f^\gamma(x; \mu, \lambda).$$

Очевидно, что

$$I_f^\gamma(x; \lambda, 0) = I_f^\gamma(x; 0, \lambda) = M_\lambda^\gamma f(x)$$

и

$$I_f^\gamma(x; 0, 0) = f(x).$$

Следуя [1] (см. стр. 73), докажем равенство, выражающее итерированное сферическое среднее  $I_f^\gamma(x; \lambda, \mu)$  через однократный интеграл от весового сферического среднего  $M_f^\gamma(x; r)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f$  — интегрируемая с весом  $x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$  функция, чётная по каждой из своих переменных в смысле определения 1. Тогда справедливы следующие формулы:

$$(10) \quad I_f^\gamma(x; \lambda, \mu) = {}^\nu \mathcal{T}_\mu^\lambda M_f^\gamma(x; \mu),$$

$$I_f^\gamma(x; \lambda, \mu) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{1}{(2\lambda\mu)^{n+|\gamma|-2}}$$

$$(11) \quad \times \int_{\lambda-\mu}^{\lambda+\mu} \left( (\lambda^2 - (r-\mu)^2) ((r+\mu)^2 - \lambda^2) \right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} M_f^\gamma(x; r) r dr,$$

$$I_f^\gamma\left(x; \frac{\beta-\alpha}{2}, \frac{\beta+\alpha}{2}\right)$$

$$(12) \quad = \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{2^{n+|\gamma|-1}}{(\beta^2 - \alpha^2)^{n+|\gamma|-2}} \int_\alpha^\beta \left( (\beta^2 - r^2)(r^2 - \alpha^2) \right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} M_f^\gamma(x; r) r dr.$$

*Доказательство.* Пусть  $g(s)$  — произвольная непрерывная финитная функция одной переменной. Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^{+\infty} \lambda^{n+|\gamma|-1} g(\lambda) I_f^\gamma(x; \lambda, \mu) d\lambda$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_0^{+\infty} \lambda^{n+|\gamma|-1} g(\lambda) d\lambda \int_{S_1^+(n)} \int_{S_1^+(n)} T_x^{\lambda\zeta} T_x^{\mu\xi} [f(x)] \zeta^\gamma \xi^\gamma dS(\xi) dS(\zeta).$$

Применяя перестановочное свойство обобщённого сдвига (7.1) из [15] и формулу (7), запишем это выражение в виде

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_{S_1^+(n)} T_x^{\mu\xi} \left[ \int_0^{+\infty} \lambda^{n+|\gamma|-1} g(\lambda) d\lambda \int_{S_1^+(n)} T_x^{\lambda\xi} [f(x)] \zeta^\gamma dS(\zeta) \right] \xi^\gamma dS(\xi) \\
&= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_{S_1^+(n)} T_x^{\mu\xi} \left[ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \lambda^{n+|\gamma|-1} g(\lambda) d\lambda \int_{S_1^+(n)} T_x^{\lambda\xi} [f(x)] \zeta^\gamma dS(\zeta) \right] \xi^\gamma dS(\xi) \\
&= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_{S_1^+(n)} T_x^{\mu\xi} \left[ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R^+(n)} T_x^z [f(x)] g(|z|) z^\gamma dz \right] \xi^\gamma dS(\xi) \\
&= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_{S_1^+(n)} T_x^{\mu\xi} \left[ \int_{\mathbb{R}_n^+} T_x^z [f(x)] g(|z|) z^\gamma dz \right] \xi^\gamma dS(\xi).
\end{aligned}$$

Теперь, применяя свойства ассоциативности и самосопряжённости обобщённого сдвига (см. [15], формулы (7.3) и (7.4), соответственно), получим

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} (T_z^{\mu\xi} T_z^x [f(z)]) g(|z|) z^\gamma dz \xi^\gamma dS(\xi) \\
&= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} T_z^x [f(z)] T_z^{\mu\xi} [g(|z|)] z^\gamma dz \xi^\gamma dS(\xi) \\
&= \frac{C(\gamma)}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} T_x^z [f(x)] \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i \\
&\quad \times g(\sqrt{\mu^2 \xi_1^2 + \dots + \mu^2 \xi_n^2 + z_1^2 + \dots + z_n^2 - 2\mu \xi_1 z_1 \cos \alpha_1 - \dots - 2\mu \xi_n z_n \cos \alpha_n}) \\
&\quad \times d\alpha_1 \dots d\alpha_n z^\gamma dz \xi^\gamma dS(\xi).
\end{aligned}$$

В интеграле по  $z$  перейдем к сферическим координатам  $z = r\eta$ ,  $|\eta| = 1$ ,  $r \geq 0$ . Учитывая, что  $|\xi| = 1$ , получим

$$\begin{aligned}
J &= \frac{C(\gamma)}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_{S_1^+(n)} \int_0^{+\infty} r^{n+|\gamma|-1} dr \int_{S_1^+(n)} T_x^{r\eta} [f(x)] \times \\
&\quad \times \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i g(\sqrt{\mu^2 + r^2 - 2r\mu \langle \xi, \eta \cos \alpha \rangle}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \eta^\gamma dS(\eta) \xi^\gamma dS(\xi),
\end{aligned}$$

где

$$\langle \xi, \eta \cos \alpha \rangle = \xi_1 \eta_1 \cos \alpha_1 + \dots + \xi_n \eta_n \cos \alpha_n.$$

Используя многомерный оператор Пуассона (6), интеграл  $J$  запишем в виде

$$J = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_0^{+\infty} r^{n+|\gamma|-1} dr \int_{S_1^+(n)} T_x^{r\eta}[f(x)]\eta^\gamma dS(\eta) \\ \times \int_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_\eta^\gamma g(\sqrt{r^2 + \mu^2 - 2r\mu\langle\xi, \eta\rangle}) \xi^\gamma dS(\xi).$$

Применяя к интегралу

$$\int_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_\eta^\gamma g(\sqrt{r^2 + \mu^2 - 2r\mu\langle\xi, \eta\rangle}) \xi^\gamma dS(\xi)$$

формулу (9) и учитывая, что  $|\eta| = 1$ , получим

$$J = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}2^{n-1}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_0^{+\infty} r^{n+|\gamma|-1} dr \int_{S_1^+(n)} T_x^{r\eta}[f(x)]\eta^\gamma dS(\eta) \\ \times \int_{-1}^1 (1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} g(\sqrt{r^2 + \mu^2 - 2r\mu p}) dp \\ = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}2^{n-1}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_0^{+\infty} r^{n+|\gamma|-1} M_f^\gamma(x; r) dr \\ \times \int_{-1}^1 (1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} g(\sqrt{r^2 + \mu^2 - 2r\mu p}) dp.$$

Теперь вместо переменной  $p$  введем переменную  $\lambda$ , связанную с  $p$  формулой

$$r^2 + \mu^2 - 2r\mu p = \lambda^2.$$

Вычисляем значения

$$p = \frac{r^2 + \mu^2 - \lambda^2}{2r\mu}, dp = -\frac{\lambda}{r\mu} d\lambda, \quad 1 - p^2 = \frac{(\lambda^2 - (r - \mu)^2)((r + \mu)^2 - \lambda^2)}{(2r\mu)^2},$$

и при  $p = -1$  получаем  $\lambda = |r + \mu|$ , а при  $p = 1$  получаем  $\lambda = |r - \mu|$ . Тогда, используя (5), выводим

$$J = (2\mu)^{2-n-|\gamma|} \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \\ \times \int_0^{+\infty} g(\lambda) \lambda d\lambda \int_{|\lambda-\mu|}^{|\lambda+\mu|} ((\lambda^2 - (r - \mu)^2)((r + \mu)^2 - \lambda^2))^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} M_f^\gamma(x; r) r dr.$$

Поскольку  $g(\lambda)$  — произвольная функция, то из того что

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{n+|\gamma|-1} g(\lambda) I_f^\gamma(x; \lambda, \mu) d\lambda = (2\mu)^{2-n-|\gamma|} \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \\ \times \int_0^{+\infty} g(\lambda) \lambda d\lambda \int_{\lambda-\mu}^{\lambda+\mu} \left( (\lambda^2 - (r-\mu)^2)((r+\mu)^2 - \lambda^2) \right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} M_f^\gamma(x; r) r dr$$

следует, что

$$I_f^\gamma(x; \lambda, \mu) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \times \\ (13) \quad \times \frac{1}{(2\lambda\mu)^{n+|\gamma|-2}} \int_{\lambda-\mu}^{\lambda+\mu} \left( (\lambda^2 - (r-\mu)^2)((r+\mu)^2 - \lambda^2) \right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} M_f^\gamma(x; r) r dr.$$

Мы убрали модули в пределах интегрирования в силу того, что подынтегральная функция нечетна по  $r$ .

Теперь, используя представление (3) обобщённого сдвига при  $\nu = n + |\gamma| - 1$ , получим

$$I_f^\gamma(x; \lambda, \mu) = {}^\nu \mathcal{T}_\mu^t M_f^\gamma(x; \mu).$$

Если в формуле (13) мы положим  $\alpha = \lambda - \mu$ ,  $\beta = \lambda + \mu$ , ( $\beta > \alpha$ ), то можем записать

$$I_f^\gamma\left(x; \frac{\beta - \alpha}{2}, \frac{\beta + \alpha}{2}\right) \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{2^{n+|\gamma|-1}}{(\beta^2 - \alpha^2)^{n+|\gamma|-2}} \int_\alpha^\beta \left( (\beta^2 - r^2)(r^2 - \alpha^2) \right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} M_f^\gamma(x; r) r dr.$$

Теорема доказана.  $\square$

Из доказанной теоремы вытекают формулы, выражающие действие итерированных весовых средних на функции Бесселя. Для этого в теореме 1 выберем  $f(x) = \mathbf{j}_\gamma(x, \xi)$ . Далее, в [16] показано, что

$$M_\mu^\gamma \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(\mu).$$

Тогда

$$I_{\lambda, \mu}^\gamma \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(\mu) j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(\lambda).$$

Если для  $I_{\lambda, \mu}^\gamma \mathbf{j}_\gamma(x, \xi)$  записать равенство (10), то получим известную формулу

$${}^\nu \mathcal{T}_\mu^\lambda j_{\frac{\nu-1}{2}}(\mu) = j_{\frac{\nu-1}{2}}(\mu) j_{\frac{\nu-1}{2}}(\lambda), \quad \nu = n + |\gamma| - 1,$$

полученную в [15] (см. стр. 124), где она выводится из анализа дифференциального уравнения, которому удовлетворяет обобщённый сдвиг. Мы же получили прямое доказательство этой формулы, выведя её непосредственно из теоремы 1 с помощью весовых сферических средних.



4. ПРИМЕНЕНИЯ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ИТЕРИРОВАННОГО СФЕРИЧЕСКОГО  
СРЕДНЕГО К ЗАДАЧЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Рассмотрим применение формулы (11) из полученной выше теоремы 1 к компьютерной томографии. В задачах дифракционной томографии и обратного рассеяния преобразование Фурье–Бесселя (Ханкеля) функции представляет собой измеренные данные (см., например, [27], [20] р. 126, [28] р. 90). Подобные формулы используются для восстановления функции по её известным сферическим средним.

Докажем формулу, выражающую функцию через ее преобразование Фурье–Бесселя и обобщённый сдвиг. Это обобщение известной формулы для более простой задачи, в которой используется представление функции через её преобразование Фурье и обычный сдвиг [29]. В такой форме подобные представления используются для восстановления функции в указанных задачах томографии и интегральной геометрии.

Отметим, что в теории рассеяния поверхность шара  $|x| < 2\lambda$ , которая далее используется при интегрировании, называется сферой Эвальда (см. [30]).

**Теорема 2.** Пусть преобразование Фурье–Бесселя  $\widehat{F}$  — функция с носителем внутри части шара

$$B_{2\lambda}(n)^+ = \{x \in \mathbb{R}_n^+ : |x| < 2\lambda\}.$$

Тогда справедливо равенство

$$(14) \quad F(y) = C(n, \gamma) \int_{S_1^+(n)} \int_{S_1^+(n)} T_{\lambda\xi}^{\lambda\xi} \left[ \frac{|\lambda\xi| \widehat{F}(\lambda\xi) \mathbf{j}_\gamma(\lambda\xi, y)}{(4\lambda^2 - |t\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}} \right] \zeta^\gamma \xi^\gamma dS(\xi) dS(\zeta),$$

$$C(n, \gamma) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{2n-3} \lambda^{2n+2|\gamma|-4} \Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right) |S_1^+(n)|_\gamma^2}.$$

*Доказательство.* В (11) положим  $\mu = \lambda$ , получим

$$(15) \quad I_f^\gamma(x; \lambda, \lambda) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{1}{(2\lambda^2)^{n+|\gamma|-2}} \int_0^{2\lambda} [4\lambda^2 - r^2]^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} r^{n+|\gamma|-2} M_f^\gamma(x; r) dr.$$

Рассмотрим функцию

$$f_y(x) = \frac{|x|}{(4\lambda^2 - |x|^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}} \widehat{F}(x) \mathbf{j}_\gamma(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}_n^+.$$

Найдем её весовое сферическое среднее  $f_y(x)$  при  $x = 0$ :

$$M_r^\gamma f_y(x)|_{x=0} = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_{S_1^+(n)} [T_x^{rz} f_y(x)]_{x=0} z^\gamma dS(z)$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_{S_1^+(n)} \left[ T_x^{rz} \frac{|x|}{(4\lambda^2 - |x|^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}} \widehat{F}(x) \mathbf{j}_\gamma(x, y) \right]_{x=0} z^\gamma dS(z)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_{S_1^+(n)} \frac{r|z|}{(4\lambda^2 - r|z|^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}} \widehat{F}(rz) \mathbf{j}_\gamma(rz, y) z^\gamma dS(z) \\
&= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \frac{r}{(4\lambda^2 - |r|^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}} \int_{S_1^+(n)} \widehat{F}(rz) \mathbf{j}_\gamma(rz, y) z^\gamma dS(z).
\end{aligned}$$

Теперь, используя (15), найдем

$$\begin{aligned}
&I_f^\gamma(0; \lambda, \lambda) \\
&= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{1}{(2\lambda^2)^{n+|\gamma|-2}} \int_0^{2\lambda} [4\lambda^2 - r^2]^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} r^{n+|\gamma|-2} M_f^\gamma(0, r) dr \\
&= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{(2\lambda^2)^{2-n-|\gamma|}}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_0^{2\lambda} [4\lambda^2 - r^2]^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} r^{n+|\gamma|-2} \frac{r}{(4\lambda^2 - r^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}} dr \\
&\quad \times \int_{S_1^+(n)} \widehat{F}(rz) \mathbf{j}_\gamma(rz, y) z^\gamma dS(z) \\
&= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{(2\lambda^2)^{2-n-|\gamma|}}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_0^{2\lambda} r^{n+|\gamma|-1} dr \int_{S_1^+(n)} \widehat{F}(rz) \mathbf{j}_\gamma(rz, y) z^\gamma dS(z).
\end{aligned}$$

Применяя формулу (7), получим

$$\begin{aligned}
I_f^\gamma(0; \lambda, \lambda) &= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{(2\lambda^2)^{2-n-|\gamma|}}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_{B_{2\lambda}^+} \widehat{F}(z) \mathbf{j}_\gamma(z, y) z^\gamma dz \\
&= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{(2\lambda^2)^{2-n-|\gamma|}}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_{\mathbb{R}_+^n} \widehat{F}(z) \mathbf{j}_\gamma(z, y) z^\gamma dz \\
&= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{(2\lambda^2)^{2-n-|\gamma|}}{|S_1^+(n)|_\gamma} 2^{|\gamma|-n} \prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right) F(y) \\
&= \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} 2^{2n-3} \lambda^{2n+2|\gamma|-4} \Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} F(y).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(16) \quad F(y) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{2n-3} \lambda^{2n+2|\gamma|-4} \Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} I_f^\gamma(0; \lambda, \lambda).$$

С другой стороны

$$(17) \quad I_f^\gamma(0; \lambda, \lambda) = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int_{S_1^+(n)} \int_{S_1^+(n)} T_{t\xi}^{t\xi} [f(t\xi)] \zeta^\gamma \xi^\gamma dS(\xi) dS(\zeta).$$

Из (16) и (17) получим

$$F(y) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{2n-3} \lambda^{2n+2|\gamma|-4} \Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right) |S_1^+(n)|_\gamma^2} \times$$

$$\times \int_{S_1^+(n)} \int_{S_1^+(n)} T_{\lambda\xi}^{\lambda\zeta} \left[ \frac{|\lambda\xi|}{(4\lambda^2 - |t\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}} \widehat{F}(\lambda\xi) \mathbf{j}_\gamma(\lambda\xi, y) \right] \zeta^\gamma \xi^\gamma dS(\xi) dS(\zeta).$$

□

### REFERENCES

- [1] F. John, *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations*, Reprint. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1981. Zbl 0464.35001
- [2] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1990. Zbl 0712.35001
- [3] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 2, Wiley-Interscience, 1962. Zbl 0099.29504
- [4] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, SIAM, 1986. Zbl 0617.92001
- [5] Y. Dong, T. Görner, and S. Kunis, *An algorithm for total variation regularized photoacoustic imaging*, Adv. Comput. Math., **41**:2 (2015), 423–438. Zbl 1317.65193
- [6] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000 Academic Press, San Diego, CA, 1984. Zbl 0543.58001
- [7] S.M. Sitnik, *Transmutations and Applications: a survey*, Researches on modern analysis and mathematical modelling, Vladikavkaz, (2008), 226–293. (arXiv:1012.3741, (2012), 141 P.)
- [8] V.V. Katrakhov, S.M. Sitnik, *Composition method for constructing B-elliptic, B-hyperbolic, and B-parabolic transformation operators*, Russ. Acad. Sci., Dokl., Math. **50**:1 (1995), 70–77. Zbl 0882.34083
- [9] S. Deans, *The Radon Transform and Some of Its Applications*, revised edition, Krieger Publishing Co., Malabar, FL, 1993. Zbl 0868.44001
- [10] S.M. Sitnik, *Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications*, Analytic methods of analysis and differential equations: AMADE 2012 ( Edited by M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin), Cambridge Scientific Publishers, (2013), 171–201.
- [11] S.M. Sitnik, *Factorization and estimates of the norms of Buschman–Erdelyi operators in weighted Lebesgue spaces*, Soviet Mathematics Doklades, **44**:2 (1992), 641–646.
- [12] B. Rubin, *Radon transforms and Gegenbauer–Chebyshev integrals, I*, Anal. Math. Phys., 2016.
- [13] B. Rubin, *On the Funk–Radon–Helgason inversion method in integral geometry*, Contemp. Math., **599**, (2013), 175–198. Zbl 1318.44001
- [14] J. Delsartes, *Une extension nouvelle de la theorie de fonctions presque--periodiques de Bohr*, Acta Mathematica, **69** (1939), 257–317.
- [15] B.M. Levitan, *Expansion in Fourier Series and Integrals with Bessel Functions*, Uspekhi Mat. Nauk, **6**:2(42) (1951), 102–143. Zbl 0043.07002
- [16] L.N. Lyakhov, I.P. Polovinkin, E.L. Shishkina, *On Kipriyanov problem for a singular ultrahyperbolic equation*, Differ. Equ., **50**:4 (2014), 513–525. Zbl 1297.35146
- [17] L.N. Lyakhov, I.P. Polovinkin, E.L. Shishkina, *Formulas for the Solution of the Cauchy Problem for a Singular Wave Equation with Bessel Time Operator*, Doklady Mathematics, **90**:3, (2014), 737–742. Zbl 1325.35118
- [18] L. Åsgeirsson, *Über eine Mittelwertseigenschaft von Lösungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit Konstanten Koeffizienten*, Math. Ann., **113** (1936), 321–346. Zbl 0015.01804
- [19] D.N. Fox, *The solution and Huygens’ principle for a singular Cauchy problem*, J. Math. Mech., **8** (1959), 197–219. Zbl 0134.07802

- [20] P. Kuchment, *The Radon Transform and Medical Imaging*, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 2014. Zbl 1282.92001
- [21] I.A. Kipriyanov, *Singular Elliptic Boundary Value Problems*, M.: Nauka, 1997. Zbl 0892.35002
- [22] L.N. Lyakhov, *B-hypersingular integrals and its applications to Kipriyanov's functional classes and to integral equations with B-potential kernels*, Lipetsk, LGPU, 2007.
- [23] I.A. Kipriyanov, Yu.V. Zasorin, *On fundamental solution of wave equation with many singularities and Huygens principle*, Differ. Equ., **28**:3 (1992), 452–462. Zbl 0796.35092
- [24] L.N. Lyakhov, *RK $\gamma$ -transform with  $\gamma \in (0, 2]$  of weighted spherical means of functions. Åsgeirsson's equality*, Dokl. acad., **439**:5 (2011), 589–592. Zbl 1237.44003
- [25] E. L. Shishkina, *Equality for iterated weighted spherical means generated by the generalized translation*, Some problems of mathematics and mathematical education. St. Petersburg. Conference proceedings, **LXVI**, (2013), 143–145.
- [26] I.A. Kipriyanov, L.A. Ivanov, *On obtaining of fundamental solutions for homogeneous equations with singularities with respect to some variables*, Acad. nauk SSSR. Siberian branch, Tr. Semin. S. L. Soboleva, **1** (1983), 55–77. Zbl 0537.35013
- [27] W. E. Higgins, D.C. Munson, *A Hankel transform approach to tomographic image reconstruction*, IEEE Trans. Med. Im., **7** (1988), 59–72.
- [28] M. Halliwell, P.N. Wells, *Acoustical Imaging*, Springer, 2001.
- [29] G. Beylkin, *The fundamental identity for iterated spherical means and the inversion formula for diffraction tomography and inverse scattering*, Journal of Mathematical Physics, **24**:6 (1983), 1399–1400.
- [30] P.P. Ewald, *Introduction to the dynamical theory of X-ray diffraction*, Acta Crystallographica Section, **A25:103**, (1969), 103–108.

SERGEI MIHAILOVICH SITNIK  
 VORONEZH INSTITUTE OF THE MINISTRY OF INTERNAL AFFAIRS,  
 PR. PATRIOTOV, 53, VORONEZH,  
 394065, RUSSIA;  
 PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA,  
 M. - MAKLAYA STR., 6, MOSCOW,  
 117198, RUSSIA.  
*E-mail address:* mathsms@yandex.ru

ELINA LEONIDOVNA SHISHKINA  
 VORONEZH STATE UNIVERSITY,  
 UNIVERSITETSKAYA PL. 1, VORONEZH,  
 394000, RUSSIA.  
*E-mail address:* ilina\_dico@mail.ru