S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 955–971 (2016) УДК 512.865.3
DOI 10.17377/semi.2016.13.077 MSC 22E15 22E43 15B52

О СЛУЧАЙНОМ ВЫБОРЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОВОРОТОВ ЛОРЕНЦЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В.А. ЧУРКИН, А.И. ИЛЬИН

Abstract. Elliptic and hyperbolic rotations of the $(n+1)$-dimensional Lorentz space can be represented as exponential of rank 2 matrices of the real Lie algebra $\mathfrak{so}(1,n)$. We shown that the ratio of the volumes of the corresponding sets of matrices Euclidean norm $\leqslant r$ is equal to $(\sqrt{2})^{n-1}-1$ for all $r > 0$. Consequently the portion of hyperbolic rotations near identity decreases exponentially with increasing n. Another corollary is that in case of Minkovski space of special relativity choose of elliptic and hyperbolic rotations near identity is equiprobable.

Keywords: elliptic rotation, hyperbolic rotation, random matrix.

1. Введение

В работе исследуется группа Ли $O(1,n)$ линейных преобразований вещественных пространств размерности $n+1$, сохраняющих стандартную квадратичную форму типа $(1,n)$ при $n \geqslant 1$. Такое линейное преобразование, форма и пространство, снабженное соответствующим скалярным произведением, называются лоренцевыми. При $n=3$ и условии линейности лоренцевы преобразования и только они сохраняют пространственно-временной интервал в модели Минковского специальной теории относительности.

Churkin, V.A., Ilin, A.I., On random choice of elliptic and hyperbolic rotations of the Lorentz spaces.

Первый автор поддержан грантом Российского научного фонда (проект РНФ 14-21-00065).

Поступила 9 февраля 2016 г., опубликована 8 ноября 2016 г.

Будем считать, что все преобразования заданы матрицами в алгебре вещественных матриц порядка $n+1$, которую будем считать евклидовым пространством с метрикой, порожденной стандартной нормой $\|X\| = \sqrt{\sum_{ij} x_{ij}^2}$. Рассматриваемые далее подпространства и подмногообразия в алгебре матриц снабжаются, как правило, евклидовой метрикой, индуцированной из объемлющей алгебры матриц, а также соответствующими формами объема.

Лоренцевы преобразования, сохраняющие пространственно-временную ориентацию и имеющие подпространство неподвижных точек коразмерности 2, можно разделить на три типа. Эллиптические повороты таковы, что орбита почти любой точки пространства относительно итераций преобразования лежит на подходящем эллипсе. Аналогично определяются гиперболические и параболические повороты. Множество преобразований одного типа имеет естественную структуру евклидова многообразия. Многообразие параболических поворотов содержится в общей границе многообразия эллиптических поворотов и многообразия гиперболических поворотов и имеет коразмерность 1 в каждом из них. Поэтому при случайном выборе имеет смысл сравнивать только выбор эллиптических или гиперболических поворотов.

В работе проведено сравнение по объему в малой окрестности единицы для множеств матриц из группы $O(1,n)$, с одной стороны задающих эллиптические повороты, а с другой — гиперболические. С этой целью используется экспоненциальное отображение малой шаровой окрестности нуля в касательной алгебре Ли $\mathfrak{so}(1,n)$, состоящей из матриц, кососимметричных относительно стандартной симметричной билинейной формы типа $(1,n)$. Дифференциал экспоненциального отображения в нуле является тождественным и почти не искажает объемы. Поэтому достаточно сравнить по объему множества матриц в шаровой окрестности нуля в алгебре Ли, экспоненты которых дают соответственно матрицы эллиптических или гиперболических поворотов.

Основной результат — следующая

Теорема 1. *В ортогональной вещественной алгебре Ли $\mathfrak{so}(1,n)$, состоящей из матриц, кососимметричных относительно стандартной симметричной билинейной формы типа $(1,n)$, отношение объемов множеств матриц евклидовой нормы $\leqslant r$, экспоненты которых дают соответственно эллиптические и гиперболические повороты, равно $(\sqrt{2})^{n-1}-1$ при всех $r>0$.*

Следствие 1. *Для пространства Минковского специальной теории относительности случайный выбор эллиптических или гиперболических поворотов вблизи тождественного преобразования при равномерном распределении равновероятен.*

Следствие 2. *Доля объема множества гиперболических поворотов в объеме множества эллиптических или гиперболических поворотов в малой шаровой окрестности единицы группы Ли $O(1,n)$ близка к $1/(\sqrt{2})^{n-1}$ и с ростом n уменьшается экспоненциально.*

Вычисление объемов основано на построенной далее почти однозначной параметризации указанных множеств с помощью присоединенного действия максимальной связной компактной подгруппы из группы Ли $SO_+(1,n)$ на алгебре Ли $\mathfrak{so}(1,n)$ и найденной относительно действия канонической форме матриц из алгебры Ли. Это было сделано в общем случае, когда подпространство неподвижных точек преобразований имеет коразмерность $2k$. Если $2k<n+1$, то

множества гиперболических и эллиптических преобразований имеют одинаковую размерность как многообразия и допускают сравнение по объему, даже если мера каждого многообразия в шаре алгебры Ли равна нулю. В этом различие с ситуацией, рассмотренной, например, в [1], [2]. К сожалению, вычислить и проинтегрировать якобиан параметризации в явной форме удалось только при $k = 1$. В общем случае доказана невырожденность дифференциала параметризации.

2. Постановка задачи

Лоренцево пространство — это конечномерное вещественное векторное пространство, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой типа $(n, 1)$ — лоренцевым скалярным произведением. Будем считать, что $n \geqslant 1$ и что в конкретной модели $\mathbb{R}^{1,n}$ скалярное произведение задаётся формулой

$$(x, y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_{n+1}y_{n+1}.$$

Базис лоренцева пространства называется ортонормированным, если в этом базисе скалярное произведение векторов выражается через координаты векторов указанной формулой. Конус светоподобных векторов с нулевым скалярным квадратом делит лоренцево пространство на множество пространственноподобных векторов с положительным скалярным квадратом и две полы времениподобных векторов с отрицательным скалярным квадратом. В таком пространстве изотропные подпространства, на которых форма обращается в нуль, имеют размерность не более 1 и принадлежат световому конусу, а сужение формы на подпространство, касающееся конуса, вырождено. Если подпространство пересекает световой конус только по нулю, то сужение формы на нем положительно определено, т. е. задает евклидово скалярное произведение. Если же подпространство содержит два линейно независимых светоподобных вектора, то сужение формы на нем невырождено и задает лоренцево скалярное произведение.

Линейные преобразования пространства $\mathbb{R}^{1,n}$, сохраняющие лоренцево скалярное произведение, образуют группу Ли $O(1, n)$. Она имеет четыре компоненты связности. Компонента связности единицы — это подгруппа $SO_+(1, n)$ группы $O(1, n)$, состоящая из линейных преобразований, сохраняющих пространственную и временную ориентацию. Она действует транзитивно на множестве всех одинаково ориентированных ортонормированных базисов лоренцева пространства. Это значит, что матрица перехода имеет определитель 1, а первые векторы базисов входят в одну полу светового конуса, т. е. их лоренцево скалярное произведение отрицательно. Конструктивно группа $SO_+(1, n)$ состоит из вещественных матриц S порядка $n + 1$, для которых

$$S^\top JS = J,\ \det S = 1,\ (e_1,\ Se_1) < 0,$$

где $J = \mathrm{Diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ — матрица формы.

Известна классификация преобразований из $SO_+(1, n)$ (см., например, [3, с. 285]).

В размерности 2 группа $SO_+(1, 1)$ состоит в точности из тождественного преобразования и гиперболических поворотов плоскости с матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь параметр $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Матрица указана в ортонормированном базисе. Собственные значения $e^t,\ e^{-t}$. Собственные векторы светоподобны. Эллиптических и параболических поворотов в размерности 2 нет.

В размерности 3 группа $SO_+(1,2)$ кроме единицы состоит из поворотов всех трех типов.

1) *Гиперболические повороты* в подходящем ортонормированном базисе $\mathbb{R}^{1,2}$ задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

В данном случае лоренцево пространство — ортогональная сумма инвариантной лоренцевой плоскости, в которой совершается гиперболический поворот, и неподвижной евклидовой прямой. Собственные значения $e^t,\ e^{-t},\ 1$.

2) *Эллиптические повороты* в подходящем ортонормированном базисе $\mathbb{R}^{1,2}$ имеют матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad t \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

В данном случае лоренцево пространство — ортогональная сумма неподвижной времениподобной прямой и инвариантной евклидовой плоскости, в которой совершается эллиптический поворот. Собственные значения $e^{it},\ e^{-it},\ 1$.

3) *Параболические повороты* в подходящем ортонормированном базисе имеют матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 + t^2/2 & t & -t^2/2 \\ t & 1 & -t \\ t^2/2 & t & 1 - t^2/2 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ t & 0 & -t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае существует неподвижная прямая на световом конусе и содержащая ее инвариантная плоскость, касающаяся светового конуса, жорданова нормальная форма — жорданова клетка порядка 3, все собственные значения равны 1.

В общем случае лоренцево пространство относительно преобразования из $SO_+(1,n)$ распадается в ортогональную сумму невырожденных инвариантных прямых, плоскостей и, возможно, одного трехмерного лоренцева подпространства. Преобразование называется гиперболическим, если оно действует на первой инвариантной лоренцевой плоскости как гиперболический поворот, остальные плоскости евклидовы и преобразование действует на них как эллиптический поворот, прямые евклидовы и действие на них тождественно. Преобразование называется эллиптическим, если оно действует тождественно на первой инвариантной времениподобной прямой, как эллиптический поворот на инвариантных евклидовых плоскостях (такие существуют) и тождественно на остальных прямых. Преобразование называется параболическим, если оно действует как параболический поворот на инвариантном трехмерном лоренцевом подпространстве, а на остальных евклидовых слагаемых как эллиптический поворот или тождественно.

Преобразование имеет тип k, если коразмерность подпространства неподвижных векторов равна $2k$. Это означает, что имеется ровно k инвариантных слагаемых, на которых преобразование действует нетождественно как гиперболический, эллиптический или параболический поворот. Обозначим соответствующие множества преобразований из $SO_+(1,n)$ через H_k, E_k, P_k. Эти обозначения не учитывают размерность лоренцева пространства. Поэтому если нужно уточнить размерность $n+1$ лоренцева пространства, то пишем H_k^n, E_k^n, P_k^n.

Преобразования типа 1 будем называть для краткости *поворотами.*

Отметим, что матрица из $SO_+(1,n)$ имеет тип k тогда и только тогда, когда ее разность с единичной матрицей имеет ранг $2k$. Поэтому объединение множеств эллиптических, гиперболических и параболических преобразований всех типов $\leqslant k$ вместе с тождественным преобразованием образует алгебраическое многообразие. Малая окрестность единицы в этом многоообразии разбивается на три части: множество эллиптических преобразований типа $\leqslant k$, множество гиперболических преобразований типа $\leqslant k$, множество параболических преобразований типа $\leqslant k$. Наша цель — сравнить по объему эти части. Для этого параметризуем окрестность единицы с помощью экспоненциального отображения из алгебры Ли.

Для группы $SO_+(1,n)$ ее алгебра Ли

$$\mathfrak{so}(1,n) = \{X \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \mid (JX)^\top = -JX\}$$

состоит из матриц, кососимметричных относительно формы.

Множества матриц из $\mathfrak{so}(1,n)$, экспоненты которых дают эллиптические, гиперболические, параболические или всевозможные лоренцевы преобразования типа k обозначим соответственно через $\mathfrak{e}_k$, $\mathfrak{h}_k$, $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{l}_k$. Если надо уточнить размерность лоренцева пространства, то пишем $\mathfrak{e}_k^n$, $\mathfrak{h}_k^n$, $\mathfrak{p}_k^n$, $\mathfrak{l}_k^n$.

Отображение $\exp : \mathfrak{so}(1,n) \to SO_+(1,n)$ задает диффеоморфизм подходящей окрестности нуля алгебры Ли и окрестности единицы группы Ли. Ограничим $\exp$ на некоторый шар $B(r)$ радиуса r с центром в нуле, полностью лежащий в указанной окрестности нуля алгебры Ли. Получим диффеоморфизм шара $B(r)$ на некоторую окрестность $\exp\, B(r)$ единицы в смысле римановой метрики на группе Ли. В окрестности нуля отображение $\exp$ близко к тождественному, поэтому если вычислить отношение объемов соответствующих множеств в алгебре Ли, то это значение будет близко к отношению объемов в группе Ли. Другими словами,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{vol}\,(\mathfrak{e}_k \cap B(r))}{\mathrm{vol}\,(\mathfrak{h}_k \cap B(r))} = \lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{vol}\,(E_k \cap \exp\, B(r))}{\mathrm{vol}\,(H_k \cap \exp\, B(r))}.$$

Таким образом, естественно решить задачу сравнения объемов для алгебры Ли.

3. Канонический вид матриц в алгебре Ли $\mathfrak{so}(1,n)$

Выделим матрицы, экспоненты которых дают соответственно гиперболические, эллиптические или параболические преобразования типа k.

Матричная экспонента отображает алгебру Ли в группу Ли и отображение диффеоморфно в малой окрестности нуля. Используя в этой окрестности экспоненциальное представление гиперболических, эллиптических и параболических поворотов в подходящем ортонормированном базисе (см. введение), можно утверждать, что в этом базисе преобразование из алгебры Ли $\mathfrak{so}(1,n)$ имеет *каноническую клеточно диагональную матрицу* с клетками

$$(0), \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ t & 0 & -t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

расположенными в порядке, соответствующем порядку клеток в каноническом виде матриц гиперболических, эллиптических и параболических преобразований. Это же верно и для произвольных матриц из алгебры Ли, поскольку каждая из них пропорциональна матрице из малой окрестности нуля. Поэтому любая матрица из алгебры Ли $\mathfrak{so}(1,n)$ подобна матрице канонического вида и можно считать, что матрица перехода принадлежит $SO_+(1,n)$.

Напомним, что k-й инвариант I_k матрицы X равен сумме всех главных миноров порядка k из матрицы X.

Лемма 1. *Пусть $X \in \mathfrak{so}(1,n)$. Тогда $\exp X$ задает эллиптическое, гиперболическое или параболическое преобразование типа k в том и только том случае, когда ранг X равен $2k$, а ее инвариант I_{2k} соответственно положительный, отрицательный или нулевой.*

Доказательство. В соответствии с принадлежностью $\exp X$ существует такая матрица $g \in SO_+(1,n)$, что матрица $g^{-1}Xg$ принимает одну из канонических форм

(1) $\mathrm{Diag}(0, C_1, \dots, C_k, 0, \dots, 0)$,
(2) $\mathrm{Diag}(S, C_2, \dots, C_k, 0, \dots, 0)$,
(3) $\mathrm{Diag}(N, C_2, \dots, C_k, 0, \dots, 0)$,

где

$$C_i = \begin{pmatrix} 0 & t_i \\ -t_i & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ t_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & t_1 & 0 \\ t_1 & 0 & -t_1 \\ 0 & t_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\exp X$ типа k, то параметры $t_2, \dots, t_k$ неравны $2\pi m$ при $m \in \mathbb{Z}$, параметр t_1 — такой же в случае (1), а в случаях (2) и (3) единственное необходимое ограничение — $t_1 \neq 0$.

Ранги каждой матрицы C_j, S, N равны двум, поэтому ранг матрицы X равен удвоенному числу клеток, т. е. $2k$.

Характеристический многочлен $|X - \lambda E| = (-\lambda)^{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1} I_j (-\lambda)^{n+1-j}$, где I_j — инварианты X. С другой стороны, в соответствии с разложением в клеточно диагональный вид матрицы $g^{-1}Xg$ получаем соответственно характеристический многочлен

(1) $(\prod_{j=1}^{k} (\lambda^2 + t_j^2))(-\lambda)^{n+1-2k}$;
(2) $(\lambda^2 - t_1^2)(\prod_{j=2}^{k} (\lambda^2 + t_j^2))(-\lambda)^{n+1-2k}$;
(3) $(-\lambda^3)(\prod_{j=2}^{k} (\lambda^2 + t_j^2))(-\lambda)^{n-2k}$.

Отсюда $I_{2k} = \prod_{j=1}^{k} t_j^2 > 0$ в случае (1), $I_{2k} = -\prod_{j=1}^{k} t_j^2 < 0$ в случае (2), $I_{2k} = 0$ в случае (3).

Обратное утверждение следует из существования канонического вида (1), (2), (3) для произвольной матрицы из $\mathfrak{so}(1,n)$. □

Следствие 3. *Замыкание множества $\mathfrak{l}_k$ является алгебраическим многообразием.*

Доказательство. Ввиду леммы это множество задается алгебраическими условиями принадлежности матрицы X алгебре Ли $\mathfrak{so}(1,n)$ и равенству нулю всех миноров порядка $2k+1$ из X. $\square$

4. Параметризация множества $\mathfrak{l}_k$

Нам нужна параметризация, позволяющая контролировать объемы подмножеств евклидовых шаров в подпространстве $\mathfrak{so}(1,n)$ пространства вещественных матриц.

Непосредственно проверяется, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(1,n)$ состоит в точности из матриц

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a^\top \\ a & A \end{pmatrix},$$

где a — вектор-столбец из $\mathbb{R}^n$, A — вещественная кососимметричная матрица порядка n. Для нее найдется такая матрица $Q \in SO(n)$, что $Q^\top AQ = D$, где

$$D = \mathrm{Diag}\,(D_1,\dots,D_m,0,\dots,0), \quad D_i = \begin{pmatrix} 0 & -p_i \\ p_i & 0 \end{pmatrix},\ p_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Отметим, что собственные числа матриц D_i могут не быть собственными числами матрицы X.

Пусть K — подгруппа группы $SO_+(1,n)$, состоящая из матриц вида $q = \mathrm{Diag}(1,Q)$, где $Q \in SO(n)$. Тогда K — максимальная связная компактная подгруппа в $SO_+(1,n)$, изоморфная $SO(n)$. Важно, что элементы из K действуют на алгебре Ли $\mathfrak{so}(1,n)$ сопряжением $X \mapsto qXq^{-1} = qXq^\top$, сохраняя евклидову норму матриц.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{l}_k$ — прообраз при экспоненте множества лоренцевых преобразований типа k. Пусть $\mathfrak{c}_k$ — открытое подмножество в некотором диференцируемом подмногообразии из замыкания $\mathfrak{l}_k$, а F_k — дифференцируемое подмногообразие из подгруппы K. Почти однозначная параметризация множества $\mathfrak{l}_k$ — это диффеоморфное вложение $\Phi : F_k \times \mathfrak{c}_k \to \mathfrak{l}_k$ по правилу $\Phi(q,X) = q\,Xq^\top$, для которого совпадают замыкания образа относительно Φ и множества $\mathfrak{l}_k$.*

Отметим, что Φ сохраняет евклидову норму матрицы X при всех $q \in F_k$ и потому объемы подмножеств $\mathfrak{l}_k$ и $\mathrm{Im}\,\Phi$ при ограничении $\|X\| \leqslant r$ совпадают.

Наша ближайшая цель — построить почти однозначную параметризацию, точнее, множество $\mathfrak{c}_k$ канонических форм матриц из $\mathfrak{l}_k$, а также множество F_k — фактор K по стабилизатору $\mathfrak{c}_k$ относительно присоединенного действия K на $\mathfrak{l}_k$. Вычисление якобиана Φ проведем позднее для случая $k=1$. В общем случае будет доказана только невырожденность дифференциала Φ.

Далее будем считать, что $n>1$, так как в случае $n=1$ утверждение теоремы очевидно выполняется: эллиптических поворотов просто нет, а гиперболических поворотов много.

Пусть $\mathfrak{c}_k$ — множество матриц вида $T = \begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ c & D \end{pmatrix}$, для которых

1) ранг T равен $2k$, ее инвариант $I_{2k} \neq 0$,

2) ненулевые корни характеристического многочлена $T - \lambda E$ не содержатся в множестве $2\pi i\mathbb{Z}$ и некратны,

3) $D = \mathrm{Diag}(D_1,\dots,D_k,0,\dots,0)$, где $D_i = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -p_i \\ p_i & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $p_1 > p_2 > \ldots > |p_k| > 0$, более того, $p_k > 0$ при $2k < n$,

4) $c = (c_1, 0, c_3, 0, \dots, c_k, 0, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad c_i > 0$.

Отсюда $\mathfrak{c}_k$ — открытое подмножество в алгебраическом многообразии $\overline{\mathfrak{l}_k}$. Отметим, что замыкание $\overline{\mathfrak{c}_k}$ — это конус в алгебре Ли, который задается следующими условиями: $\operatorname{rk} T \leqslant 2k$, неравенства для чисел p_i и c_i из 3) и 4) становятся нестрогими.

Лемма 2. *Пусть $X \in \mathfrak{l}_k$. Тогда существует такая матрица $q \in K$, что $q^\top X q \in \overline{\mathfrak{c}_k}$.*

Доказательство. Выберем произвольную матрицу $X \in \mathfrak{l}_k$. Тогда

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a^\top \\ a & A \end{pmatrix}, \quad a = (a_1, \dots, a_n)^\top, A^\top = -A.$$

Если $q \in K$, то

$$X' = q^\top X q = \begin{pmatrix} 0 & b^\top \\ b & B \end{pmatrix},$$

где $b = Q^\top a$, $B = Q^\top A Q$. Ввиду теоремы о приведении вещественных кососимметрических матриц к канонической форме, можно выбрать матрицу Q из $SO(n)$ так, что матрица $B = Q^\top A Q$ имеет канонический клеточно диагональный вид с m ненулевыми клетками. Чтобы получить вид 3) при нестрогом упорядочении параметров p_i, нужно в каждой паре базисных векторов с отрицательным параметром p_i изменить знак одного вектора. Затем подходящей перестановкой ортонормированного базиса добиться монотонного убывания параметров p_i. Если определитель изменит знак, но $2m < n$, то следует дополнительно изменить направление вектора базиса с номером $2m+1$ на противоположное. Если $2m = n$, то таким путем можно добиться неотрицательности всех параметров p_i, кроме может быть последнего. Новый базис ортонормированный, поэтому можно считать, что матрица $D = Q^\top A Q$ вида 3) с нестрогим упорядочением параметров p_i. При этом координаты столбца b возможно изменят знаки и переставятся. Сохраним для него обозначение.

Пусть $b = (b_1, \dots, b_n)^\top$. Ясно, что ранг матрицы D равен $2m$, а ранг $X' = q^\top X q$ равен либо $2m$, либо $2m+2$. Но $\operatorname{rk} X = 2k$ ввиду леммы 1, откуда или $m = k$, или $m = k-1$. В первом случае $b_{2k+1} = \ldots = b_n = 0$. Во втором случае можно считать, что $b_{2k-1} > 0, \quad b_{2k} = \ldots = b_n = 0$, сопрягая при необходимости X' подходящей матрицей из K вида $\operatorname{Diag}(1, \dots, 1, Q'), \quad Q' \in SO(n-2m)$. Матрица $D = Q^\top A Q$ при таком переходе не меняется.

Осталось добиться перемежаемости нулей в начальной части вектора b.

Отметим, что если $R_i \in SO(2)$, то $R_i D_i R_i^\top = D_i$ при всех i. Любой вектор из $\mathbb{R}^2$ с помощью матрицы из $SO(2)$ можно привести к виду $(c,\, 0)^\top$, где $c \geqslant 0$. Пусть $R_i \in SO(2)$ выбрано так, что

$$R_i^\top \begin{pmatrix} b_{2i-1} \\ b_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_i \geqslant 0.$$

Пусть $R = \operatorname{Diag}(R_1, \dots, R_m, 1, \dots, 1),$. Сопрягая X' матрицей $r = \operatorname{Diag}(1, R) \in K$, получим матрицу из $\overline{\mathfrak{c}_k}$.

Отметим также, что случай $m = k-1$ можно считать предельным для случая $m = k$, если допустить клетку D_k с параметром p_k, стремящимся к нулю.

Лемма доказана. □

Выделим далее подмногообразие F_k в группе K так, чтобы отображение Φ было инъективным и осталось почти сюръективным в смысле равенства $\overline{\Phi(F_k \times \mathfrak{c}_k)} = \overline{\mathfrak{l}_k}$.

Пусть Σ — множество представителей всех левых смежных классов $SO(n)/SO(n-2k)$, где $SO(n-2k)$ реализована как подгруппа из $SO(n)$, оставляющая на месте первые $2k$ векторов базиса. Далее будет ясно, что множество Σ можно считать подмногообразием. Обозначим

$$F_k = \{q = \mathrm{Diag}\,(1, Q) \mid Q \in \Sigma\}.$$

Лемма 3. *При указанном выборе F_k и $\mathfrak{c}_k$ отображение $\Phi : F_k \times \mathfrak{c}_k \to \mathfrak{l}_k$, где $\Phi(q,\ T) = qTq^\top$, является почти однозначной параметризацией множества $\mathfrak{l}_k$.*

Доказательство. Покажем, что Φ инъективно. Пусть $q_1Tq_1^\top = q_2T'q_2^\top$ при некоторых $q_1,\ q_2 \in F_k$ и $T,\ T' \in \mathfrak{c}_k$. Обозначим $q = q_2^{-1}q_1 \in K$. Тогда $qTq^\top = T'$. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ c & D \end{pmatrix}, T' = \begin{pmatrix} 0 & (c')^\top \\ c' & D' \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ c & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (Qc)^\top \\ Qc & QDQ^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (c')^\top \\ c' & D' \end{pmatrix},$$

то спектры D и D' совпадают и с учетом порядка клеток получаем $D = D'$, $QD = DQ$. Ненулевые клетки D имеют различный спектр, поэтому соответствующие им координатные плоскости будут инвариантны относительно Q и матрица $Q = \mathrm{Diag}(Q_1, \dots, Q_k, R)$ будет клеточно диагональной. Так как Q ортогональна, то R и Q_i ортогональны. Но $Q_iD_i = D_iQ_i$, поэтому $Q_i \in SO(2)$, а тогда и $R \in SO(n-2k)$. Поскольку $Q_i \begin{pmatrix} c_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_i' \\ 0 \end{pmatrix}$, то $c_i = c_i' > 0$ и $Q_i = E$ при всех i. Таким образом, $T = T'$ и $Q = Q_2^{-1}Q_1 \equiv E(\mathrm{mod}\ SO(n-2k))$, $Q_1 \equiv Q_2(\mathrm{mod}\ SO(n-2k))$, $Q_1,\ Q_2 \in \Sigma$, $Q_1 = Q_2$, $q_1 = q_2$. Полученное противоречие означает инъективность Φ при данном выборе F_k и $\mathfrak{c}_k$. Лемма доказана. □

Замечание. Можно считать, что фактормножество $\Sigma \simeq SO(n)/SO(n-2k)$ является гладким многообразием в $SO(n)$ (см., например, [4, т. 1, с. 50]). А тогда и фактормножество F_k — гладкое подмногообразие в K.

Лемма 4. *Касательное пространство $\mathfrak{f}_k$ к многообразию F_k в образе единицы изоморфно ортогональному дополнению $\mathfrak{so}(n-2k)^\perp$ к подалгебре $\mathfrak{so}(n-2k)$ относительно формы Киллинга в алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$. Размерность $\mathfrak{f}_k$ равна $k(2n-2k-1)$.*

Доказательство. Форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$ имеет вид

$$\kappa(X,Y) = (n-2)\cdot \mathrm{tr}(XY) = -(n-2)\cdot \mathrm{tr}(XY^\top)$$

и потому отрицательно определена (см., например, [4, т. 2, с. 245]). Так как

$$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{so}(n-2k)^\perp \oplus \mathfrak{so}(n-2k),$$

то касательное пространство $\mathfrak{f}_k$ к многообразию $F_k = SO(n)/SO(n-2k)$ в образе единицы можно отождествить с ортогональным дополнением к подпространству $\mathrm{Diag(O}, \mathfrak{so}(\mathrm{n}-2\mathrm{k})$ (см., например, [5, с. 129]). Найдем для него матричное описание.

Учитывая вид формы Киллинга, получаем, что матрицы из $\mathfrak{f}_k$ реализуются как матрицы

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix},$$

где $V^\top = -V$ и только первые $2k$ строк и $2k$ столбцов матрицы V могут быть ненулевыми. Например, при $k=1$ имеем

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-2} \\ -\alpha_0 & 0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-2} \\ -\alpha_1 & -\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n-2} & -\beta_{n-2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Размерность подпространства $\mathfrak{so}(n-2k)^\perp$ равна разности размерностей алгебр $\mathfrak{so}(n)$ и $\mathfrak{so}(n-2k)$. Поскольку

$$\dim so(n) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \dim \mathfrak{so}(n-2k) = \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2},$$

то $\dim \mathfrak{so}(n-2k)^\perp = k(2n-2k-1)$. □

Следствие 4. *Если* $2k < n+1$, *то*

$$\dim \mathfrak{c}_k = \dim \mathfrak{h}_k = 1 + \dim \mathfrak{p}_k = 2kn - 2k^2 + k.$$

Доказательство. Отображение Φ сохраняет размерность ввиду диффеоморфности (это показано далее в теореме о дифференциале и якобиане, а также лемме 6). Поэтому

$$\dim \mathfrak{l}_k = \dim F_k + \dim \mathfrak{c}_k = k(2n-2k-1) + 2k = 2kn - 2k^2 + k.$$

С другой стороны, ввиду леммы 1 множество $\mathfrak{l}_k$ разбивается на $\mathfrak{c}_k$ и $\mathfrak{h}_k$ условием $I_{2k} = 0$, которому удовлетворяет $\mathfrak{p}_k$ и которое уменьшает размерность на 1.

Действительно, в этом случае получаем дополнительное уравнение на параметры матрицы T из $\mathfrak{c}_k$, а именно

$$I_{2k}(p_1, \dots, p_k, c_1, \dots, c_k) = \sum_{r=1}^{k} (c_r^2 \prod_{j=1, j\neq r}^{k} p_j^2) = 0.$$

Пусть M — многообразие решений этого уравнения в $\mathfrak{c}_k$, а N — его особые точки. Найдем размерность M, вычислив градиент многочлена I_{2k}. Имеем

$$\mathrm{grad}\, I_{2k} = (\dots, 2c_1 \prod_{j=2}^{k} p_j^2, \dots, 2c_k \prod_{j=1}^{k-1} p_j^2, \dots).$$

Для того чтобы точка была особой, градиент должен быть равен нулю. Но если $\mathrm{grad}\, I_{2k} = 0$, то равны нулю хотя бы два параметра. Таким образом, множество N особых точек имеет размерность, меньшую чем $2k-1$. Тогда $M \setminus N$ — гладкое многообразие размерности $2k-1$ и $\dim \mathfrak{p}_k = \dim F_k + \dim(M \setminus N) = 2kn - 2k^2 + k - 1$.

Отметим, что $\dim \mathfrak{l}_k \neq \dim \mathfrak{p}_m$ при все $m > k$. Действительно, если обозначить через S_i — сумму первых i натуральных чисел, то $\dim \mathfrak{f}_k = S_{n-1} - S_{n-2k-1}$, а $\dim \mathfrak{p}_m = S_{n-1} - S_{n-2m-1} - 1$. Если равенство возможно, то $m > k$ и $S_{n-2k-1} = S_{n-2m-1} + 1$. Это равенство невозможно при всех $m > k$.

Следствие доказано. □

Итак, в шаре $B(r)$ имеет смысл сравнивать по объему пересечения шара с множествами $\mathfrak{e}_k$ и $\mathfrak{h}_k$.

5. Дифференциал и якобиан параметризации

Теорема 2. *(о дифференциале и якобиане). Пусть $\Phi : F_k \times \mathfrak{c}_k \to \mathfrak{l}_k$ — однозначная параметризация, полученная выше, а $\langle \mathfrak{c}_k \rangle$ — линейная оболочка множества $\mathfrak{c}_k$.*

1) Касательное пространство к многообразию $F_k \times \mathfrak{c}_k$ изоморфно $\mathfrak{f}_k \times \langle \mathfrak{c}_k \rangle$. В точке (q, T), $q = \mathrm{Diag}(1, Q)$, $T \in \mathfrak{c}_k$, оно состоит из пар (y, Z), где $y = \mathrm{Diag}(0, Y)$ и $Q^\top Y \in \mathfrak{f}_k$, а $Z \in \langle \mathfrak{c}_k \rangle$.

2) Дифференциал Φ в точке (q, T) имеет вид

$$D_{q,T}(y, Z) = q(WT - TW + Z)q^\top, \quad W := q^\top y \in \mathfrak{f}_k.$$

3) $\det D_{q,T} = \det D_{e,T}$, то есть якобиан Φ не зависит от выбора $q \in K$.

4) $\det D_{e,T} = \det(\mathrm{ad}\, T)$, где $\mathrm{ad}\, T : \mathfrak{f}_k \to \mathfrak{so}(1, n)$ — присоединенное отображение по правилу $W \mapsto [W, T] = WT - TW$ подпространства $\mathfrak{f}_k$ в алгебру Ли $\mathfrak{so}(1, n)$.

5) Обозначим $\mathfrak{c}_k^+(r) = \mathfrak{c}_k \cap \mathfrak{e}_k \cap B(r)$, $\mathfrak{c}_k^-(r) = \mathfrak{c}_k \cap \mathfrak{h}_k \cap B(r)$. Тогда

$$\mathrm{vol}\,(\mathfrak{e}_k \cap B(r)) = \mathrm{vol}\, F_k \int\limits_{\mathfrak{c}_k^+(r)} |\det(\mathrm{ad}\, T)|\, dT,$$

$$\mathrm{vol}\,(\mathfrak{h}_k \cap B(r)) = \mathrm{vol}\, F_k \int\limits_{\mathfrak{c}_k^-(r)} |\det(\mathrm{ad}\, T)|\, dT$$

при условии положительности $|\det(\mathrm{ad}\, T)|$.

Доказательство. 1) Касательное пространство к прямому произведению — прямая сумма касательных пространств сомножителей. Для первого множителя F_k в точке $q = \mathrm{Diag}(1, Q)$ касательное пространство получается левым сдвигом на q касательного пространства к многообразию F_k в единице, т. е. сдвигом $\mathfrak{f}_k = \{0\} \oplus \mathfrak{so}(n - 2k)^\top$. Касательное пространство к $\mathfrak{c}_k$ в точке T — это линейная оболочка $\langle \mathfrak{c}_k \rangle$.

2) Пусть $(q + ty + o(t), T + tZ + o(t))$ — гладкая кривая в многообразии $F_k \times \mathfrak{c}_k$, проходящая через точку (q, T), $q = \mathrm{Diag}(1, Q)$. Тогда

$$\Phi(q + ty + o(t), T + tZ + o(t)) = qTq^\top + t(yTq^\top + qTy^\top + qZq^\top) + o(t).$$

3) $D_{q,T}(y, Z) = yTq^\top + qTy^\top + qZq^\top = q(q^\top yT + T(q^\top y)^\top + Z)q^\top = q(WT - TW + Z)q^\top = qD_{e,T}(W, Z)q^\top$, где $W = q^\top y \in \mathfrak{f}_k$.

Отображение $D_{e,T} : \mathfrak{f}_k \oplus \langle \mathfrak{c}_k \rangle \to \mathfrak{so}(1, n)$ по правилу $(W, Z) \mapsto [W, T] + Z$ тождественно на подпространстве $\{0\} \oplus \langle \mathfrak{c}_k \rangle$. Отсюда матрица дифференциала $D_{e,T}$ полураспавшаяся и $\det D_{e,T} = \det(\mathrm{ad\,T})$.

5) Ввиду построенной параметризации

$$\operatorname{vol}(\mathfrak{c}_k \cap B(r)) = \int\limits_{F_k \times \mathfrak{c}_k^+(r)} |\det D_{q,T}|\, dq\, dT = \operatorname{vol} F_k \int\limits_{\mathfrak{c}_k^+(r)} |\det(\operatorname{ad} T)|\, dT.$$

Аналогично вычисляется $\operatorname{vol}(\mathfrak{h}_k \cap B(r))$. □

В итоге, для сравнения объемов множеств $\mathfrak{c}_k$ и $\mathfrak{h}_k$ в шаре радиуса r достаточно

1) выделить из $\mathfrak{c}_k$ множества $\mathfrak{c}_k^+$ и $\mathfrak{c}_k^-$;

2) вычислить якобиан $\det \Phi$;

3) вычислить интегралы от якобиана по пересечениям множеств $\mathfrak{c}_k^+$ и $\mathfrak{c}_k^-$ с шаром.

Последние два шага удалось реализовать лишь при $k = 1$. В общем случае доказано только, что якобиан ненулевой при всех значениях параметров из области определения.

6. Вычисление якобиана в случае $k = 1$ и размерности $n + 1$

В параметризации $\Phi : F_1 \times \mathfrak{c}_1 \to \mathfrak{l}_1$ упростим обозначения, опустив индекс 1. В этом случае конус $\mathfrak{c}$ состоит из матриц

$$T = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & 0 & -p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

порядка $n + 1$, где $c > 0$, $p > 0$ при $n > 2$. (Случай $n = 2$ отличается тем, что условие $p > 0$ заменяется условием $p \neq 0$.)

Ненулевые корни характеристического полинома T — это $\pm\sqrt{c^2 - p^2}$. Условие $c^2 - p^2 \neq -\pi^2 l^2$, $l \in \mathbb{Z}$, можно не учитывать, так как равенство задает многообразие размерности 1 в пространстве параметров (c, p). Инвариант I_2 равен $p^2 - c^2$. Поэтому множества матриц конуса, экспоненты которых задают эллиптические или гиперболические повороты — это соответственно множества

$$\mathfrak{c}^+ = \{T \in \mathfrak{c} \mid p^2 > c^2\}, \quad \mathfrak{c}^- = \{T \in \mathfrak{c} \mid p^2 < c^2\}.$$

Как известно, якобиан $\operatorname{ad} T$ — это коэффициент искажения объёма базисного параллелепипеда пространства $\mathfrak{f}$ при отображении $\operatorname{ad} T : W \mapsto [W, T]$ в алгебру $\mathfrak{so}(1, n)$.

Лемма 5. $|\det \operatorname{ad} T| = c(|p|\sqrt{c^2 + p^2})^{n-2}$.

Доказательство. Запишем матрицы T и W в клеточной форме:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & C & 0 \\ C^\top & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & Y \\ 0 & -Y^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $C = (c, 0)$, $c > 0$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{pmatrix}$, $p > 0$, X — кососимметрическая матрица порядка 2, Y — произвольная матрица размера $2 \times (n - 2)$. Легко вычислить,

что
$$TW - WT = \begin{pmatrix} 0 & CX & CY \\ (CX)^\top & [D,X] & DY \\ (CY)^\top & -(DY)^\top & 0 \end{pmatrix}.$$
Поэтому $\Delta = -\operatorname{ad} T$ является ортогональной суммой линейных отображений
$$\Delta_1 : X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & CX & 0 \\ (CX)^\top & [D,X] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 : Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & CY \\ 0 & 0 & DY \\ (CY)^\top & -(DY)^\top & 0 \end{pmatrix}$$
и $|\det \Delta| = |\det \Delta_1| \cdot |\det \Delta_2|$.

Поскольку
$$\Delta_1 : X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & cx \\ 0 & 0 & 0 \\ cx & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
то $\det \Delta_1 = c$.

Найдем якобиан для Δ_2. Коэффициент искажения объема относительно Δ_2 совпадает с таким же коэффициентом для отображения $Y \mapsto \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} Y$. Это отображение — ортогональная сумма отображений $y \mapsto \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} y$ столбцов y матрицы Y. При этом коэффициент искажения объема равен произведению сингулярных чисел матрицы $A = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ или, иначе говоря, корню из определителя Грама системы столбцов матрицы A, т. е. числу
$$\sqrt{\det A^\top A} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} c^2 + p^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}} = p\sqrt{c^2 + p^2}.$$
Поскольку Y имеет $n-2$ столбца, то $\det \Delta_2 = (p\sqrt{c^2 + p^2})^{n-2}$.

Следовательно, $|\det \Delta| = c(p\sqrt{c^2 + p^2})^{n-2}$.

Лемма доказана. □

7. Невырожденность дифференциала в общем случае

Лемма 6. *Дифференциал отображения* $\Phi : F_k \times \mathfrak{c}_k \to \mathfrak{l}_k$ *в каждой точке области определения невырожден.*

Доказательство. Ввиду теоремы о дифференциале и якобиане достаточно доказать, что $\det(\operatorname{ad} T) \neq 0$ при всех значениях параметров из области определения.

Воспользуемся обозначениями доказательства леммы 5. Пусть снова
$$T = \begin{pmatrix} 0 & C & 0 \\ C^\top & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & Y \\ 0 & -Y^\top & 0 \end{pmatrix}.$$
Здесь

1) $C = (C_1, \ldots, C_k)$ — матрица-строка длины $2k$, $C_i = (c_i, 0)$, $c_i > 0$ при всех i;

2) $D = \operatorname{Diag}(D_1, \ldots, D_k)$ — клеточно–диагональная матрица порядка $2k$,
$$D_i = \begin{pmatrix} 0 & -p_i \\ p_i & 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 > p_2 > \ldots > |p_k| > 0;$$

3) $X = (X_{ij})$ — кососимметрическая матрица порядка $2k$, $X_{ij}^\top = -X_{j\,i}$, X_{ij} — матрица порядка 2 при всех $i,\ j$;

4) Y — произвольная матрица размера $2k \times (n-2k)$.

Снова

$$TW - WT = \begin{pmatrix} 0 & CX & CY \\ (CX)^\top & [D,X] & DY \\ (CY)^\top & -(DY)^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\Delta = -\operatorname{ad} T$ является ортогональной суммой линейных отображений

$$\Delta_1 : X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & CX & 0 \\ (CX)^\top & [D,X] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 : Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & CY \\ 0 & 0 & DY \\ (CY)^\top & -(DY)^\top & 0 \end{pmatrix}$$

и $|\det \Delta| = |\det \Delta_1| \cdot |\det \Delta_2|$.

Покажем сначала, что линейные отображения Δ_1 невырождены при всех значениях параметров. Достаточно доказать, ядро Δ_1 нулевое. Поскольку $k > 1$, то выберем любые $i,\ j$ так, что $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Тогда на месте (i,j) в матрице $[D,X]$ находится матрица $D_iX_{ij} - X_{ij}D_j$. Если $D_iX_{ij} = X_{ij}D_j$, то

$$D_i^2X_{ij} = X_{ij}D_j^2, \quad -p_i^2X_{ij} = -p_j^2X_{ij},$$

а тогда $X_{ij} = 0$, поскольку $p_i > p_j > 0$. Это означает, что если $[D,X] = 0$, то $X = \operatorname{Diag}(X_{11}, \ldots, X_{kk})$. Но тогда $CX = (C_1X_{11}, \ldots, C_kX_{kk})$, где $C_iX_{ii} = (0,\ c_ix_{ii})$. Если $CX = 0$, то $x_{ii} = 0$ при всех i. Следовательно, $\operatorname{Ker}\,\Delta_1 = 0$.

Теперь покажем, что $\operatorname{Ker}\,\Delta_2 = 0$. Достаточно доказать невырожденность линейных отображений $Y \mapsto \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} Y$ при всех значениях параметров. Но D обратима и если $DY = 0$, то $Y = 0$.

Лемма доказана. □

Лемма 6. Дифференциал отображения $\Phi : F_k \times \mathfrak{c}_k \to \mathfrak{l}_k$ в каждой точке области определения невырожден.

Доказательство. Ввиду теоремы о дифференциале и якобиане достаточно доказать, что $\det(\operatorname{ad} T) \neq 0$ при всех значениях параметров из области определения.

Воспользуемся обозначениями доказательства леммы 5. Пусть снова

$$T = \begin{pmatrix} 0 & C & 0 \\ C^\top & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & Y \\ 0 & -Y^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

1) $C = (C_1, \ldots, C_k)$ — матрица-строка длины $2k$, $C_i = (c_i, 0)$, $c_i > 0$ при всех i;

2) $D = \operatorname{Diag}(D_1, \ldots, D_k)$ — клеточно–диагональная матрица порядка $2k$,

$$D_i = \begin{pmatrix} 0 & -p_i \\ p_i & 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 > p_2 > \ldots > |p_k| > 0;$$

3) $X = (X_{ij})$ — кососимметрическая матрица порядка $2k$, $X_{ij}^\top = -X_{j\,i}$, X_{ij} — матрица порядка 2 при всех $i,\ j$;

4) Y — произвольная матрица размера $2k \times (n-2k)$.

Снова

$$TW - WT = \begin{pmatrix} 0 & CX & CY \\ (CX)^\top & [D,X] & DY \\ (CY)^\top & -(DY)^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\Delta = -\operatorname{ad} T$ является ортогональной суммой линейных отображений

$$\Delta_1 : X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & CX & 0 \\ (CX)^\top & [D,X] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 : Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & CY \\ 0 & 0 & DY \\ (CY)^\top & -(DY)^\top & 0 \end{pmatrix}$$

и $|\det \Delta| = |\det \Delta_1| \cdot |\det \Delta_2|$.

Покажем сначала, что линейные отображения Δ_1 невырождены при всех значениях параметров. Достаточно доказать, ядро Δ_1 нулевое. Поскольку $k > 1$, то выберем любые $i,\ j$ так, что $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Тогда на месте (i,j) в матрице $[D,X]$ находится матрица $D_i X_{ij} - X_{ij} D_j$. Если $D_i X_{ij} = X_{ij} D_j$, то

$$D_i^2 X_{ij} = X_{ij} D_j^2, \quad -p_i^2 X_{ij} = -p_j^2 X_{ij},$$

а тогда $X_{ij} = 0$, поскольку $p_i > p_j > 0$. Это означает, что если $[D,X] = 0$, то $X = \operatorname{Diag}(X_{11}, \ldots, X_{kk})$. Но тогда $CX = (C_1 X_{11}, \ldots, C_k X_{kk})$, где $C_i X_{ii} = (0,\ c_i x_{ii})$. Если $CX = 0$, то $x_{ii} = 0$ при всех i. Следовательно, $\operatorname{Ker}\, \Delta_1 = 0$.

Теперь покажем, что $\operatorname{Ker}\, \Delta_2 = 0$. Достаточно доказать невырожденность линейных отображений $Y \mapsto \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} Y$ при всех значениях параметров. Но D обратима и если $DY = 0$, то $Y = 0$.

Лемма доказана. $\square$

8. Сравнение объемов

Докажем теперь основную теорему (см. введение).

В принятых обозначениях надо доказать, что в размерности $n+1$ отношение объемов

$$\frac{\operatorname{vol} \mathfrak{e}_1(r)}{\operatorname{vol} \mathfrak{h}_1(r)} = (\sqrt{2})^{n-1} - 1$$

при всех $r > 0$ и при всех $n \geqslant 1$. По теореме о дифференциале и якобиане и ввиду леммы 5 при $n \geqslant 3$ достаточно найти отношение интегралов I^+ и I^-, где

$$I^+ = \iint\limits_{\substack{c,\, p \geqslant 0 \\ 2c^2+2p^2 \leqslant r^2 \\ c^2 \leqslant p^2}} c(p\sqrt{c^2+p^2})^{n-2}\, dc\, dp\ ; \quad I^- = \iint\limits_{\substack{c,\ p \geqslant 0 \\ 2c^2+2p^2 \leqslant r^2 \\ c^2 \geqslant p^2}} c(p\sqrt{c^2+p^2})^{n-2}\, dc\, dp\ .$$

Сделаем полярную замену координат:

$$\begin{cases} c = \rho\cos\varphi \\ p = \rho\sin\varphi \end{cases}, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant r.$$

Тогда

$$I^+ = \iint\limits_{\substack{\rho \leqslant r/\sqrt{2} \\ \cos\varphi \geqslant 0,\ \sin\varphi \geqslant 0 \\ \cos^2\varphi \leqslant \sin^2\varphi}} \rho^{2n-2} \cos\varphi \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi\, d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi \cdot \int\limits_0^{r/\sqrt{2}} \rho^{2n-2}\, d\rho\ ;$$

$$I^- = \iint\limits_{\substack{\rho\leqslant r/\sqrt{2}\\ \cos\,\varphi\geqslant 0\\ \sin\,\varphi\geqslant 0\\ \cos^2\,\varphi\geqslant\sin^2\varphi}} \rho^{2n-2}\cos\varphi\sin^{n-2}\varphi\,d\varphi\,d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin^{n-2}\varphi\,d\varphi\cdot\int\limits_0^{r/\sqrt{2}}\rho^{2n-2}\,d\rho.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{I^+}{I^-} = \frac{\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\,\varphi\sin^{n-2}\,\varphi\,d\varphi}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\,\varphi\sin^{n-2}\,\varphi\,d\varphi} = \frac{\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\,\varphi\,d\sin\,\varphi}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^{n-2}\,\varphi\,d\sin\,\varphi} = \frac{\frac{1}{n-1}-\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}}{n-1}}{\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}}{n-1}} = (\sqrt{2})^{n-1}-1.$$

Если $n=2$, то

$$I^+ = \iint\limits_{\substack{c\geqslant 0\\ 2c^2+2p^2\leqslant r^2\\ c^2\leqslant p^2}} c\,dc\,dp;\quad I^- = \iint\limits_{\substack{c\geqslant 0\\ 2c^2+2p^2\leqslant r^2\\ c^2\geqslant p^2}} c\,dc\,dp.$$

Снова используем полярную замену:

$$I^+ = \iint\limits_{\substack{\rho\leqslant r/\sqrt{2}\\ \cos\varphi\geqslant 0\\ \cos^2\,\varphi\leqslant\sin^2\,\varphi}} \rho^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\rho = \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}}\cos\varphi\,d\varphi\right)\cdot\int\limits_0^{r/\sqrt{2}}\rho^{2n-2}\,d\rho;$$

$$I^- = \iint\limits_{\substack{\rho\leqslant r/\sqrt{2}\\ \cos\varphi\geqslant 0\\ \cos^2\,\varphi\geqslant\sin^2\,\varphi}} \rho^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\rho = \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\,d\varphi + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}}\cos\varphi\,d\varphi\right)\cdot\int\limits_0^{r/\sqrt{2}}\rho^{2n-2}\,d\rho.$$

Отсюда,

$$\frac{I^+}{I^-} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

Наконец, если $n=1$, то эллиптических поворотов нет и отношение равно $0 = (\sqrt{2})^0 - 1$.

Теорема доказана.

References

[1] Krivonogov A.S., Churkin V.A., *The portion of matrices with real spectrum in Lie algebra of real symplectic group*, Siberian Math. Journal, **55**:6 (2014), 1056–1072. Zbl 1321.15056

[2] Edelman A. *The probability that a random real Gaussian matrix has k real eigenvalues, related distributions, and the circular law*, J. Multivariate Anal., **60** (1997), 203—232. Zbl 0886.15024

[3] Shafarevich I.R., Remizov A.O., *Linear algebra and geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[4] Kobayashi Sh., Nomizu K., *Foundations of differential geometry*, Intersc. Publishers, New York London, **1** (1963); **2** (1969). Zbl 0119.37502, Zbl 0175.48504

[5] Zelikin M.I., *Control theory and optimization I, Homogeneus spaces and the Ricatti equation in the calcules of variatious*, Encyclopedia of mathematical sciences, **86**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000. Zbl 0951.49002

Valerii Avdeevich Churkin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
st. Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: churkin@math.nsc.ru

Alexei Igorevich Ilin
Novosibirsk State University,
st. Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
National Research University Higher School of Economics,
Russian Federation
E-mail address: alex_omsk@211.ru