S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. А. 31–А. 42 (2017) УДК 51:37+51.001.8+51(091)
DOI 10.17377/semi.2017.14.044 MSC 97G10+01A20

МЕСТО ИСТОРИИ ГЕОМЕТРИИ В ПОПУЛЯРИЗАЦИИ И ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

И.А. ТАЙМАНОВ

Abstract. This is a transcript of the talk given by the author on October 18, 2015 at the Third All-Russian Congress "Scholar Mathematical Education" in Novosibirsk. The text is complemented by comments and remarks.

Keywords: history of geometry, teaching of mathematics.

Ученик — это не сосуд, который
надо наполнить, а факел,
который надо зажечь.

Плутарх

Мне, геометру по специальности, хочется поделиться соображениями о том, как можно с помощью исторической канвы событий показать, что само развитие математики представляет изнутри себя очень интересный процесс. Например, мы помним, что при изучении геометрии обычно говорится, что Евклид создал современную геометрию, а потом Лобачевский создал неевклидову геометрию. В действительности, интрига гораздо сложнее.

Мы исходим из высказывания, приведенного в качестве эпиграфа, и думаем, что ради достижения этой цели учителя должны приложить все возможные усилия для мотивации школьников. Мы приведем три сюжета из истории геометрии, которые могут этому служить.

Taimanov, I.A., Place of the history of geometry in the popularization and teaching of mathematics.

Поступила 23 мая 2017 г., опубликована 30 мая 2017 г.

1. Евдокс, Евклид и Архимед

Для начала заметим, что имя Евдокса очень редко упоминается в учебных текстах, что совершенно несправедливо.

Мы начнем с интересного примера государственной поддержки науки. В 330 г. до н.э. Александр Македонский основал город Александрия и спустя девять лет, в 323 г. до н.э., умер. Его полководцы развалили империю Александра на множество государств, в основном восточных. Начинается эпоха эллинизма, замечательная тем, что высоко развитая культура очень маленькой греческой нации становится культурой многочисленных восточных народов. [1] Число людей, вовлеченных в развитие культуры и науки, заметно увеличивается. В это время правители Египта — Птолемеи — создают, фактически, первое научно–исследовательское учреждение — Александрийский музей в составе библиотеки и Мусейона. Этот музей был центром эллинистической (и всей западной) культуры и науки до конца 4-го века н.э. В этом музее работали Евклид, Архимед, Диофант, Плотин, Эратосфен, Герон, Аполлоний, Клавдий Птолемей, и на протяжении более, чем семи веков, это учреждение *поддерживалось государством*.

Евклид был нанят Мусейоном для написания “Начал”, в которых должны были быть подведены итоги предыдущего развития математики, прежде всего геометрии и теории чисел, для того, чтобы знание было упорядочено. [2] В замечательной книге Ван дер Вардена “Пробуждающаяся наука” всем тринадцати книгам (частям) из “Начал” Евклида сопоставлены имена людей, чьи результаты в этих книгах изложены: Пифагор, Гиппократ, Теэтет, Евдокс ... [3] Евклида среди них нет, почти все результаты были получены не им, но был создан свод знаний, причем в рамках *государственной программы*.

К появлению такого проекта привело не только государственное и научное развитие, но и развитие философии. При написании “Начал” Евклида было принято последовательное изложение полученных результатов, исходя из начальных аксиом и постулатов. Евклид следовал Аристотелю, который был учителем Александра Македонского и чья личная библиотека стала частью Александрийской библиотеки, в которую Евклид добавил свой труд и для которой он писал. Термин “аксиома” принадлежит Аристотелю, высказавшему утверждение от том, что цепочка доказательств не может быть бесконечной в обратную сторону и что мы должны исходить из чего-то, что мы доказывать не будем. Этот подход к строгому изложению математических результатов и был принят Евклидом, принявшим без доказательства пять постулатов (дословно, “требований”) и девять аксиом. Заметим, что в различных изданиях “Начал” аксиомы и постулаты порой перепутываются: одни аксиомы трактуются как постулаты, а некоторые постулаты как аксиомы. Сейчас мы пользуемся только понятием аксиом, но у Евклида такое разделение на два разных вида начальных утверждений было и знаменитая аксиома о параллельных в издании Гейберга формулируется как постулат.

В современном понимании изложение Евклида не было аксиоматическим: то, что мы сейчас под этим понимаем, например, то изложение элементарной геометрии, по которому учились в 1970–80-ые годы в школе, восходит к Гильберту. К примеру, Гильберт отдельно доказывал то, что две различные прямые могут пересекаться только по точке, а Евклид считал это настолько очевидным, что, хотя он аккуратно ввел понятия точки и прямой, этот факт он в отдельное утверждение не выделил. Впрочем подобных пробелов у Евклида мало. [4)]

На протяжении многих веков продолжались попытки вывода аксиомы Евклида о параллельных из других аксиом, но они не увенчивались успехом [5)] и в конечном итоге Лобачевский показал, что эта аксиома из других не выводится и существует геометрия, в которых она не выполняется (геометрия Лобачевского). [6)]

В двух из тринадцати книг "Начал" Евклида — книгах V и XII — изложены результаты Евдокса. [7)] Часть книги VI тоже посвящена результатам Евдокса, чьи собственные сочинения до нас не дошли.

Пятая книга посвящена теории отношений. Задолго до Евдокса древние греки пришли к выводу, что рациональных чисел не достаточно для выражения всех возникающих величин. Например, $\sqrt{2}$ возникает как длина гипотенузы прямоугольного равностороннего треугольника с катетами, равными единице. Евдокс предложил не расширять рациональные числа до всего универсума возможных чисел, а добавлять величины, которые возникают в геометрии, как-то длины и площади. Новые числа он предложил называть "геометрическими величинами". При этом он, фактически, создал теорию сечений Дедекинда: ему не хватало только аксиомы непрерывности.

В двенадцатой книге изложен метод исчерпывания Евдокса. Это, фактически, основы, а точнее истоки, современной теории пределов. Он предложил исследуемую фигуру исчерпывать фигурами, которые лежат внутри нее и для которых мы можем вычислять площади. При последовательном исчерпывании мы получим как предел площадей исчерпывающих фигур величину, которую мы должны сопоставить исходной фигуре как ее площадь. Евдокс строго доказал такое утверждение: *если у нас есть два круга, радиусы которых относятся как k, то площади кругов относятся как k^2*. Его рассуждение следующее: оба круга исчерпываются объединениями треугольников, для которых мы можем вычислять площади, и при пропорциональном увеличении треугольника в k раз его площадь увеличивается в k^2. Таким образом площадь круга равна какой-то постоянной, умноженной на квадрат радиуса круга. Эта постоянная обозначается через π и формула площади круга принимает вид

$$A = \pi R^2,$$

где R — радиус круга, а A — его площадь.

Возникает задача о нахождении значения постоянной π, и эта задача исследуется ученым, который сразу после Евклида был и учился в Мусейоне. В своих работах, которые имеют часто форму писем, например "Писем Досифею", он уже ссылается на "Начала" Евклида. Речь идет о выдающемся математике Архимеде. [8)] Он расширил метод исчерпывания Евдокса, предложив рассматривать не только исчерпывание изнутри, но и многоугольники, объемлющие заданную фигуру так, что площади разностей многоугольников и фигуры стремятся к нулю.

В работе "Измерение круга" Архимед получил следующий результат:

"*Всякий круг равен прямоугольному треугольнику, причем радиус круга равен одной из прилегающих к прямому углу сторон, а периметр основанию треугольника*",

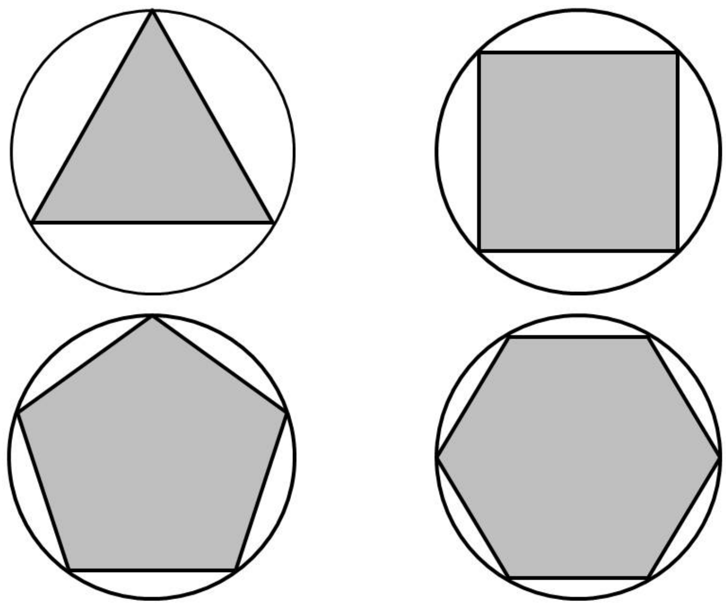


Рис. 1. Исчерпывание круга (по Евдоксу)

т.е. показал, что длина L окружности радиуса R равна

$$L = 2\pi R.$$

Тем самым Архимед строго доказал, что постоянная π, которая изначально возникает в формуле Евдокса для площади круга, входит и в формулу для длины окружности. При этом Архимедом были заложены принципы вычисления длин кривых.

Архимед продемонстрировал свои методы на получении наилучших для своего времени оценок числа π: [9)]

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

которые являются очень точными: разность верхней и нижней оценок равна

$$3\frac{1}{7} - 3\frac{10}{71} = \frac{1}{497}.$$

Эти оценки были получены с помощью вписанных и описанных правильных 96-угольников, и проделал это Архимед очень изящно. Вообще, как я убедился сам, читать работы Архимеда — это одно удовольствие.

Самым выдающимся своим достижением Архимед считал вычисление объема шара: он рассмотрел шар радиуса R, вписанный в цилиндр с основанием круг радиуса R, и с помощью метода исчерпывания показал, что объем шара равен двум третям от объема цилиндра. Поскольку объем цилиндра V_C легко вычислить как произведение площади основания на его высоту:

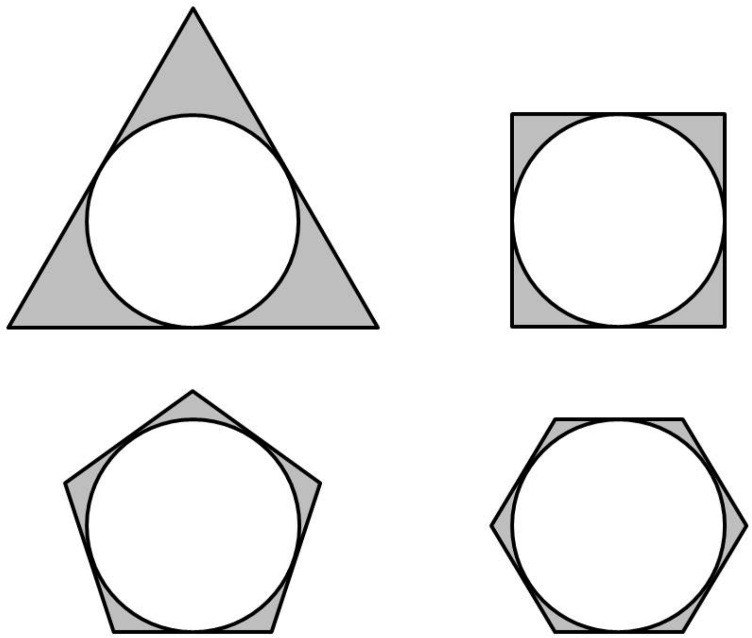


Рис. 2. Получение верхней оценки площади (по Архимеду)

$V_C = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$, то объем шара равен

$$V_B = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Перенося рассуждения Евдокса на объемы шаров, можно вывести, что объем шара есть произведение некоторой постоянной на третью степень радиуса шара. Архимед эту постоянную вычислил и показал, что она есть произведение рационального числа на π, т.е. в формулах для длин окружностей и объемов шаров не возникают новые "геометрические величины", отличные от произведений рациональных чисел на π.

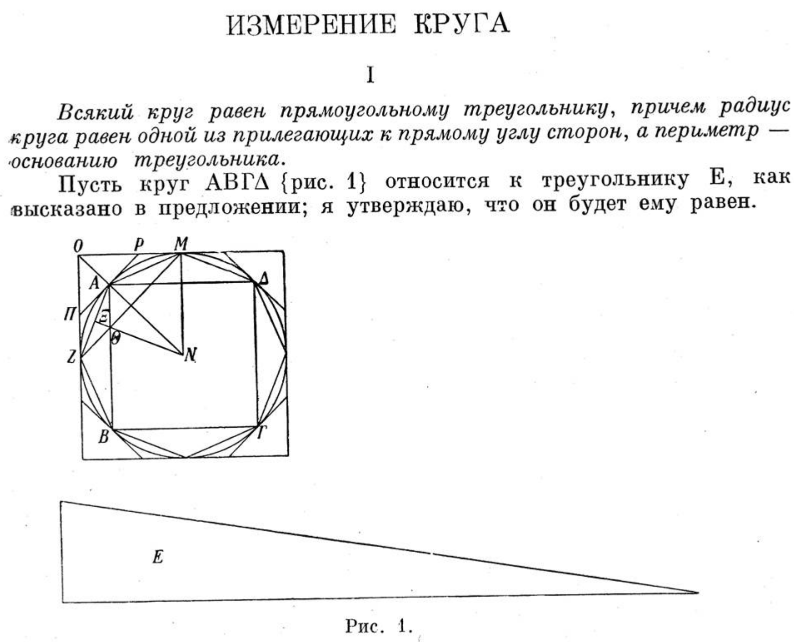
В математике известна еще одна фундаментальная постоянная — число e, которая, в отличие от π, возникает не из геометрических соображений. Укажем на замечательный факт, который удивляет даже многих математиков — вопрос о том, является ли отношение π и e —

$$\frac{\pi}{e},$$

— рациональным числом, до сих пор открыт, и никаких подходов к решению этой задачи нет.

2. Картография и кривизна

В 1970-ые годы школьников заманивали в математику, в частности, рассказами о существовании кривизны пространства и ее связи с нарушением аксиомы Евклида о параллельных, т.е. с существованием на плоскости нескольких прямых, которые проходят через одну точку и параллельны заданной прямой.



ИЗМЕРЕНИЕ КРУГА

I

Всякий круг равен прямоугольному треугольнику, причем радиус круга равен одной из прилегающих к прямому углу сторон, а периметр — основанию треугольника.

Пусть круг АВГΔ {рис. 1} относится к треугольнику Е, как высказано в предложении; я утверждаю, что он будет ему равен.

Рис. 1.

Рис. 3. Теорема Архимеда (страница из русского издания трудов)

Впоследствии эта тема, геометрия Лобачевского, так и не была раскрыта ни в одном из обязательных университетских курсов. В то же время объяснить школьнику геометрию Лобачевского сложно, а вот эффект кривизны можно объяснить в школе с помощью вполне подручных средств.

Математическое понятие кривизны пространства принадлежит Гауссу, который за пять лет до появления работы Лобачевского, работая по заданию прусского картографического ведомства, доказал теорему Гаусса о кривизне, из которой следует, что нельзя составить точную карту земной поверхности, т.е. если поверхность искривлена, то ее нельзя отобразить взаимно однозначно на участок плоскости так, чтобы расстояния и площади сохранялись. Гаусс ввел понятие гауссовой кривизны, которое было обобщено Риманом на многомерный случай в знаменитой лекции о понятиях, лежащих в основании геометрии. Это положило начало римановой геометрии, которая является основным инструментом общей теории относительности.

Вернемся к тому, что Гаусс ввел понятие кривизны при изучении картографирования земной поверхности. Когда-то на одной конференции в Японии я встретил друга, которому я пожаловался на то, что из-за неудобного расписания авиарейсов я летел в Японию из Новосибирска через Москву. Он же в ответ сказал мне, что летел в Японию через Южный полюс с остановкой в Новой Зеландии, и это был кратчайший маршрут. Я решил удостовериться в этом на компьютере и, играя с Google Earth, с помощью компьютерной мышки получил следующую картинку. Это — не какая-то другая планета, а Тихий океан. В правом верхнем углу — западный берег США, внизу виден участок

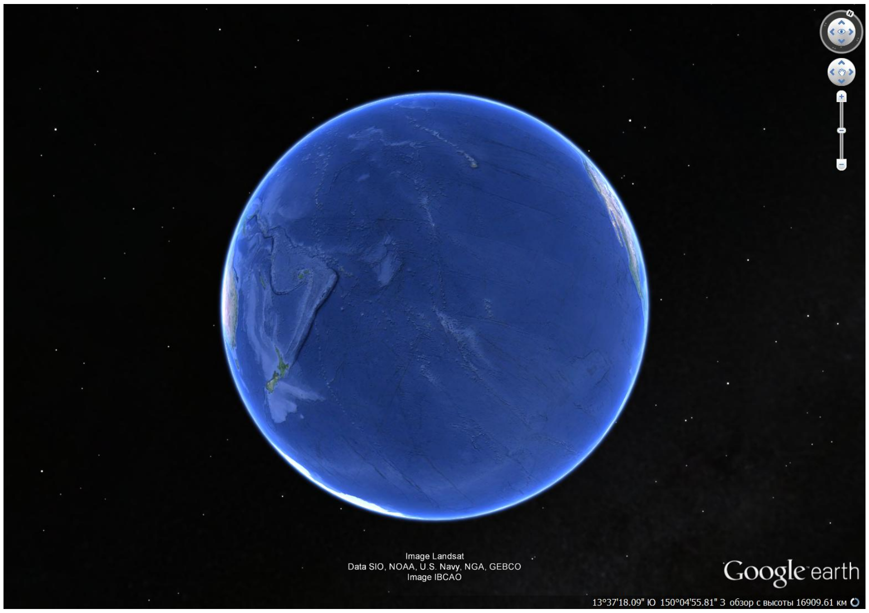


Рис. 4. Тихий океан

Антарктиды. Из этой картинки может создаться впечатление, что Тихий океан занимает половину площади планеты. Но при картографической проекции именно на краях карты площадь сильно искажается и, в действительности, малые видимые следы суши занимают достаточно большую площадь: площадь поверхности Земли — около 510.1 млн. кв. км, а площадь Тихого океана примерно равна 179.7 кв. км, т.е. составляет около 35 % от площади земной поверхности. [10)]

Приведем в качестве другого примера стандартные школьные карты. По причине, которая станет ясно из последующего, часто экватор на физических картах мира чуть-чуть смещен вниз по отношению к середине карты. Конечно по такой карте трудно сразу представить, что разрезанный на две части Тихий океан занимает 35 % площади Земли, что больше площади всей земной суши. Но трудно оценить и соотношения реальных широт, в которых мы живем и о которых мы не задумываемся. Я воспользовался данными по аэропортам, которые позаимствовал из Википедии: [11)]

аэропорт Шереметьево (Москва) — $55^0\,58'\,22''$ северной широты,
аэропорт Толмачево (Новосибирск) — $55^0\,00'\,45''$ северной широты,
мыс Горна (южная оконечность Америки) — $55^0\,58'\,48''$ южной широты.

Тем, кто читал "Необитаемый остров" Жюль Верна сразу трудно представить, что участок суши, на котором почти ничего не растет, и никто не живет, находится на том же расстоянии от экватора, что и Москва, и Новосибирск.

Впрочем, чтобы правильней представлять себе Южное полушарие, следует вспомнить о полуострове Антарктиды, чей "язычок" уходит на север до 63^0 южной широты. Если бы такой полуостров был в Северном полушарии, то его бы оконечность лежала южнее Архангельска, расположенного на 64^0 северной широты.

Поскольку на стандартных картах изображение суши содержит больше информации для школьников, то его долю порой увеличивают смещением экватора с серединной линии.

3. Астрономия

Ради краткости я сократил изложение этого сюжета, ограничившись по сути одним наблюдением.

В гелиоцентрической системе Птолемея и в книге Коперника считалось, что планеты движутся по эпициклам, окружностям, чьи центры движутся по другим окружностям и т.д., а центр последнего эпицикла движется вдоль окружности — деферента — возможно неравномерно. У Птолемея центром деферента является Земля, а у Коперника — Солнце. Эта система последовательно развивалась и усложнялась и на конечной стадии своего развития позволяла предсказывать солнечные затмения с точностью до 1–2 дней.

Гелиоцентрическая система начала с высокой точностью соответствовать наблюдениям только после Кеплера: согласно его законам орбиты движения планет — эллипсы, “конические сечения”. [12)]

Кеплеру помогло знакомство с теорией конических сечений, которая до этого рассматривалась в теории алгебраических уравнений или просто из эстетических соображений. Забавно, что теория конических сечений была построена в работах Аполлония по геометрии в конце 3-го века до н.э. и была развита до такой степени, что в его изложении изучалась вплоть до Кеплера. Он же в своих работах по астрономии ввел и эпициклы для объяснения неравномерного движения планет. Сам Аполлоний эти два своих направления исследований никак не связывал.

Как мы уже отмечали, и Аполлоний, и Птолемей были связаны с Александрийским Мусейоном.

Теория Кеплера, очевидно, тоже является приближенной. Важным наблюдаемым эффектом явился сдвиг эллиптической орбиты Меркурия (прецессия перигелия Меркурия): его орбита является эллиптической только в первом приближении, в более точном приближении ее следует рассматривать как эллипс, который одновременно вращается в плоскости с периодом более 225 тыс. лет. [13)] Объяснение этого эффекта не вытекает из классической механики и было получено Эйнштейном в его работе по теории гравитации, в которой были предложены уравнения общей теории относительности. [14)] Справедливость этих уравнений обосновывалась полученной из них правильной оценкой скорости прецессии перигелия Меркурия, другие подтверждения этих уравнений были получены через несколько лет.

В конце же лекции я хотел высказать несколько тезисов, ради которых я и ввел в свой доклад на школьном съезде астрономический сюжет:

- Астрономия и космология на протяжении всех времен были одними из движущих сил развития геометрии.
- Астрономия служит блестящим полем для приложения геометрических знаний и приложения геометрических понятий.
- Астрономия дает доступный школьникам пример *научной революции* — переход от геоцентрической системы к гелиоцентрической.

- Сейчас, когда наше представление о Вселенной быстро изменяется, когда открываются экзопланеты и идет поиск жизни во Вселенной, космология находится в стадии бурного развития, о котором нас регулярно извещают новостные сайты (например, сегодня в утренних новостях сообщили, что на ближайшей к нам экзопланете невозможна жизнь из-за высокого уровня радиации звезды, из-за отсутствия на планете атмосферы и, тем самым, парникового эффекта, которому мы обязаны существованием жизни и который часто упоминается только в негативном свете), а принципы и методы классической астрономии лежат в основе систем GPS и ГЛОНАСС.
- К сожалению с 1994 г. астрономия выведена за пределы школьной программы. *Математики должны поддержать возвращение астрономии в школьную программу.*

Примечания и комментарии

1) См. И.Г. Дройзен. *История эллинизма.* Тома I–III. Наука, Ювента, Санкт–Петербург, 1997.

2) *Начала Евклида.* ОГИЗ Гос. изд. тех.-теор. лит., Москва–Ленинград. Книги I–VI, 1948; Книги VII–X, 1949; Книги XI–XV. 1950 (перевод с греческого издания, подготовленного известным датским историком науки И.Л. Гейбергом; более половины объема текста составляют обстоятельные научные комментарии переводчика Д.Д. Мордухай–Болтовского).

3) См. Б.Л. Ван дер Варден. *Пробуждающаяся наука. Математика Дренего Египта, Вавилона и Греции.* Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 1959.

Ван дер Варден отнес содержание книг I–IV и XI к Гиппократу, V и XII — к Евдоксу, VII–IX — к пифагорейцам и Архиту (эти книги, в частности, содержат изложение знаменитого алгоритма Евклида), X и XIII — к Теэтету, книга VI, по его мнению, также во многом основана на работах Евдокса (традиционно в издание "Начал" Евклида вносят книги XIV и XV, которые были написаны много позже — первая из них лет через сто после Евклида, а вторая не ранее 6-го века н.э.). Конечно эта трактовка носит дискуссионный характер, но Ван дер Варден привел серьезные научные аргументы для своих выводов. Говоря, что "очень трудно сказать, какие собственные открытия были добавлены Евклидом к трудам его предшественников" (стр. 270), он отметил, что "его "Начала" добились одного из самых больших успехов в мировой литературе... Евклид по заслугам обрел эту славу благодаря своим исключительным дидактическим достоинствам. Он величайший школьный учитель, которого только знает история математики" (стр. 268).

Гейберг отчасти придерживался того же мнения, отмечая, что "'Евклид главным образом подвел итоги всем результатам прежних математических исследований" (И.Л. Гейберг. *Естествознание и математика в классической древности.* ОНТИ, Москва–Ленинград, 1936, стр. 60), но указывал на то, что "ясность и точность терминологии и научного языка, ... которые останутся образцом для всех времен, являются делом Евклида" (там же, стр. 59).

4) При современном аксиоматическом подходе обсуждается и непротиворечивость (возможно условная) системы аксиом. Гильберт строго доказал, что выписанная им система аксиом евклидовой геометрии непротиворечива, если непротиворечива арифметика (см. Д. Гильберт. *Основания геометрии.* Гостехиздат, Москва–Ленинград, 1948). Евклид этот вопрос вообще не обсуждал, поскольку подразумевалось, что его система аксиом описывает свойства реально существующего мира.

5) Последним из известных ученых, кто до появления геометрии Лобачевского, пытался вывести аксиому о параллельных из других аксиом, был Лежандр. Он доказал, что аксиома о параллельных выполняется, если на плоскости существует хотя бы один треугольник, сумма углов которого равна π.

6) Первый доклад Лобачевского о неевклидовой геометрии относится к 1825 г., а первая статья — *О началах геометрии.* См. в кн.: Н.И. Лобачевский. Полное собр. сочинений. Т. I. Гос. изд. тех.-теор. лит., Москва–Ленинград, 1946, стр. 185–261. — к 1829 г. Эта статья была опубликована в "Казанском Вестнике, издаваемом при Императорском Казанском университете" и в одном из первых ее предложений утверждается, что "никакая Математическая наука не должна начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы Геометрию, и что нигде в Математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принужден были допустить в теории параллельных линий" (стр. 185).

В ней Лобачевский вывел формулы, связывающие длины и стороны треугольников (в евклидовой геометрии, как следует из существования растяжений (гомотетий), таких формул нет), показал, что суммы углов треугольников всегда меньше, чем π, и обосновывал непротиворечивость всего аналитического аппарата тем, что "после того, как мы нашли уравнения (17), которые представляют зависимость углов и боков треугольника; когда, наконец, дали мы общие выражения для элементов линий, площадей и объема тел, все прочее в Геометрии будет аналитикой" (стр. 260), а непротиворечивость аналитической части теории вытекает из того, что "эти уравнения (17) переменяются в (уравнения — *прим. авт.*) (20) сферической геометрии, как скоро вместо боков a, b, c ставим $a\sqrt{-1}, b\sqrt{-1}, c\sqrt{-1}$" (стр. 261).

Явные модели геометрии Лобачевского, в которых все эти формулы выполнены, были найдены в 1860-70-ых годах Бельтрами и Клейном. Через несколько лет после Лобачевского, в 1832 г. к аналогичным идеям независимо пришел Бойяи, но его исследования не были столь далеко продвинуты , как у Лобачевского, и поэтому фундаментальная в этой геометрии и введенная Лобачевским специальная функция носит его имя и иногда даже в англоязычной литературе обозначается кириллическим символом:

$$\text{Л}(x) = -\int_0^x \log|\sin(2t)|\,dt.$$

Геометрия Лобачевского называется часто и гиперболической геометрией, поскольку при указанной замене длин сторон x на $x\sqrt{-1}$ формулы сферической геометрии, включающие тригонометрические функции $\sin x$, переходят в формулы, выражающиеся через гиперболические функции $\operatorname{sh} x = -\sqrt{-1}\,\sin(x\sqrt{-1})$.

7) Продолжая мысль о влиянии философии, отметим, что Евдокс находился в длительном общении с Платоном. Более того, "у нас есть определенное сообщение о том, что как Евдокс, так и ... Леодам, использовали по указанию Платона аналитический метод (разработанный Платоном — *прим. авт.*) для новых открытий" (И.Л. Гейберг. *Естествознание и математика в классической древности*, стр. 39).

8) См. Архимед. *Сочинения.* Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 1962 (перевод на русский язык собрания сочинений Архимеда, подготовленного И.Л. Гейбергом).

9) Для вычисления площади круга в Древнем Египте пользовались схожей формулой: $A = \left(\frac{16}{9}R\right)^2$ (см. О. Нейгебауэр. *Точные науки в древности.* Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., Москва, 1963, стр. 89), т.е. фактически использовали приближение $\pi \approx 3.16$. Однако в Древнем Египте "задачи на площади и объемы не составляют самостоятельного раздела математических исследований, а являются только одним из многих приложений численных методов к практическим вопросам" (см. *Точные науки в древности*, стр. 91).

В этой же связи И.Л. Гейберг отмечал, что "там, где начатки науки культивируются только жрецами или практиками, там обычно стремление к исследованию не развивается, а либо задыхается в тисках традиции, либо застывает в рутине. Так было с вавилонянами и египтянами; хотя в области астрономии и геометрии они подготовили работу греков и передали последним много материала, но только греки смогли создать из этой груды сырого материала науку, способную к дальнейшему развитию" (см. *Естествознание и математика в классической древности*, стр. 13–14).

10) Если не быть (вынужденно) кратким, то снимок Тихого океана можно разобрать подробнее, не выходя за рамки школьной программы. Прежде всего любая карта полушария является идеализированной и увидеть все полушарие с любого расстояния до Земли нельзя. На рис. 4 имитируется вид со спутника, который находится на высоте 16909 км над точкой P с координатами $13^0 37'$ южной широты и $150^0 04'$ западной долготы (эти данные приведены в левом нижнем углу рисунка). Поэтому на снимке приведено не полушарие, а участок Земли, который мы видим под некоторым углом α и площадь которого, согласно формуле для площади сегмента сферы, равна $(1-\sin\frac{\alpha}{2})S$, где S — площадь полушария. Угол α находится по формуле $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R}{R+\rho}$ (в этом приближении мы считаем, что Земля имеет форму шара постоянного радиуса), где радиус Земли $R = 6370$ км и $\rho = 16909$ км — расстояние от спутника до поверхности Земли. Мы получаем $\sin\frac{\alpha}{2}\approx 0.274$ и, следовательно, площадь видимого на снимке участка Земли составляет примерно 72.6% от площади полушария или 36.3% Земли, а угловое расстояние от центра P видимого участка до его границы равно $\approx 74.1^0 = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$. Так что, если бы весь Тихий океан был расположен на видимом на снимке участке, то суша занимала бы на нем только 4.6% видимого участка. Но Тихий океан с запада на восток простирается на 19,5 тыс. км, т.е почти на половину экватора, а с севера на юг — на 15.8 тыс. км, т.е. на 79% длины полуэкватора, большая его часть остается тоже за пределами снимка. Если посмотреть на форму океана, то самые грубые оценки показывают, что на видимом на снимке участке Земли суша покрывает как минимум $10-15\%$ поверхности, что значительно меньше той доли, которую суша занимает на снимке (рис. 4).

Воспользовавшись компьютерной мышкой, можно и напрямую убедиться в искажении площади, переведя малые участки снимка в его центральную часть и увидев очевидный эффект кривизны при картографировании. Приведенные выше рассуждения демонстрируют разницу между формальными картами и реальными снимками на больших масштабах, которую можно оценить с помощью известных из школьной программы геометрических формул.

11) Конечно эти координаты излишне точны — длина дуги, отвечающей одной угловой минуте $1'$ приближенно равна 1.85 км, значит дуга в одну угловую секунду $1''$ имеет длину ≈ 30 метров, и координаты больших аэропортов могут варьироваться на величины, сравнимые с угловыми минутами, но я решил сохранить данные из Википедии, снабдив их комментарием.

12) В последние годы доступные школьникам старших классов изложения законов Кеплера и основ геоцентрической и гелиоцентрической систем были предложены в книгах выдающихся ученых, математика и физика: Д.В. Аносов. *От Ньютона к Кеплеру.* МЦНМО, Москва, 2006, и С. Вайнберг. *Объясняя мир. Истоки современной науки.* АНФ, Москва, 2016.

13) К середине 19-го века накопилось большое число астрономических наблюдений и обнаружилось два эффекта, которые невозможно было объяснить ньютоновской механикой, исходя из известных представлений о Солнечной системе — "аномальная" орбита Урана и смещение перигелия Меркурия. Существовала гипотеза о том, что движение Урана можно объяснить с помощью уравнений классической механики, если предположить существование другой планеты. Французский математик и астроном Леверье с помощью численного решения дифференциальных уравнений описал орбиту предполагаемой планеты и, следуя его вычислениям, эта планета — Нептун — была обнаружена астрономами во время и в месте, указанными Леверье, 23 сентября 1846 г. Позднее, в 1859 г. Леверье численно показал, что смещение перигелия (ближайшей к Солнцу точке орбиты) Меркурия нельзя объяснить влиянием

известных к тому времени планет и астероидов. Простейшая гипотеза — аналогичное случаю Урана существование еще одной планеты (она была названа Вулкан) — не подтверждалась наблюдениями. Долгий и активный процесс появления и проверки новых теорий, расширяющих механику Ньютона и объясняющих смещение перигелия Меркурия, привел к общей теории относительности.

14) А. Эйнштейн. *Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности.* В кн.: А. Эйнштейн. Собр. научных трудов. Том I. Наука, Москва, 1965, стр.439–447. Оригинальная публикация: A. Einstein. *Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915. **47**, 831–839.

Iskander Asanovich Taimanov
Sobolev Institute of Mathematics,
Academician Koptyug avenue, 4,
630090, Novosibirsk, Russia