

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 14, стр. А.58–А.65 (2017)

DOI 10.17377/semi.2017.14.047

УДК 51(09)

MSC 01A74

БАНАХ, СОБОЛЕВ И БУРНЫЕ ГОДЫ

С.С. КУТАТЕЛАДЗЕ

ABSTRACT. This is a short story about the mathematical and personal links of Stefan Banach and Sergeï Sobolev.

Keywords: Dirac, von Neumann, distributions, quantum mechanics, Sobolev, Banach.

Лучшие творческие достижения Стефана Банаха (1892–1945) и Сергея Львовича Соболева (1908–1989) пришлись на бурные предвоенные годы. Математические и физические концепции и теории радикально перестраивались, рождались новая физика и новая математика. Эти грандиозные научные события происходили в неблагоприятной обстановке подготовки ко Второй мировой войне и переделу мира.

НОВЫЕ ИДЕИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.
ЗНАКОМСТВО СОБОЛЕВА С КНИГОЙ БАНАХА

Соболев — воспитанник ленинградской-петербургской школы математической физики, занимавшей уже и в 1930-е годы передовые позиции в мире (см. [1]). Одной из самых главных проблем математической физики начала XX века был поиск адекватного математического аппарата для описания квантово-механических явлений.

Принцип неопределенности Гейзенберга демонстрировал отсутствие лапласовского детерминизма в квантовой области и тем самым ставил задачу обобщения понятия функции как строго детерминированной зависимости переменной от аргумента. Новые идеи в расширении понятия функций во многом шли от попыток применить выдающиеся результаты Фредгольма по интегральным уравнениям. Поиски велись по многим направлениям — в теории потенциала, в

KUTATELADZE, S.S., BANACH, SOBOLEV AND TUMULTUOUS YEARS.

© 2017 КУТАТЕЛАДЗЕ С.С.

К 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева.

Поступила 5 июня 2017, опубликована 8 июня 2017.

некоммутативной алгебре, в расширении классов функции предельными переходами, в развитии символического исчисления Хевисайта и в рамках других идей (см. [2]).

Ряд революционных идей в сфере математизации квантовой механики принадлежит Дираку¹. Среди них понятие δ -функции, введенное в 1927 г. в [4] и оказавшееся столь привлекательным, что использовалось даже формалистически настроенными Гильбертом и Нейманом в совместной работе с физиком-теоретиком Нордхеймом, помощником Гильберта (см. [5]).

Дирак писал²:

One cannot go far in the development of the theory of matrices with continuous ranges of rows and columns without needing a notation for that function of a c -number x that is equal to zero except when x is very small, and whose integral through a range that contains the point $x = 0$ is equal to unity. We shall use the symbol $\delta(x)$ to denote this function, i.e., $\delta(x)$ defined by

$$\delta(x) = 0 \text{ when } x \neq 0,$$

and

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Strictly, of course, $\delta(x)$ is not a proper function of x , but can be regarded only as a limit of a certain sequence of functions. All the same one can use $\delta(x)$ as though it were a proper function for practically all the purposes of quantum mechanics without getting incorrect results. One can also use the differential coefficients of $\delta(x)$, $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, \dots , which are even more discontinuous and less "proper" than $\delta(x)$ itself.

Однако вскоре Нейман выступил с критикой концепции Дирака и отказался от использования δ -функции, отмечая её «абсурдные свойства»

$$\delta(x) = 0 \text{ для всех } x \neq 0; \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

(см. [6]).

Подробное изложение взглядов Дирака появилось в 1930 г.³ и уже в 1932 г. вышел перевод этого революционного сочинения на русский язык⁴. Обсуждая понятие δ -функции, Дирак указывает, что она «не является функцией от x в соответствии с обычным математическим определением» и отмечает, что δ -функцию можно назвать «несобственной функцией».

В 1932 г. Нейман развил критику Дирака и изложил собственный подход к квантовой механике, основанный на отказе от символизма Дирака и последовательном использовании операторов в гильбертовом пространстве⁵. Нейман писал⁶:

Дирак в ряде статей и недавно опубликованной книге дал столь краткое и элегантное изложение квантовой механики, также имеющее инвариантный характер, что оно вряд ли может быть превзойдено в этом смысле. Поэтому,

¹О вкладе Дирака в квантовую механику см., например, [3].

²См. [4, с. 625].

³См. [7].

⁴См. [8].

⁵См. [9].

⁶См. [10, с. 10–11].

пожалуй, будет уместным привести здесь некоторые соображения в пользу нашего метода, который существенно отличается от метода Дирака. Упомянутый, перешедший сейчас вследствие своей прозрачности и элегантности в большую часть квантовомеханической литературы, метод Дирака ни в какой мере не сможет удовлетворить требованиям математической строгости — не сможет, даже если и снизить их как-то естественно и разумно до, впрочем, в теоретической физике обычного уровня. Так, например, этот метод последовательно цепляется за ту фикцию, что каждый самосопряженный оператор можно привести к диагональному виду, что, для операторов, для которых это на самом деле не так, приводит к необходимости вводить «несобственные» функции с самопротиворечивыми свойствами. Такое включение математических «фикций» оказывается иногда неизбежным, даже и в случаях, когда речь идет лишь о подсчете результата наглядно определимого опыта. Это не было бы возражением, будь образование этих, недопустимых в сегодняшних рамках анализа, понятий действительно существенно для новой физической теории. Подобно тому как ньютонова механика сразу принесла с собой возникновение в своей тогдашней форме безусловно самопротиворечивого анализа бесконечно малых, так и квантовая механика могла бы подсказать новое построение нашего «анализа бесконечно многих переменных», т. е. вызвать изменение математического аппарата, а не физической теории. Это, однако, ни в коей мере не так, и, напротив, будет показано, что квантовомеханическую «теорию преобразований» можно столь же ясно и единообразно обосновать и математически безукоризненным образом. При этом надо подчеркнуть, что корректное построение отнюдь не состоит в математическом уточнении и разъяснении метода Дирака, но требует с самого начала отличающегося приема — именно, опирается на гильбертову спектральную теорию операторов.

По поводу формализма Дирака далее Нейман пишет⁷:

«Несобственные» конструкции (такие, как $\delta(x)$, $\delta'(x)$) играют в нем решающую роль — они лежат за пределами обычно употребляемых математических методов, а мы надеемся описать квантовую механику с помощью именно этих последних методов.

В 1933 г. по инициативе В. И. Смирнова и Г. М. Фихтенгольца возник семинар по функциональному анализу, где реферировалась недавняя книга Банаха [11], положившая начало эре функционального анализа. Участники семинара знакомились также с сочинениями Неймана и Дирака.

В 1935 г. Соболев использует пространство L_1 и, ссылаясь на идеи своего учителя Н. М. Гюнтера, предлагает «использовать некоторые функции, являющиеся решениями волнового уравнения в некотором обобщенном смысле. Эти решения не только могут не иметь первых производных, но могут быть даже сами неограниченными» (см. [12]). Идея расширения понятия функции получила развитие в революционных сочинениях [13], [14], ознаменовавших рождение современной теории распределений. В пространствах Соболева нашлось место для несобственных функций Дирака.

Интересно отметить, что идеи Неймана отразились и в работах Л. В. Канторовича по «расширению понятия функции», выполненных в 1935 г. (см. [15],

⁷См. [10, с. 29].

[16]). В этих работах фактически строится пространство периодических распределений и даются новые формулы обобщенного свертывания некоторых рядов.

Семинар Смирнова — Фихтенгольца определил влияние Банаха на творчество его участников. Соболев всю жизнь высоко ценил вклад Банаха в современную математику.

ВСТРЕЧИ СОБОЛЕВА С БАНАХОМ

Соболев был связан с Банахом не только тем, что основные работы Соболева использовали банаховы пространства. Соболев и Банах неоднократно встречались во Львове, который вошел в состав УССР в начале Второй мировой войны по условиям пакта Молотова — Риббентропа. Встречи во Львове состоялись и в 1940 и в 1945 гг.

Жизненный и творческий путь Банаха прекрасно освещен его соотечественниками и коллегами; см., в частности, [17], [18]. Трагическая история Львовской математической школы, разгромленной в военные годы, освещена в [19]. Поэтому здесь будут отмечены некоторые малоизвестные подробности встреч Банаха и Соболева. После украинизации Львова Банах занял позицию декана физико-математического университета имени Ивана Франко, который был создан объединением Университета Яна Казимира, созданного польским королем более трех веков назад в 1661 г., и политехнического университета.

Банах был обласкан новыми властями. ВАК СССР присудил Банаху степень доктора физико-математических наук и звание профессора (эти же отличия получили Мазур и Шаудер). Банах стал единственным поляком, занимавшим должность декана. Он возглавил новый отдел функционального анализа, созданный во Львове в рамках филиала Института математики АН УССР в Киеве. Банах неоднократно ездил в Москву и Киев. Любопытно, что в Москве он останавливался у П. С. Александрова. Непререкаем оставался авторитет Банаха в Польше. В 1939 г. он был избран Президентом Польского математического общества и сохранил эту позицию вплоть до своей безвременной кончины в 1945 г.

В 1940 г. во Львове побывали Соболев и П.С. Александров. Они много общались с Банахом и другими львовскими математиками. Отметились они и в знаменитой «Шотландской тетради». Соболев оставил задачу 188, за решение которой назначил бутылку вина (см. [20]).

В 1945 г. Соболев снова посетил Львов. Деталей этой встречи не сохранилось. Принято считать, что Соболев обсуждал с Банахом переезд в Москву. К сожалению, Банах уже был смертельно болен...

ЭПИТАФИЯ БАНАХУ

В 1961 г. Польское математическое общество отмечало пятнадцатую годовщину кончины Банаха. Соболев принял участие в этом мероприятии. Его речь была записана и опубликована на польском языке⁸.

Вот перевод⁹ этой речи:

Дорогие товарищи и друзья!

⁸См. [21].

⁹Выполнен бюро переводов «Прима Виста» в 2017 г.

Ровно пятнадцать лет тому назад наука всего мира понесла тяжелую утрату — умер Стефан Банах. Этот блистательный и крупный математик, один из создателей функционального анализа, важнейшего современного направления в математике, своими многочисленными работами, основанием собственной математической школы, учеников и последователей которой можно найти на всем земном шаре, оставил человечеству ряд выдающихся умозаключений, замечательных достижений человеческого гения. Первая половина XX века была эпохой необычных открытий в области физики и математики. В результате революции в физике, спровоцированной открытием теории относительности и квантовой теории, кардинальным образом изменился облик современной науки, трансформировалось само мировоззрение ученых. Ушли в прошлое классические представления о пространстве и времени, о физических величинах. В современном понимании физические величины — это операторы, т.е. понятие, неизвестное в XIX веке. Весь комплекс идей современной физики, ее понятийный аппарат сформировался благодаря достижениям новой математики. Революция в математике, тем не менее, важная и подготовившая почву для новой физики, проходила параллельно с революцией в физике и даже немного ее опережала. Здесь не были отброшены старые понятия или опровергнуты предшествующие взгляды. Это не соответствовало бы характеру математики. Но здесь, так же, как и в области физики, неожиданно произошло открытие нового, безграничного мира, новой вселенной, где предыдущие математические результаты проявились в ином свете. В настоящее время не осталось буквально ни одной ветви математики, где не ощущалось бы влияние идей функционального анализа, олицетворяющего горячее дыхание современности. У колыбели функционального анализа, среди наиболее выдающихся его создателей, стоял великий польский ученый Стефан Банах.

Профессор Гуго Штейнгауз будет сегодня более детально рассказывать о жизни и творчестве Банаха, поэтому я не стану вдаваться в подробности его деятельности в своем коротком выступлении. Однако я хотел бы в нескольких предложениях охарактеризовать самое главное из того, что сделал в науке Стефан Банах, остановиться на значении его работ для развития классического анализа, численных методов, теории уравнений с частными производными, интегральных уравнений и смежных областей. В первую очередь следует, конечно же, упомянуть общую теорию полных нормированных пространств, которые сегодня называют банаховыми пространствами. Эта теория включает многие разработанные им, в целом первоочередные, задачи, такие как теорема о продлении линейного функционала, теорема об ограниченности обратного оператора, теорема о слабой сходимости операторов, теорема о возможности погружения базового пространства в пространство C , и еще множество других. Современные работы в области численных методов — это уже не сборник рецептов для решения тех или иных практических задач, как это было до Банаха. В них изменился сам предмет исследования. Теперь это всегда исследование конкретных методов построения ε -сети в компактных множествах, принадлежащих банахову пространству. Благодаря этим общим идеям была определена цель и направление работ этой области науки, стали ясны ее главные проблемы и общие методы. Без банахова пространства не могли бы существовать современные численные

методы. Также нет современных работ по теории уравнений с частными производными, где бы в самом основании не присутствовало понятие решения как элемента некоторого функционального банахова пространства. Начало этим новым воззрениям было положено еще при жизни Стефана Банаха его ближайшими друзьями и учениками. Классические понятия существования и однозначности решения были позже дополнены чрезвычайно важным в теории уравнений понятием правильности постановки задачи, т.е. непрерывной зависимости решения от граничных условий и других. Эту непрерывность почти всегда можно выразить с помощью терминов банахова пространства: малым изменениям условий в смысле нормы Банаха соответствуют малые изменения решения в смысле другой нормы Банаха. Влияние функционального анализа не сводится только к постановке задач и формулированию основных понятий. Повторное выяснение содержания существовавших до сих пор методов решения определенных задач привело к расширению их использования, а во многих случаях также — к созданию существенно новых методов. Методы функционального анализа в математической физике, опирающиеся на теорию предстоящих преобразований, на теорию обратимости операторов и на расширение функциональных пространств, стали почти обычным явлением, вытесняя классические, чисто алгоритмические методы, базирующиеся на идеях теории функций. «Теория линейных операций» Стефана Банаха, так же, как это часто бывало с классическими произведениями, стала достоянием широких математических кругов. Введенные в ней понятия, отдельные теоремы и целые теории прочно закрепились в сознании каждого из нас. Польский народ, подарив миру таких людей, как Фредерик Шопен, Адам Мицкевич, Мария Склодовская, которые навсегда вошли в историю культуры всего человечества, по праву гордится своим достойным сыном — Стефаном Банахом, имя которого будет навечно связано с развитием математики XX века. В Советском Союзе Стефана Банаха очень любили и ценили. Я помню, как в момент выхода «Теории операций» в начале тридцатых годов образовалась длинная очередь ожидающих первые редкие экземпляры этой книги, которые появились в Москве и Ленинграде. Их прочитывали с восторгом и энтузиазмом. Все мы, тогда еще молодые, начинающие советские ученые, почувствовали на себе огромное влияние работ и достижений львовской математической школы, самого Банаха и его ближайших друзей и учеников. Некоторых из них, например Шаудера, сегодня уже нет в живых, другие по-прежнему творят. Работы, непосредственно связанные с творчеством Стефана Банаха, основанные на его исследованиях, были опубликованы в Советском Союзе на протяжении последней четверти века, и до сих пор такие работы выходят в свет. Банах был одним из наиболее выдающихся представителей польской математической школы, благодаря которой она получила мировое значение. Мы, советские ученые, всегда видели в фигуре Стефана Банаха своего близкого друга. Некоторое время он был профессором советского Львовского университета, сотрудником Львовского отделения Математического института Украинской академии наук, членом-корреспондентом этой Академии. Мне часто случалось встречать этого милейшего человека. Первый раз было это в 1940 г. во Львове, куда мы приехали вместе с профессором П. С. Александровым. Помню, как поразило меня тогда во Львове, что научная жизнь кипит, рождаются новые идеи, новые

математические понятия. Как сегодня помню «Шотландскую книгу», куда записывались нерешенные задачи. Стефан Банах был душой этой необычной школы. Я помню также и другие встречи с ним, уже в год окончания войны, когда некоторое время он жил в доме отдыха нашей Академии наук в Узком, расположенном в 15 км от Москвы. Несмотря на тяжелый след, который оставила на нем война, годы, проведенные под оккупацией, и несмотря на тяжелую болезнь, подточившую его силы, у него были живые глаза. Это был все тот же общительный, веселый, необычайно доброжелательный и обаятельный Стефан Банах, которого я видел до войны во Львове. Таким он и остался навсегда в моей памяти: с чувством юмора, энергичный, человек с красивой душой и большим талантом.

Стефан Банах был не только выдающимся ученым и необыкновенно легким в общении человеком. В нем соединялись черты глубокого математика и великого организатора. С огромной энергией и теплотой он занялся, в те годы Председатель Львовского математического общества, организацией научной и педагогической работы в советском Львовском государственном университете. С 1940 года Стефан Банах был членом Львовского горсовета. После войны он был членом президиума Всеславянского антифашистского комитета в Софии. Руководил работой во Львовском отделении Математического института Украинской академии наук. Был членом редколлегии старейшего российского и советского журнала «Математический сборник», деканом факультета во Львовском государственном университете, членом-корреспондентом Академии наук УССР. Всегда и везде он вносил с собой живой огонь и энтузиазм. Вся его деятельность была посвящена делу развития науки, делу просвещения и прогресса. В трудные годы для своей страны, сам выходец из народа, он сразу же остро почувствовал, откуда и каким образом люди труда, рабочая интеллигенция Польши получат возможности для развития, найдет путь, ведущий к светлому будущему, путь, общий для наших народов, строящих социализм. Стефан Банах без колебаний и сомнений становится на этот путь, путь дружбы, мира и социализма, несмотря на то, что тогда, быть может, было не так легко его отыскать. Он был активным участником социалистического строительства в годы, когда судьба привела его в нашу страну. Дело, которому он себя посвятил, дело развития математики во всё большей степени претворяется в жизнь в новой социалистической Польше. Я горжусь тем, что мне выпала высокая честь говорить сегодня об этом замечательном человеке и талантливом математике в его необыкновенной, талантливой и гостеприимной стране.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. I. Smirnov (ed.), *Mathematics in Peterburg–Leningrad University*, LSU Press, Leningrad, 1970.
- [2] J. Lützen, *The Prehistory of Distribution Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1982. MR0667854
- [3] K. Gottfried, P. A. M. Dirac and the discovery of quantum mechanics, *Amer. J. Phys.*, **79**:3 (2011), 261–266.
- [4] P. Dirac, *The physical interpretation of the quantum dynamics*, *Proc. Roy. Soc., A*, **113** (765) (1927), 621–641. JFM 53.0846.01
- [5] D. Hilbert, J. von Neumann, and L. Nordheim, *Über das Grundlagen der Quantenmechanik*, *Math. Ann.*, 98 (1927), 1–30; In: J. von Neumann, *Collected Works, Vol. 1*, Pergamon Press, London (1961), 104–133. JFM 53.0849.03

- [6] J. von Neumann, *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Göttinger Nachr. (1927), 1–57. JFM 53.0848.03
- [7] P. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, Clarendon Press, 1930. JFM 56.0745.05
- [8] P. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Translated into Russian, Moscow–Leningrad, GTTI, 1932.
- [9] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1932. Zbl 0005.09104
- [10] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Translated into Russian, Moscow, Nauka Publ., 1964. Zbl 0121.43904
- [11] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Warszawa, 1932. Zbl 0005.20901
- [12] S. L. Sobolev, *General theory of wave diffraction on Riemann surfaces*, Proc. Steklov Inst, **9** (1935), 39–105. Zbl 0011.35201
- [13] S. L. Sobolev, *Cauchy problem in the space of functionals*, Doklady AN SSSR, **3**:7 (1935), 291–294. JFM 61.1200.02
- [14] S. L. Sobolev, *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*, Mat. Sb., **1**:1 (1936) 39–70. Zbl 0014.05902
- [15] L. V. Kantorovich, *On some general method of extending Hilbert space*, Doklady AN SSSR, **4**:3 (1935), 115–118. JFM 61.0436.01
- [16] L. V. Kantorovich, *Some particular methods of extending Hilbert space*, Doklady AN SSSR, **4**: 4–5 (1935), 163–167.
- [17] R. Kaluza, *The Life of Stefan Banach*, Boston, Birkhäuser, 1996. MR1392949
- [18] K. Kuratowski, *A Half Century of Polish Mathematics, Remembrances and Reflections*, Pergamon Press, Oxford etc., 1980. MR0565253
- [19] R. Duda, *Pearls from a Lost City. The Lvov School of Mathematics*, Amer. Math. Soc., 2014. MR3222779
- [20] R. D. Mauldin (ed.), *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café*, Boston, Birkhäuser, 1981. Zbl 0485.01013
- [21] S. L. Sobolew, *Przemówienie wygłoszone na uroczystości ku uczczeniu pamięci Stefana Banacha*, Roczn. Polsk. Towarz. Mat. Ser. 2. Wiadom. Mat., **4**:3 (1961), 261–264.

СЕМЕН САМСОНОВИЧ КУТАТЕЛАДЗЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА,
ПР. КОПТЮГА, 4,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: sskut@math.nsc.ru