S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1–9 (2017) УДК 517.929, 519.17

DOI 10.17377/semi.2017.14.001 MSC 31C10, 31C45

Φ-ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ГРАФАХ

Р. ПАНЕНКО

Abstract. We study certain problems of $\Phi-$harmonic analysis on graphs, where Φ is a strictly convex $N-$function.We introduce the key definitions and reveal that the ones in question are well-defined and what basic properties of harmonic functions hold. Also we prove discrete analogs of classical theorems for harmonic function in the usual sense: uniqueness theorem, Harnack's inequality, Harnack's principle etc.

Keywords: N-function, Φ-harmonicity, Harnack's inequality, graph.

1. Введение

Обращение к гармоническому анализу на дискретных структурах, помимо своей собственной проблематики, имеет интерес в контексте тесной связи между данными структурами и традиционно геометрическими объектами и методами, в особенности это касается метрической геометрии. Важную роль здесь играет понятие квазиизометрии; для ознакомления с базовыми фактами и определениями отсылаем читателя к [1]. Так графы Кэли конечно порожденной группы, рассматриваемые в качестве 1-мерных симплициальных комплексов, являются квазиизометричными пространствами. Это позволяет, например, корректно определять гиперболические группы через метрические свойства их графов Кэли. Также квазиизометрия сохраняет инвариантными такие свойства групп как порядок роста и аменабельность. Для групп, квазиизометричных некоторой нильпотентной, можно утверждать их виртуальную нильпотентность. В общем случае речь идет о тех алгебраических свойствах

Panenko, R., Φ-harmonic functions on graphs.

Окончательный вариант работы был завершен автором в ходе исследовательской деятельности в рамках программы «Level up: Кадровый резерв НГУ».

Поступила 16 марта 2016 г., опубликована 9 января 2017 г.

группы, которые либо можно считать инвариантными относительно квазиизометрий, либо о том, каким образом они могут быть геометрически интерпретированы в соответствующих геометрических реализациях группы: графах Кэли, при рассмотрении действия группы на множестве, в частности, все пространства с внутренней метрикой, допускающие свободное действие группы G, если это действие удовлетворяет некоторыми дополнительными условиям, квазиизометричны друг другу и группе G с любой словарной метрикой, см. [1].

Так можно отметить, что гармонические функции на графе Кэли играют важную роль в предложенном Брюсом Кляйнером варианте доказательства известной теоремы Громова о группах полиномиального роста, см. [12]:

(М. Громов) *Конечно порожденные группы полиномиального роста являются виртуально нильпотентными.*

В свою очередь, порядок роста и аменабельность также имеют тесную связь и с первыми когомологиями группы с коэффициентами в соответствующем банаховом модуле. В частности, в статье [13] исследовались когомологии группы G, действующей на множестве X, с коэффициентами из пространства Орлича $\ell^{\Phi}(X)$. В случае, если действие группы свободно, пространства когомологий первой размерности поддаются описанию в качестве гармонических функций-препятствий для элементов из пространства функций с конечным $\Phi-$функционалом энергии Дирихле быть $\ell_{\Phi}-$суммируемыми. А вопрос о занулении первых когомологий имеет прямое отношение к вопросу аменабельности группы.

С другой стороны, каждое метрическое пространство, в частности, и риманово многообразие, квазиизометрично некоторому графу, а именно $\varepsilon-$сети на этом пространстве, см. [1]. Более того, многие аналитические и геометрические проблемы для многообразия могут быть сведены к аналогичным для $\varepsilon-$сети на нем. Например, такие, как вопрос о существование положительной функции Грина на многообразии, то есть проверки параболичности соответствующей $\varepsilon-$сети, см. [11].

В работах Джозефа Доджика также обсуждается связь между гармоническим анализом на многообразиях и их дискретных аналогах. В частности, в работах [8], [9] изучаются свойства дискретного лапласиана на неориентированных бесконечных графах, главным образом, вопросы связанные с его спектром. Среди прочего, оценки на собственные значения могут быть полезны, поскольку дают некоторые критерии аменабельности и порядка роста группы, действующей на графе Кэли. Отметим еще, что не только тематика, связанная со спектром дискретного лапласиана и соответствующие геометрические приложения, но и задачи математической физики в более широком смысле, адаптированные для дискретного случая, не остаются без внимания исследователей и применяются, например, для изучения распространения волн и тепла на структурах, моделируемых графами, см. [14]. Также можно обратиться к [15], где содержатся результаты подобного рода для ориентированных графов, в частности, исследуются волновое уравнение, уравнение теплопроводности, краевые задачи на графах и некоторые приложения к квантовой механике, и, кроме того, содержится полезный список литературы по данному вопросу. Еще одной областью приложения гармонического анализа на графах является теория бесконечных электрических сетей, весьма подробно рассматриваемая в книге [6], где, помимо прочего, затрагивается теория модулярных пространств.

В данной работе вводятся основные определения гармонического анализа на графах и устанавливаются их базовые свойства. Также в статье доказываются дискретные аналоги теоремы единственности, неравенства Гарнака и теоремы Гарнака о пределе монотонной последовательности гармонических функций. Полученные результаты в значительной степени опираются на идеи, используемые в статье Холопайнена и Соарди [10] для $p-$гармонических функций, где $1 < p < \infty$, и распространяют их результаты на более общий случай $\Phi-$гармонических функций.

В некотором смысле здесь мы продолжает тематику [13], где мы сфокусировали свое внимание на гармоническом анализе в контексте пространств Орлича. И действительно, в том случае, когда рассматриваемый граф является графом Кэли некоторой группы, введенные здесь определения очевидным образом согласуются с конструкциями гармонического анализа на группах, рассматриваемых в упомянутой работе. Заметим, что в [13] в явном виде графы Кэли не рассматривались. Здесь же мы обращаемся к несколько более общему случаю, работая с произвольными бесконечными графами ограниченной степени. Соответственно под гармоническими функциями мы понимаем функции, минимизирующие некоторое обобщение функционала энергии Дирихле на базе $N-$функций. Подобные конструкции восходят к анализу на пространствах Орлича, в свою очередь, обобщающих опыт работы и специфику лебеговых пространств. Для ознакомления с теорией пространств Орлича и $N-$функций см. [3], [5], [4].

2. $N-$функции

Определение 1. *Функцию* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *будем называть* N-функцией*, если она допускает представление*

$$\Phi(x) = \int\limits_0^{|x|} \varphi(t)\, dt,$$

где функция $\varphi(t)$ *определена для* $t \geqslant 0$*, не убывает, непрерывна справа, а также удовлетворяет следующим условиям:* $\varphi(t) > 0$*, если* $t > 0$*;* $\varphi(0) = 0$*;* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$*. В дальнейшем будем писать* Φ' *вместо* φ*.*

Таким образом, N*-функция* Φ *обладает следующими свойствами:*

- $\Phi(x) > 0$*, если* $x > 0$*;*
- Φ *четна и выпукла;*
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$.

Определение 2. *Если* Φ *—* N*-функция, то функция, заданная следующим образом*

$$\Psi(x) = \int\limits_0^{x} (\Phi')^{-1}(t)\, dt, \quad \text{где } (\Phi')^{-1}(x) = \sup_{\Phi'(t)\le x} t,$$

называется дополнительной к Φ.

Вспоминая, что производная $N-$функции монотонна и непрерывна справа, легко видеть, что

$$\Psi'(x) = \sup_{\Phi'(t)\le x} t$$

является правой обратной функцией к $\Phi'(x)$ и обладает теми же свойствами, а правая обратная функция к $\Psi'(x)$, в свою очередь, совпадает с $\Phi'(x)$. Если $\Phi'(x)$ строго монотонна и не имеет разрывов, то данные функции являются обратными в обычном смысле и справедливо равенство

$$\Psi'(\Phi'(x)) = x.$$

В частности, налагая на Φ требование строгой выпуклости, мы гарантируем строгую монотонность $\Phi'(x)$, см., например, [7, гл. V, §4.3]. Далее мы будем считать, что Φ удовлетворяет данному требованию.

Если Ψ — N-функция, дополнительная к N-функции Φ, то Φ — дополнительная к Ψ.

Замечание. Пара дополнительных N-функций Φ, Ψ удовлетворяет *неравенству Юнга*

$$ab \le \Phi(a) + \Psi(b)$$

для всех неотрицательных a и b; равенство достигается тогда и только тогда, когда $b = \Phi'(a)$.

3. $\Phi-$гармонический анализ на графах

Пусть $\Gamma = (V,\ E)$ — связный бесконечный граф (без петель) ограниченной степени, где V — множество вершин, а E — множество ребер. Будем писать $x \sim y$, если $(x,\ y)$ — пара смежных вершин, т. е. $(x,\ y) = e \in E$.

Далее, для функции $f\colon S \cup \partial S \to \mathbb{R}$, где $S \subset V$ и

$$\partial S = \bigcup_{x \in S} \{y \in V \backslash S \mid y \sim x\},$$

введем ряд определений.

Определение 3. *Будем называть $\Phi-$лапласианом оператор $\mathbb{R}^{S\cup\partial S} \xrightarrow{\Delta_\Phi} \mathbb{R}^{S\cup\partial S}$, определяемый следующим соотношением*

$$\Delta_\Phi f(x) = \sum_{x \sim y} \Phi'(f(y) - f(x)).$$

Замечание. Под обозначением B^A мы, как обычно, понимаем множество функций из множества A в множество B.

Определение 4. *Функция f называется $\Phi-$гармонической на множестве S, если для всех $x \in S$ выполняется равенство $\Delta_\Phi f(x) = 0$. Обозначим множество всех функций на S, обладающих данным свойством, символом $\mathcal{H}^\Phi(S)$.*

Замечание. Очевидно, что функции вида $af + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{H}^\Phi(S)$, также являются $\Phi-$гармоническими.

Определение 5. *Определим функционал $\mathbb{R}^{S\cup\partial S} \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}^{\ge 0}$ по правилу*

$$\rho(f) = \sum_{x \in S} \sum_{y \sim x} \Phi(f(y) - f(x)).$$

Положим

$$\langle f,\ g\rangle(x,\ y) = \Phi'(f(y) - f(x))(g(y) - g(x)).$$

Определение 6. *Введем операцию свертки пары функций на множестве S, заданную следующей формулой*

$$\langle \Delta_\Phi h,\, f\rangle = \sum_{x\in S}\sum_{y\sim x}\langle h,\, f\rangle(x,\, y).$$

Определение 7. *Будем говорить, что h — Φ-гармоническая в слабом смысле функция, если $\langle \Delta_\Phi h,\ f\rangle = 0$ для всех $f\colon S\cup\partial S\to\mathbb{R}$ таких, что $f|_{\partial S} = 0$.*

Определение 8. *Для каждого $x\in S$ определим $\delta_x : S\to\mathbb{R}$ по правилу*

$$\delta_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = x \\ 0, & \text{если } t \neq x. \end{cases}$$

Следующая лемма позволяет связать между собой оба определения Ф-гармонической функции.

Лемма 1. *Пусть $S\subset V$ — конечное множество. Тогда свойство Φ-гармоничности в слабой форме равносильно Φ-гармоничности. Другими словами, $\Delta_\Phi f = 0$ тогда и только тогда, когда $\langle\Delta_\Phi f,\ g\rangle = 0$ для всех $g\colon S\cup\partial S\to\mathbb{R}$ таких, что $g|_{\partial S} = 0$.*

Доказательство. Имеем по определению

$$\langle \Delta_\Phi f,\ g\rangle = \sum_{x\in S}\sum_{y\sim x}\Phi'(f(y)-f(x))(g(y)-g(x)).$$

Пусть $S = \{x_i\}$. Достаточно очевидно, что справедливо равенство $g(x) = \sum\limits_i g_i\delta_{x_i}(x)$, где $g_i = g(x_i)$. Теперь можем записать:

$$\langle \Delta_\Phi f,\ g\rangle = \sum_i\sum_{x\in S}\sum_{y\sim x} g_i\Phi'(f(y)-f(x))(\delta_{x_i}(y)-\delta_{x_i}(x))$$
$$= -\sum_i\sum_{y\sim x_i} g_i\Phi'(f(y)-f(x_i)) + \sum_i\sum_{x_i\sim x} g_i\Phi'(f(x_i)-f(x)) = -2\sum_i g_i\Delta_\Phi f(x_i).$$

Выражение

$$\langle \Delta_\Phi f,\ g\rangle = -2\sum_i g_i\Delta_\Phi f(x_i)$$

имеет силу для всех g и, в частности, для $\{\delta_{x_i}\}$, что очевидным образом завершает наше доказательство.

□

Заметим, что дифференцирование функционала ρ по Гато дает следующее соотношение

$$\rho'_f(g) = \langle \Delta_\Phi f,\ g\rangle = -2\sum_i g_i\Delta_\Phi f(x_i)$$

Напомним, что дифференциал Гато, как обычно, определяется равенством

$$\rho'_f(g) = \lim_{t\to 0^+}\frac{\rho(f+tg)-\rho(f)}{t}.$$

Далее, проясним связь между $\Phi-$лапласианом и функционалом ρ.

Лемма 2. *Пусть $S \subset V$ — конечное множество. Равенство $\Delta_\Phi f = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда f минимизирует $\rho(g)$ на множестве $M(f) = \{g \colon S \cup \partial S \to \mathbb{R} \mid g|_{\partial S} = f|_{\partial S}\}$.*

Доказательство. Допустим, $f_t = f + tu$, где $t \in \mathbb{R}$ и $u|_{\partial S} = 0$. Очевидно, что $f_t \in M(f)$. Посколькуf минимизирует $\rho(g)$, имеем

$$\rho'_f(u) = 0,$$

что равносильно равенству $\langle \Delta_\Phi f,\ u\rangle = 0$ для всех u таких, что $u|_{\partial S} = 0$, и, следовательно, $\Delta_\Phi f = 0$.

Предположим, $\Delta_\Phi f = 0$ и $g - f|_{\partial S} = 0$. Тогда, воспользовавшись предложением 5.4 из [2], можем заключить

$$\rho(g) > \rho(f) + \rho'_f(g - f) = \rho(f) + \langle \Delta_\Phi f, g - f\rangle = \rho(f).$$

□

Пусть $\{f_i\}$ — последовательность функций на $S \cup \partial S$, где S конечно, сходящихся поточечно к функции f, тогда очевидным образом имеем

$$\rho(f_i) \to \rho(f),\ \Delta_\Phi f_i(x) \to \Delta_\Phi f(x)$$

Теорема 1. *Предположим, что S конечно. Для произвольной функции f, определенной на ∂S, существует такая функция h в $S \cup \partial S$, что h — Φ-гармоническая в S и $h|_{\partial S} = f$.*

Доказательство. Пусть $\{h_i\}$ — последовательность функций из $S \cup \partial S$ такая, что $h_i|_{\partial S} = f$ и

$$\rho(h_i) \to \rho = \inf_g \rho(g),$$

где инфимум берется по всем g таким, что $g|_{\partial S} = f|_{\partial S}$. Можем считать, что $m = \min_{y \in \partial S} f(y) \le h_i \le M = \max_{y\in\partial S} f(y)$. Действительно, в силу того, что $\Phi(x)$ четная и строго возрастает по параметру $|x|$, замена всех значений $h_i(x)$ в тех точках, где $h_i(x) < m$ (или $h_i(x) > M$), на m (соответственно M) лишь уменьшает $\rho(h_i)$, оставляя граничные значения h_i нетронутыми. Следовательно, существует некоторая подпоследовательность (за ней мы сохраним прежние обозначения $\{h_i\}$) которая сходится к функции h на $S \cup \partial S$. Таким образом, имеем $h|_{\partial S} = f$ и $\rho(h) = \lim\limits_{i\to\infty} \rho(h_i)$. То есть h — Φ-гармоническая функция в S.

□

Определение 9. *Будем говорить, что h — Φ-супергармоническая (субгармоническая) в $U \subset V$ функция, если $\Delta_\Phi h(x) \le 0$ (соответственно $\Delta_\Phi h(x) \ge 0$) в каждой точке $x \in U$.*

В силу рассуждений из доказательства леммы 1, h — Φ-супергармоническая (субгармоническая) тогда и только тогда, когда

$$\langle \Delta_\Phi h,\ f\rangle \ge 0 \text{ (соответственно } \le 0)$$

для всех $f \colon U \cup \partial U \to \mathbb{R}^+$ таких, что $f|_{\partial U} = 0$ и f имеет конечный носитель.

Теорема 2. *Пусть f — Φ-супергармоническая, а g — Φ-субгармоническая функции на конечном множестве S такие, что $f \ge g$ на ∂S. Тогда $f \ge g$ в S.*

Доказательство. Определим пару множеств

$$A = \{x \in S \mid g(x) \le f(x)\},$$
$$B = \{x \in S \mid g(x) > f(x)\}$$

и, в дополнение, для каждого $x \in S$ построим следующие множества:

$$C_x = \{y \in S \cup \partial S \mid y \sim x,\ g(y) \le f(y)\},$$
$$D_x = \{y \in S \cup \partial S \mid y \sim x,\ g(y) > f(y)\}.$$

Положим $u(x) = \max\{0,\, g(x) - f(x)\}$. Тогда $u \ge 0,\ u|_{\partial S} = u|_A = 0$ и $u|_{C_x} = 0$ для каждого $x \in S$.

Поскольку f супергармоническая, а g субгармоническая, мы имеем

$$\langle \Delta_\Phi f,\, u\rangle \ge 0,\ \langle \Delta_\Phi g,\, u\rangle \le 0.$$

И, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 \ge \langle \Delta_\Phi g,\, u\rangle - \langle \Delta_\Phi f,\, u\rangle &= \sum_{x\in S}\sum_{y\sim x}(\langle g,\, u\rangle(x,\, y) - \langle f,\, u\rangle(x,\, y)) \\ = \sum_{x\in A}\sum_{y\sim C_x}(\langle g,\, u\rangle(x,\, y) - \langle f,\, u\rangle(x,\, y)) &+ \sum_{x\in A}\sum_{y\sim D_x}(\langle g,\, u\rangle(x,\, y) - \langle f,\, u\rangle(x,\, y)) \\ + \sum_{x\in B}\sum_{y\sim C_x}(\langle g,\, u\rangle(x,\, y) - \langle f,\, u\rangle(x,\, y)) &+ \sum_{x\in B}\sum_{y\sim D_x}(\langle g,\, u\rangle(x,\, y) - \langle f,\, u\rangle(x,\, y)). \end{aligned}$$

В силу того, что $u(x) = u(y) = 0$ для всех $x \in A,\ y \in C_x$, очевидным образом имеем

$$\sum_{x\in A}\sum_{y\sim C_x}(\langle g,\, u\rangle(x,\, y) - \langle f,\, u\rangle(x,\, y)) = 0.$$

Далее,

$$\sum_{x\in B}\sum_{y\sim D_x}(\langle g,\, u\rangle(x,\, y) - \langle f,\, u\rangle(x,\, y)) = \sum_{x\in B}\sum_{y\sim D_x}(a-b)(\Phi'(a) - \Phi'(b)) \ge 0$$

где $a = g(y) - g(x),\ b = f(y) - f(x)$.

$$\sum_{x\in A}\sum_{y\sim D_x}(\langle g,\, u\rangle(x,\, y) - \langle f,\, u\rangle(x,\, y)) = \sum_{x\in A}\sum_{y\sim D_x} u(y)(\Phi'(a) - \Phi'(b)) > 0,$$

где $u > 0$ и $g(x) \le f(x)$, $g(y) > f(y)$, что влечет $a = g(y) - g(x) > f(y) - f(x) = b$.

$$\sum_{x\in B}\sum_{y\sim C_x}(\langle g,\, u\rangle(x,\, y) - \langle f,\, u\rangle(x,\, y)) = \sum_{x\in B}\sum_{y\sim C_x} -u(x)(\Phi'(a) - \Phi'(b)) > 0,$$

где $u > 0$ и $g(x) > f(x)$, $g(y) \le f(y)$, следовательно, $a = g(y) - g(x) < f(y) - f(x) = b$. Имеем, таким образом, в том случае, когда B не пусто,

$$0 \ge \langle \Delta_\Phi g,\, u\rangle - \langle \Delta_\Phi f,\, u\rangle > 0.$$

Полученное противоречие завершает наше доказательство. □

Следствие 1. *Положим, f и g — это Φ-гармонические функции на конечном множестве S такие, что $f|_{\partial S} = g|_{\partial S}$. Тогда $f = g$ на S.*

Далее $U \subset V$ — некоторое подмножество вершин, возможно бесконечное.

Теорема 3. *(Неравенство Гарнака)*
Пусть Φ и Ψ — пара двойственных $N-$функций, и $h\colon U \cup \partial U \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ — Φ-супергармоническая на U функция. Тогда для каждого $x \in U$ имеет место оценка

$$\max_{y\sim x} h(y) \leq [\Psi'(\Phi'(1)\deg(x)) + 1]h(x)$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$\widetilde{h_\varepsilon(t)} = \frac{h(t)+\varepsilon}{h(x)+\varepsilon}$$

Имеем $\widetilde{h_\varepsilon(t)} > 0$ и $\widetilde{h_\varepsilon(x)} = 1$. Далее,

$$0 \geq \Delta_\Phi \widetilde{h_\varepsilon(x)} = \sum_{x\sim y} \Phi'(\widetilde{h_\varepsilon(y)} - \widetilde{h_\varepsilon(x)}) = \sum_{x\sim y,\, \widetilde{h_\varepsilon(y)}>1} \Phi'(\widetilde{h_\varepsilon(y)}-1)) - \sum_{x\sim y,\, \widetilde{h_\varepsilon(y)}<1} \Phi'(1-\widetilde{h_\varepsilon(y)})$$

Таким образом, можем заключить, что

$$\Phi'(1)\deg(x) \geq \sum_{x\sim y,\, \widetilde{h_\varepsilon(y)}<1} \Phi'(1-\widetilde{h_\varepsilon(y)}) \geq \sum_{x\sim y,\, \widetilde{h_\varepsilon(y)}>1} \Phi'(\widetilde{h_\varepsilon(y)}-1)) \geq \Phi'(\max_{y\sim x} \widetilde{h_\varepsilon(y)}-1).$$

Теперь, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в неравенстве

$$\Phi'(1)\deg(x) \geq \Phi'\left(\frac{\max\limits_{y\sim x} h(y)+\varepsilon}{h(x)+\varepsilon} - 1\right),$$

и вспоминая о связи между двойственными $N-$функциями, имеем требуемую оценку

$$\max_{y\sim x} h(y) \leq [\Psi'(\Phi'(1)\deg(x)) + 1]h(x).$$

□

Лемма 3. *Пусть $\{S_i\}$ — возрастающая последовательность конечных связных подмножеств V, и пусть $U = \bigcup_i S_i$. Допустим, что $\{h_i\}$ — последовательность функций на $U \cup \partial U$ такая, что $h_i(x) \to h(x) < \infty$ для всех $x \in U \cup \partial U$. Тогда, если h_i — Φ-гармоническая (или Φ-супергармоническая, Φ-субгармоническая) на каждом S_i, то h — Φ-гармоническая (соответственно Φ-супергармоническая, Φ-субгармоническая) на U.*

Доказательство. Получается как прямое следствие определений и равенств $\Delta_\Phi h_i(x) \to \Delta_\Phi h(x)$. □

Теорема 4. *(Принцип Гарнака)*
Допустим, что S_i и U определены так же, как и в предыдущей лемме. Пусть $\{h_i\}$ — возрастающая последовательность функций на $U \cup \partial U$. Тогда, если h_i — Φ-гармоническая (или Φ-супергармоническая) на каждом S_i, то или $h_i(x) \to \infty$ для всех $x \in U$, или $h_i(x) \to h(x)$ для всех $x \in U$ и $h-$ Φ-гармоническая (соответственно Φ-супергармоническая) на U.

Доказательство. Допустим, $h_i(x) \to a < \infty$ в некоторой точке $x \in U$. По неравенству Гарнака последовательность $\{h_i\}$ равномерно ограничена на множестве $\{y \in V \mid x \sim y\}$, а также, аналогичным образом, учитывая строение множества U, на любом связном конечном подмножестве $S \subset U \cup \partial U$. Таким образом, $h_i(x) \to h(x)$ для всех $x \in U \cup \partial U$, что по предыдущей лемме дает нам требуемые свойства Φ-гармоничности (соответственно Φ-супергармоничности). □

Автор выражает глубокую признательность Я. А. Копылову, предложившему обратить внимание на рассматриваемые в статье проблемы, и благодарен за плодотворное обсуждение данных вопросов. Автор также хотел бы поблагодарить рецензента за полезные замечания, которые способствовали улучшению текста.

References

[1] D. Burago, Yu. Burago and S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol.33. A.M.S., Providence, 2001

[2] I. Ekeland, R. Témam, *Convex Analysis and Variational Problems*, Classics in Applied Mathematics, **28**, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1999. MR1727362

[3] M.A. Krasnosel'skii, Ya.B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961. MR0126722

[4] M.M. Rao, Z.D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Pure Appl. Math., **146**, Marcel Dekker, New York, 1991. MR1113700

[5] M.M. Rao, Z.D. Ren, *Applications of Orlicz spaces*, Pure Appl. Math., **250**, Marcel Dekker, New York, 2002. MR1890178

[6] P. Soardi, *Potential Theory on Infinite Networks*, Lecture Notes in Mathematics, **1590**, Springer-Verlag, Berlin, 1994. MR1324344

[7] V.A. Zorich, *Mathematical Analysis,* **I**, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR2033094

[8] J. Dodziuk *Laplacian on manifolds and analogous difference operator for graphs*, Contemp. Math., **49** (1986), 45–49. MR0833803

[9] J. Dodziuk, L. Karp *Spectral and function theory for combinatorial Laplacians*, Contemp. Math., **73** (1988), 25–40. MR0954626

[10] I. Holopainen, P. Soardi, *p-harmonic functions on graphs and manifolds*, Manuscripta mathematica, **94**:1 (1997), 95–110. MR1468937

[11] M. Kanai, *Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan,**38** (1986), 227–238. MR0833199

[12] B. Kleiner, *A new proof of Gromov's theorem on groups of polynomial growth*, J. Amer. Math. Soc., **23**:3 (2010), 815–829. MR2629989

[13] Ya.A. Kopylov, R.A. Panenko, *Φ-harmonic functions on discrete groups and the first ℓ^{Φ}-cohomology*, Sibirsk. Mat. Zh., **55**:5 (2014), 1104—1117. MR3289114

[14] M. Pagliacci, *Heat and wave equation on homogeneous trees*, Boll. Un. Mat. Ital. Ser. VII, **A7**:1 (1993), 37–45. MR1215097

[15] D.V. Stepovoi, *Models and algorithms for solving problems of mathematical physics on oriented graphs and its application in quantum mechanics*, Author's Summary of Candidate Dissertation, Rostov-on-Don, 1998.

Roman Panenko
Novosibirsk State University,
ul. Pirogova 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: panenkora@gmail.ru