S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 911–922 (2016) УДК 519.62
DOI 10.17377/semi.2016.13.073 MSC 39A20

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Д. МИЖИДОН, К.А. МИЖИДОН

Abstract. In this paper we consider a boundary-value problem for a hybrid system of differential equations. A hybrid system of differential equations is understood as a system of differential equations composed of ordinary differential equations and partial differential equations. In the capacity of the theoretical foundations of our approach to investigation of the boundary-value problem for the hybrid system of differential equations we propose a method of finding eigenvalues for the boundary-value problem. Application of the Hamilton variation principle for constructing the equations of total dynamics for the systems of interconnected rigid bodies attached to the rod by elastic-damping links necessitates consideration of hybrid systems of differential equations.

Keywords: hybrid system of differential equations, eigenvalues of boundary value problem.

1. Введение

Применение вариационного принципа Гамильтона для построения уравнений динамики механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами приводит к рассмотрению гибридных систем дифференциальных уравнений (ГСДУ), исследованию которых в настоящее время не уделено должное внимание. Под ГСДУ понимаются системы дифференциальных уравнений, состоящие из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. В частности, к ГСДУ приходят при исследовании

Mizhidon, A.D., Mizhidon, K.A., Eigenvalues of boundary value problem for a hybrid system of differential equations.

Работа поддержана РФФИ (грант 15-08-00973).

Поступила 9 февраля 2016 г., опубликована 26 октября 2016 г.

механических колебаний элементов различных конструкций, деталей и механизмов, для которых расчетными схемами исследования является твердое тело (или система твердых тел), соединенное упругими связями со стержнем [1-8]. В работах [1-6] исследовались механические системы для различных конкретных расчетных схем (твердое тело, соединенное со стержнем; каскадная система твердых тел, соединенная со стержнем; горизонтально прикрепленные твердые тела к стержню; несколько твердых тел, соединенных между собой и прикрепленных к стержню). В работах [7, 8] были предложены обобщенные математические модели, представляющие собой ГСДУ заданной структуры, описывающие динамику класса механических систем, представляющих собой системы твердых тел, прикрепленных к балке Эйлера-Бернулли. Отметим, для исследования свободных колебаний систем из данного класса механических систем при тех или иных конкретных типовых расчетных схемах в зарубежных изданиях [9-18] каждый раз разрабатывались специальные ориентированные на них аналитические, численно-аналитические методы или использовался метод конечных элементов. Между тем собственные колебания механических систем, рассмотренных зарубежными исследователями [9-18], можно исследовать единым аналитико-численным методом, разработанным в [7, 8] на основе обобщенной математической модели.

В данной статье рассматривается краевая задача для ГСДУ, частным случаем которой является ГСДУ, представляющая собой обобщенную математическую модель систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к стержню [7, 8].

2. Постановка задачи

Рассмотрим ГСДУ вида

$$\begin{cases} A\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Cy(t) + B_1\dot{\bar{u}}(t) + C_1\bar{u}(t) = 0, \\ a\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + b\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}(x,t) + \\ + d_0 u(x,t) + d_1\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} + d_2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + ... + d_{2s}\dfrac{\partial^{2s} u(x,t)}{\partial x^{2s}} + \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(b^{i^T}\dot{y}(t) + \tilde{b}_i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c^{i^T}y(t) + \tilde{c}_i u(x,t)\right)\delta(x-a_i) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где A, B, C, B_1, C_1 – матрицы; a, b, $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}_i$ – постоянные, b^i, c^i – вектора; $y(t) \in R^n$; $u(x,t) \in R^1$; $\bar{u}(t) \in R^m$: $\bar{u}(t) = (u(a_1,t), u(a_2,t), ..., u(a_m,t))^T$; $\delta(x-a_i)$ – функция Дирака; $(\cdot)^T$ – знак транспонирования.

На функцию $u(x,t)$ наложены граничные условия

$$\frac{\partial^{i_k} u(0,t)}{\partial x^{i_k}} = 0, \quad \frac{\partial^{j_k} u(l,t)}{\partial x^{j_k}} = 0, \tag{2}$$

$$i_k \in I, \quad j_k \in I, \quad (k = 1,2,...,s), \quad I = \{0,1,2,...,s-1\}$$

Решение ГСДУ (1) следует понимать в обобщенном смысле. В связи с этим введем понятие обобщенного решения гибридной системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющей граничным условиям (2).

Для этого рассмотрим множество вектор-функций

$$K = \left\{ (\eta(\cdot), v(\cdot,\cdot))^T : \quad \eta(\cdot) \in C^n_{\infty,\,[0,\,T]}, \quad v(\cdot,\cdot) \in C_{\infty,\,\infty,\,D} \right\} \tag{3}$$

где $D = \left\{ (x,t) \in R^2 : \quad 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T \right\}$ – прямоугольник. Вектор-функции из множества (3) назовем основными.

Определение 1. *Вектор-функцию $y(\cdot) \in C^n_{2,[o,\,T]}$, скалярную функцию $u(\cdot,\cdot) \in C_{4,\,2,\,D}$ назовем обобщенным решением краевой задачи для ГСДУ (1), если функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (2) и для любой основной вектор-функции $(y(\cdot),\ v(\cdot,\cdot))^T \in K$ имеет место тождество*

$$\int\limits_0^T (A\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Cy(t) + B_1\dot{\bar{u}}(t) + C_1\bar{u}(t),\ \eta(t))\,dt +$$

$$+ \iint\limits_D \left(a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + b\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}(x,t) + \Lambda u(x,t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^m \left(b^{i^T}\dot{y}(t) + \tilde{b}_i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c^{i^T}y(t) + \tilde{c}_i u(x,t) \right)\delta(x-a_i) \right) \cdot v(x,t)dxdt = 0.$$

Здесь и далее введем в рассмотрение дифференциальный оператор

$$\Lambda = d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + \ldots + d_{2s}p^{2s}, \;\; p = \frac{\partial}{\partial x} \;\; \left(p = \frac{d}{dx} \right).$$

Заменой

$$y(t) = Ye^{\lambda t}, \quad u(x,t) = U(x)e^{\lambda t}$$

систему (1) можно свести к алгебраическо-дифференциальной системе уравнений

$$\begin{cases} (\lambda^2 A + \lambda B + C)Y + \lambda B_1\bar{U} + C_1\bar{U} = 0, \\ (a\lambda^2 + b\lambda)U(x) + \Lambda U(x) + \\ + \sum\limits_{i=1}^m \left((\lambda b^{i^T} + c^{i^T})Y + (\lambda\tilde{b}_i + \tilde{c}_i)U(x) \right)\delta(x-a_i) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $\bar{U} = (U(a_1), U(a_2), \ldots, U(a_m))^T$, при этом граничным условиям (2) соответствуют условия

$$\frac{\partial^{i_k}U(0)}{\partial x^{i_k}} = 0, \quad \frac{\partial^{j_k}U(l)}{\partial x^{j_k}} = 0, \tag{5}$$

$$i_k \in I, \quad j_k \in I, \quad (k = 1,2,\ldots,s), \quad I = \{0,1,2,\ldots,s-1\}.$$

Действительное или комплексное значение λ, при котором существует обобщенное решение краевой задачи (4)-(5), назовем собственным значением, а соответствующие собственным значениям решения краевой задачи собственными решениями краевой задачи.

Определение 2. *Функцию $U(\cdot) \in C_{4,\,[0,\,T]}$ и вектор $Y \in R^n$ назовем обобщенным решением вспомогательной краевой задачи (4)-(5), если они удовлетворяют системе алгебраических уравнений из (4), функция $U(x)$ удовлетворяет заданному граничному условию и для любой компоненты $v(\cdot,\cdot)$ основной* *вектор-функции* $(\eta(\cdot),\, v(\cdot,\cdot))^T \in K$, *при любом* $t \in [0,\, T]$ *имеет место следующее тождество*

$$\int\limits_0^l \Big((a\lambda^2+b\lambda)U(x)+\Lambda U(x)+ \tag{6}$$

$$+\sum_{i=1}^m \Big((\lambda b^{i^T}+c^{i^T})Y+(\lambda\tilde{b}_i+\tilde{c}_i)U(x)\Big)\delta(x-a_i)\Big)\cdot v(x,t)dx=0.$$

3. Вспомогательная краевая задача

При некоторых фиксированных значениях λ и Y рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$(a\lambda^2+b\lambda)U(x)+\Lambda U(x)+\sum_{i=1}^m \Big((\lambda b^{i^T}+c^{i^T})Y+(\lambda\tilde{b}_i+\tilde{c}_i)U(x)\Big)\delta(x-a_i)=0 \tag{7}$$

с граничными условиями (5).

Теорема 1. *При любых значениях* λ *и* Y *для обобщенного решения* $U(x)$ *дифференциального уравнения (7), удовлетворяющего краевым условиям (5) справедливо представление*

$$U(x)=-\sum_{i=1}^m G_i(x-a_i)\Big((\lambda b^{i^T}+c^{i^T})Y+(\lambda\tilde{b}_i+\tilde{c}_i)U(a_i)\Big), \tag{8}$$

где функции $G_i(x),\ (i=1,...,m)$ *обобщенные решения уравнения*

$$\big(a\lambda^2+b\lambda+\Lambda\big)\,G_i(x)=\delta(x) \tag{9}$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial^{i_k}G_i(-a_i)}{\partial x^{i_k}}=0,\quad \frac{\partial^{j_k}G_i(l-a_i)}{\partial x^{j_k}}=0, \tag{10}$$

$$i_k\in I,\quad j_k\in I,\quad (k=1,2,...,s),\quad I=\{0,1,2,...,s-1\}.$$

Отметим, функции $G_i(x),\ (i=1,...,m)$ являются обобщениями функции Грина, поэтому в дальнейшем их будем называть функции Грина краевой задачи (7) с граничными условиями (5).

Доказательство. Для функции $U(x)$, удовлетворяющей представлению (8), справедливость выполнения краевых условий (5) непосредственно следует из краевых условий (10) для функций $G_i(x),\ (i=1,...,m)$.

Отметим, из (6) следует, если функция $U(x)$ обобщенное решение дифференциального уравнения (7), то для любой компоненты $v(\cdot,\cdot)$ основной вектор-функции $(y(\cdot),\, v(\cdot,\cdot))\in K$, при любом $t\in[0,\, T]$ справедливо тождество

$$\int\limits_0^l \Big((a\lambda^2+b\lambda)U(x)+\Lambda U(x)\Big)\cdot v(x,t)dx= \tag{11}$$

$$=-\sum_{i=1}^m \Big[\Big((\lambda b^{i^T}+c^{i^T})Y+(\lambda\tilde{b}_i+\tilde{c}_i)U(a_i)\Big)\,v(a_i,t)\Big].$$

В том, что для обобщенного решения дифференциального уравнения (7) справедливо представление (8), убедимся непосредственной подстановкой (8) в левую часть (11).

Для этого представим (8) в виде

$$U(x) = -\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{l} G_i(x-\xi) q_i \Big((\lambda b^{i^T} + c^{i^T}) Y + (\lambda \tilde{b}_i + \tilde{c}_i) U(\xi) \Big) \cdot \delta(\xi - a_i)\, d\xi. \quad (12)$$

Подставим (12) в левую часть соотношения (11). Далее, меняя порядок интегрирования и учитывая (9), получим

$$-\int\limits_{0}^{l} \Bigg((a\lambda^2 + b\lambda + \Lambda) \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{l} G_i(x-\xi) \Big((\lambda b^{i^T} c^{i^T}) Y$$

$$+ (\lambda \tilde{b}_i + \tilde{c}_i) U(\xi) \Big) \cdot \delta(\xi - a_i)\, d\xi \Bigg) \cdot v(x,t)\, dx$$

$$= -\int\limits_{0}^{l} \Bigg\{ \int\limits_{0}^{l} \sum_{i=1}^{m} \Big[\big((a\lambda^2 + b\lambda + \Lambda) G_i(x-\xi) \big) \Big((\lambda b^{i^T} + c^{i^T}) Y$$

$$+ (\lambda \tilde{b}_i + \tilde{c}_i) U(\xi) \Big) \delta(\xi - a_i) \Big] d\xi \Bigg\} \cdot v(x,t)\, dx - \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{l} \Big[\Big((\lambda b^{i^T} + c^{i^T}) Y$$

$$+\ (\lambda \tilde{b}_i + \tilde{c}_i) U(\xi) \Big) \delta(\xi - a_i) \cdot \int\limits_{0}^{l} \big((a\lambda^2 b\lambda + \Lambda) G_i(x-\xi) \big) v(x,t)\, dx \Bigg] d\xi$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{l} \Bigg[\Big((\lambda b^{i^T} + c^{i^T}) Y + (\lambda \tilde{b}_i + \tilde{c}_i) U(\xi) \Big) \delta(\xi - a_i) \cdot \int\limits_{0}^{l} v(x,t) \delta(x - \xi) dx \Bigg] d\xi$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{0}^{l} \Big[\Big((\lambda b^{i^T} + c^{i^T}) Y + (\lambda \tilde{b}_i + \tilde{c}_i) U(\xi) \Big) v(\xi,t) \delta(\xi - a_i) \Big] d\xi$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \Big[\Big(\Big((\lambda b^{i^T} + c^{i^T}) Y + (\lambda \tilde{b}_i + \tilde{c}_i) U(a_i) \Big) \Big) v(a_i,t) \Big],$$

что, совпадает с правой частью (11).

Таким образом, для обобщенного решения дифференциального уравнения (7) справедливо представление (11). □

4. Функции Грина

Для нахождения функций Грина $G_1(x)$, $G_2(x)$,…,$G_m(x)$, входящих в (8) имеем m краевых задач для уравнения

$$\begin{cases} \big(a\lambda^2 + b\lambda + \Lambda\big) G(x) = \delta(x), \\ \frac{\partial^{i_k} G(-a_i)}{\partial x^{i_k}} = 0, \quad \frac{\partial^{j_k} G(l-a_i)}{\partial x^{j_k}} = 0, \\ i_k \in I, \quad j_k \in I, \quad (k = 1, 2, ..., s), \quad I = \{0, 1, 2, ..., s-1\}. \end{cases} \quad (13)$$

Общее решение $G(x)$ уравнения

$$\big(a\lambda^2 + b\lambda + \Lambda\big) G(x) = \delta(x) \quad (14)$$

можно найти в виде суммы общего обобщенного решения $G_0(x, c_1, ..., c_{2s})$ однородного уравнения

$$\left(a\lambda^2 + b\lambda + \Lambda\right) G(x) = 0 \tag{15}$$

и некоторого частного обобщенного решения $\tilde{G}(x)$ неоднородного уравнения (14), то есть

$$G(x) = G_0(x, \hat{c}_1, ..., \hat{c}_{2s}) + \tilde{G}(x), \tag{16}$$

где $\hat{c}_1, ..., \hat{c}_{2s}$ – произвольные постоянные.

Теорема 2. *Если $G(x) = \tilde{g}(x)$ частное решение однородного дифференциального уравнения (15), удовлетворяющее начальным условиям*

$$G(0) = 0, \quad \frac{dG}{dx}(0) = 0, ..., \frac{d^{n-2}G}{dx^{n-2}}(0) = 0, \quad \frac{d^{n-1}G}{dx^{n-1}}(0) = \frac{1}{d_n}, \tag{17}$$

то обобщенное решение уравнения (14) запишется в виде

$$\tilde{G}(x) = \tilde{g}(x)\,\theta(x), \tag{18}$$

где $\theta(x)$ – классическая функция Хэвисайда.

Доказательство. Функция $\tilde{G}(x)$, определяемая соотношением (18), будет обобщенным решением уравнения (14), если для любой компоненты $v(\cdot,\cdot)$ основной вектор-функции $(\eta(\cdot),\, v(\cdot,\cdot))^T \in K$, при любом $t \in [0,\, T]$ имеет место следующее тождество

$$\int \left(d_n \frac{d^n \tilde{G}(x)}{dx^n} + d_{n-1} \frac{d^{n-1}\tilde{G}(x)}{dx^{n-1}} + ... + d_1 \frac{d\tilde{G}(x)}{dx} \right. \tag{19}$$

$$\left. + (a\lambda^2 + b\lambda + d_0)\tilde{G}(x) \right) v(x,t)dx = v(0,t).$$

При любом $i = 1, 2, ..., n-1$ для любой основной функции справедливо соотношение

$$\int d_i \frac{d^i(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx^i}\,\varphi(x)dx = \int d_i \frac{d^i \tilde{g}(x)}{dx^i}\theta(x)\,\varphi(x)dx. \tag{20}$$

Справедливость (20) докажем методом математической индукции.

При $i = 1$, учитывая, что производная от функции Хэвисайда есть δ-функция Дирака: $\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$, учитывая начальное условие $\tilde{g}(0) = 0$, имеем

$$\int d_1 \frac{d(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx}\varphi(x)dx = \int d_1 \left(\frac{d\tilde{g}(x)}{dx}\theta(x) + \tilde{g}(x)\delta(x) \right) \varphi(x)dx$$
$$= \int d_1 \frac{d\tilde{g}(x)}{dx}\theta(x)\varphi(x)dx + d_1\tilde{g}(0)\varphi(0) = \int d_1 \frac{d\tilde{g}(x)}{dx}\theta(x)\varphi(x)dx.$$

Пусть (20) выполняется при некотором номере $i = 2, 3, ..., n-2$. Докажем справедливость при $i + 1$.

Учитывая начальные условия $\frac{d^i\tilde{g}(0)}{dx^i}=0$, получим

$$\int d_{i+1}\frac{d^{i+1}(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx^{i+1}}\,\varphi(x)dx=\int d_{i+1}\frac{d}{dx}\frac{d^i(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx^i}\,\varphi(x)dx$$
$$=\int d_{i+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{d^i\tilde{g}(x)}{dx^i}\theta(x)\right)\varphi(x)dx=\int d_{i+1}\left(\frac{d^{i+1}\tilde{g}(x)}{dx^{i+1}}\theta(x)\right.$$
$$\left.+\frac{d^i\tilde{g}(x)}{dx^i}\delta(x)\right)\varphi(x)dx=\int d_{i+1}\frac{d^{i+1}\tilde{g}(x)}{dx^{i+1}}\theta(x)\,\varphi(x)dx+a_{i+1}\frac{d^i\tilde{g}(0)}{dx^i}\varphi(0)$$
$$=\int d_{i+1}\frac{d^{i+1}\tilde{g}(x)}{dx^{i+1}}\theta(x)\,\varphi(x)dx.$$

Таким образом, при всех $i=1,2,...,n-1$ выполняется (20).

Отметим, при $i=n$ в силу начального условия $\frac{d^{n-1}\tilde{g}}{dx^{n-1}}(0)=\frac{1}{d_n}$ из соотношения

$$\int d_n\frac{d^n(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx^n}\,\varphi(x)dx=\int d_n\frac{d^n\tilde{g}(x)}{dx^n}\theta(x)\,\varphi(x)dx+d_n\frac{d^{n-1}\tilde{g}(0)}{dx^{n-1}}\varphi(0)$$

будем иметь

$$\int d_n\frac{d^n(\tilde{g}(x)\theta(x))}{dx^n}\,\varphi(x)dx=\int d_n\frac{d^n\tilde{g}(x)}{dx^n}\theta(x)\,\varphi(x)dx+\varphi(0). \qquad (21)$$

В силу доказанных тождеств (20) и (21), учитывая, что $\tilde{g}(x)$ решение однородного уравнения (15), подставив $g(x)=\tilde{g}(x)\,\theta(x)$ в левую часть (19), получим

$$\int\left(d_n\frac{d^n\tilde{g}(x)}{dx^n}+d_{n-1}\frac{d^{n-1}\tilde{g}(x)}{dx^{n-1}}+...+d_1\frac{d\tilde{g}(x)}{dx}\right.$$
$$\left.+(a\lambda^2+b\lambda+a_0)\tilde{g}(x)\right)\theta(x)\varphi(x)dx+\varphi(0)=\varphi(0),$$

что совпадает с правой частью (19). □

Отметим, теорема 2 является следствием теоремы о нахождении фундаментального решения линейного дифференциального оператора [19].

Для решения краевой задачи (13) (нахождение функций Грина $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., $G_m(x)$), следует определить произвольные константы $\hat{c}_1,...,\hat{c}_{2s}$, входящие в общее решение (16) из условий выполнения граничных условий (10).

Пример. Найдем обобщенное решение уравнения

$$\lambda^2aG(x)+d_4\frac{d^4G(x)}{dx^4}=\delta(x). \qquad (22)$$

Общее решение $G_0(x)$ однородного уравнения

$$\lambda^2aG(x)+d_4\frac{d^4G(x)}{dx^4}=0$$

можно записать в виде

$$G_0(x,\hat{c}_1,\hat{c}_2,\hat{c}_3,\hat{c}_4)=\tilde{c}_1e^{k_1x}+\tilde{c}_2e^{k_2x}+\tilde{c}_3e^{k_3x}+\tilde{c}_4e^{k_4x} \qquad (23)$$

где $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, $\hat{c}_3$, $\hat{c}_4$ – произвольные постоянные; k_1, k_2, k_3, k_4 – корни характеристического уравнения, которые определяются следующим образом

$$k_1=(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})m,\quad k_3=(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})m,$$

$$k_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})m, \quad k_4 = (-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})m.$$

Здесь $m^4 = \frac{\lambda^2 a}{d_4}$. Решение однородного уравнения (23), удовлетворяющее в соответствии с (17) условиям

$$G(0) = 0, \quad \frac{dG}{dx}(0) = 0, \ldots, \frac{d^2G}{dx^2}(0) = 0, \quad \frac{d^3G}{dx^3}(0) = \frac{1}{\lambda^2 d_4}$$

найдется в виде

$$G(x) = \alpha_1 \left(e^{k_2 x} - e^{k_1 x}\right) + \alpha_2 \left(e^{k_3 x} - e^{k_1 x}\right) + \alpha_3 \left(e^{k_4 x} - e^{k_1 x}\right)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{b(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)(k_2 - k_4)}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{b(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)(k_3 - k_4)},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{b(k_4 - k_1)(k_4 - k_2)(k_4 - k_3)}.$$

Таким образом, комплексное обобщенное решение $\tilde{G}(x)$ неоднородного уравнения (22) запишется следующим образом

$$\tilde{G}(x) = \theta(x) \left(\alpha_1 \left(e^{k_2 x} - e^{k_1 x}\right) + \alpha_2 \left(e^{k_3 x} - e^{k_1 x}\right) + \alpha_3 \left(e^{k_4 x} - e^{k_1 x}\right)\right). \tag{24}$$

5. Уравнение поиска собственных значений

Принимая в (8) последовательно значения $x = a_1$, $x = a_2$, ..., $x = a_m$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $U(a_1)$, $U(a_2)$, ..., $U(a_m)$

$$(1 + G_j(0)(\lambda\tilde{b}_j + \tilde{c}_j)U(a_j) + \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{m} G_i(a_j - a_i)(\lambda\tilde{b}_i + \tilde{c}_i)U(a_i) \tag{25}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} G_i(a_j - a_i)(\lambda b^{i^T} + c^{i^T})Y, \quad (j = 1, ..., m).$$

Используя матричные обозначения, систему (25) можно записать в виде

$$NY - M\bar{U} = 0, \tag{26}$$

где M – матрица системы размерности $m \times m$

$$M = \begin{pmatrix} (1 + G_1(0)(\lambda\tilde{b}_1 + \tilde{c}_1)) & \ldots & G_m(a_1 - a_m)(\lambda\tilde{b}_m + \tilde{c}_m) \\ G_1(a_2 - a_1)(\lambda\tilde{b}_1 + \tilde{c}_1) & \ldots & G_m(a_2 - a_m)(\lambda\tilde{b}_m + \tilde{c}_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_1(a_m - a_1)(\lambda\tilde{b}_1 + \tilde{c}_1) & \ldots & (1 + G_m(0)(\lambda\tilde{b}_m + \tilde{c}_m)), \end{pmatrix} \tag{27}$$

N – матрица размерности $m \times n$

$$N = \begin{pmatrix} G_1(0)(\lambda b^{1^T} + c^{1^T}) & \ldots & G_m(a_1 - a_m)(\lambda b^{m^T} + c^{m^T}) \\ G_1(a_2 - a_1)(\lambda b^{1^T} + c^{1^T}) & \ldots & G_m(a_2 - a_m)(\lambda b^{m^T} + c^{m^T}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_m(a_m - a_1)(\lambda b^{1^T} + c^{1^T}) & \ldots & G_m(0)(\lambda b^{m^T} + c^{m^T}) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Объединив (26) с алгебраической системой из алгебраическо-дифференциальной системы уравнений (4), получим систему линейных, однородных алгебраических уравнений относительно вектора амплитуд Y и $\bar{U}$

$$\begin{cases} (\lambda^2 A + \lambda B + C)Y + (\lambda B_1 + C_1)\bar{U} = 0, \\ \quad NY - M\bar{U} = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Система (29) имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Приравняв определитель системы (29) к нулю, получим уравнение для нахождения собственных значений

$$det \begin{pmatrix} (\lambda^2 A + \lambda B + C) & (\lambda B_1 + C_1) \\ N & -M \end{pmatrix} = 0. \tag{30}$$

6. Пример. Задача исследования механической системы.

Рассмотрим механическую систему: стержень с установленными на пружинах тремя твердыми телами, расчетная схема, которой приведена на рис. 1. Левый конец стержня жестко закреплен, а правый свободен. Данная механическая система была исследована в работе [18]. Для исследования такой системы [18] был использован метод (на языке оригинала "the analytical-and-numerical-combined method (ANSM)"), суть, которого сводится к разбиению системы на отдельные подсистемы и в дальнейшем к сшивке решений, полученных для подсистем, в точках крепления пружин к стержню.

Твердые тела массы m_1, m_2, m_3 установлены на пружинах с коэффициентами жесткости c_1, c_2, c_3 на расстояниях a_1, a_2, a_3 от левого конца стержня и совершают поступательные перемещения $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ в направлении осей O_1z_1, O_2z_2, O_3z_3. Точки a_1, a_2, a_3 совпадают с положениями равновесия тел. Функция $u(x,t)$ описывает поперечные перемещения точек стержня. На функцию $u(x,t)$ следует наложить граничные условия, соответствующие жесткой заделке на левом конце и свободному правому концу

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(l,t) = 0. \tag{31}$$

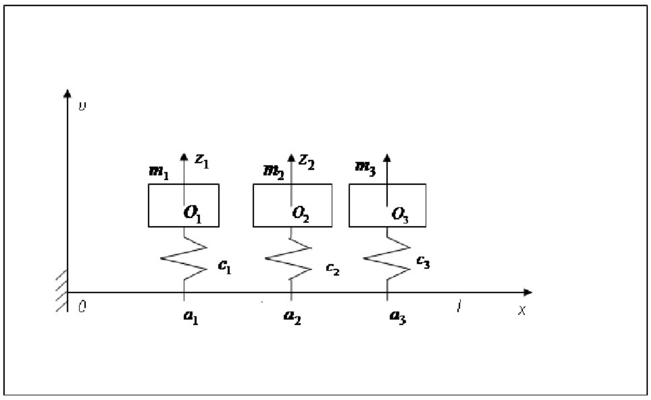

Рис. 1. Расчетная схема системы

ГСДУ, описывающая движение рассматриваемой системы, полученная на основании принципа Гамильтона, имеет вид:

$$\begin{cases} m_1\ddot{z}_1 + b_1\left(\dot{z}_1 - \frac{\partial u}{\partial t}(a_1,t)\right) + c_1(z_1 - u(a_1,t)) = 0, \\ m_2\ddot{z}_2 + b_2\left(\dot{z}_2 - \frac{\partial u}{\partial t}(a_2,t)\right) + c_2(z_2 - u(a_2,t)) = 0, \\ m_3\ddot{z}_3 + b_3\left(\dot{z}_3 - \frac{\partial u}{\partial t}(a_3,t)\right) + c_3(z_3 - u(a_3,t)) = 0, \\ \rho F\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = (c_1(z_1 - u(x,t)) + b_1\left(\dot{z}_1 - \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)\delta(x-a_1) \\ \quad + (c_2(z_2 - u(x,t)) + b_2\left(\dot{z}_2 - \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)\delta(x-a_2) \\ \quad + (c_3(z_3 - u(x,t)) + b_3\left(\dot{z}_3 - \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)\delta(x-a_3). \end{cases} \tag{32}$$

где ρ — объемная плотность материала стержня, F — площадь поперечного сечения стержня, E, G — соответственно модуль упругости первого рода материала стержня и момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, перпендикулярной плоскости изгибных колебаний стержня соответственно, b — коэффициент вязкого трения материала пружины.

ГСДУ (32) является частным случаем исследуемой ГСДУ (1). Для системы (32) параметры, входящие в ГСДУ (1), определяются следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 \end{pmatrix}, \ C_1 = \begin{pmatrix} -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 \end{pmatrix},$$

$a = \rho F,\ b = 0,\ \Lambda = EJ\frac{\partial^4}{\partial x^4},\ m = 3,\ {b^1}^T = (b_1, 0, 0)^T,\ {b^2}^T = (0, b_2, 0)^T,$
${b^3}^T = (0, 0, b_3)^T,\ \tilde{b}_1 = -b_1,\ \tilde{b}_2 = -b_2,\ \tilde{b}_3 = -b_3,\ {c^1}^T = (c_1, 0, 0)^T,$
${c^2}^T = (0, c_2, 0)^T,\ {c^3}^T = (0, 0, c_3)^T,\ \tilde{c}_1 = -c_1,\ \tilde{c}_2 = -c_2,\ \tilde{c}_3 = -c_3.$

Для нахождения собственных значений краевой задачи (31)-(32) следует:

1. Найти функции Грина $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$. Отметим, для рассматриваемой задачи можно воспользоваться общим решением уравнения (22) (см. пример), которое можно представить в виде

$$G(x) = G_0(x, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{c}_4 + \tilde{G}(x), \tag{33}$$

где общее решение однородного уравнения $G_0(x, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{c}_4)$ и частное обобщенное решение $\tilde{G}(x)$ неоднородного уравнения (22) определяются соответственно соотношениями (23) и (24). Произвольные константы $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, $\hat{c}_3$, $\hat{c}_4$, входящие в общее решение (33) определяются из условий выполнения граничных условий, которые при нахождении функций $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$ в силу (31) соответственно имеют вид

$$G_i(-a_i) = 0,\ \frac{\partial G_i(-a_i)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial^2 G_i(l-a_i)}{\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial^3 G_i(l-a_i)}{\partial x^3} = 0,\ \ (i = 1, 2, 3).$$

2. Составить матрицу

$$\begin{pmatrix} (\lambda^2 A + \lambda B + C) & (\lambda B_1 + C_1) \\ N & -M \end{pmatrix}, \tag{34}$$

где матрицы M и N находятся согласно (27) и (28).

3. Организовать процедуру вычисления определителя матрицы (34).

4. Приравняв определитель матрицы (34) к нулю, найти корни полученного уравнения.

Замечание. Разработка алгоритмического обеспечения, нахождения корней уравнения (30), выходит за рамки данной статьи. В связи с этим для подтверждения достоверности предложенного подхода, для построения уравнений для нахождения собственных значений (3) были использованы данные, приведенные в работе [18]:

$l = 1m$ — длина консольного стержня;

$\rho F = 0.675kg/m$ — масса единицы длины стержня;

$J = 5.20833 \cdot 10^{-10}m^4$ — масса единицы длины стержня момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси, проходящей через центр тяжести сечения и перпендикулярной плоскости колебаний стержня;

$a_1 = 0.1m$, $a_2 = 0.5m$, $a_3 = 0.9m$ — точки, в которых крепятся осцилляторы;

$b_1 = 0.1Ns/m$, $b_2 = 0.1Ns/m$, $b_3 = 0.1Ns/m$ — коэффициенты вязкого трения;

$c_1 = 0.1N/m$, $c_2 = 0.1N/m$, $c_3 = 0.1N/m$ — коэффициенты жесткости пружин в осцилляторах;

$E = 7 \cdot 10^10N/m^2$ — модуль Юнга;

Подстановка первых двух собственных значений, приведенных в работе [18]

$$\lambda_1 = -0.255 + 25.829i, \quad \lambda_2 = -0.235 + 161.941i,$$

в уравнение для нахождения собственных значений (30) показала, что данные значения являются приближенными корнями уравнения (30).

References

[1] S.G. Barguev, A.D. Mizhidon, *Determination of the eigen-frequencies of a simplest mechanical system on an elastic basement*, Bulletin of Buryat state university, **9** (2009), 58–63 (in Russian).

[2] A.D. Mizhidon, S.G. Barguev, N.V. Lebedeva, *Investigation of a vibro-protection system with elastic basement*, Modern Technologies. System Analysis. Modeling., **2(22)** (2009), 13–20 (in Russian).

[3] A.D. Mizhidon, S.G. Barguev, *On eigen-vibrations of a cascade-type mechanical system mounted on an elastic rod*, Bulletin of ESSUTM, **1** (2010), 26–32 (in Russian).

[4] S.G. Barguev, E.V. Eltoshkina, A.D. Mizhidon, M.Zh. Dabaeva (M.Zh. Tsytsyrenova) *Investigation of the possibility of extinguishing of n masses mounted on an elastic rod*, Modern Technologies. System Analysis. Modeling., **4(28)** (2010), 78–84 (in Russian).

[5] S.G. Barguev, A.D. Mizhidon, *Solution of the initial-boundary-value problem of the oscillator mounted on the elastic rod*, Bulletin of BSU. Mathematics, Informatics., **2** (2012), 63–68 (in Russian).

[6] A.D. Mizhidon, S.G. Barguev, *A boundary-value problem for one hybrid system of differential equations*, Bulletin of Buryat state university, **9** (2013), 130–137 (in Russian).

[7] A.D. Mizhidon, M.Zh. Dabaeva (M.Zh. Tsytsyrenova), *A generalized mathematical model for a system of rigid bodies mounted on a flexible rod*, Bulletin of ESSUTM, **6** (2013), 5–12 (in Russian).

[8] A.D. Mizhidon, M.Zh. Dabaeva, *Mathematical modeling and the account for damping properties of flexible links in a generalized mathematical model of a system with rigid bodies mounted on an elastic rod*, Bulletin of ESSUTM, **2** (2015), 10–17 (in Russian).

[9] S. Kukla, B. Posiadala, *Free vibrations of beams with elastically mounted masses*, Journal of Sound and Vibration, **175**:4 (1994), 557–564. Zbl 0952.74527

[10] P.D. Cha, *Free vibration of a uniform beam with multiple elastically mounted two-degree-of-freedom systems*, Journal of Sound and Vibration, **307**:1-2 (2007), 386–392.

[11] J.-J. Wu, A.R. Whittaker, *The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple two-DOF spring-mass systems*, Journal of Sound and Vibration, **227**:2 (1999), 361–381.

[12] J.-S. Wu, H.-M. Chou, *A new approach for determining the natural frequencies and mode shapes of a uniform beam carrying any number of spring masses*, Journal of Sound and Vibration, **220**:3 (1999), 451–468.

[13] J.-S. Wu, *Alternative approach for free vibration of beams carrying a number of two-degree of freedom spring-mass systems*, Journal of Structural Engineering – ASCE, **128**:12 (2002), 1604–1616.

[14] S. Naguleswaran, *Transverse vibration of an Euler-Bernoulli uniform beam carrying several particles*, International Journal of Mechanical Sciences, **44**:12 (2002), 2463–2478. Zbl 1113.74350

[15] S. Naguleswaran, *Transverse vibration of an Euler-Bernoulli uniform beam on up a five resilient supports including end*, Journal of Sound and Vibration, **261**:2 (2003), 372–384.

[16] H. Su, J.R. Banerjee, *Exact natural frequencies of structures consisting of two part beam-mass systems*, Structural Engineering and Mechanics, **19**:5 (2005), 551–566.

[17] H.-Y. Lin, Y.-C. Tsai, *Free vibration analysis of a uniform multi-span beam carrying multiple spring-mass systems*, Journal of Sound and Vibration, **302**:3 (2007), 442–456.

[18] J.-S. Wu, D.-W. Chen, *Dynamic analysis of uniform cantilever Beam carrying a number of elastically mounted point masses with dampers*, Journal of Sound and Vibration, **229**:3 (2000), 549–578.

[19] V.S. Vladimirov, *Generalized solutions in mathematical physics* [in Russian], Moscow: Nauka, 1976.

Arsalan Dugarovich Mizhidon
East Siberia State University of Technology and Management,
Kluchevskaya str, 40V,
670013, Ulan-Ude, Russia,
Buryat State University,
Smolina str, 24A,
670000, Ulan-Ude, Russia
E-mail address: miarsdu@mail.ru

Klara Arsalanovna Mizhidon
East Siberia State University of Technology and Management,
Kluchevskaya str, 40V,
670013, Ulan-Ude, Russia
E-mail address: migka@mail.ru