S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 10–21 (2017) УДК 517.928.2
DOI 10.17377/semi.2017.14.002 MSC 34E20

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ БИСИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ РОБЕНА

Д.А. ТУРСУНОВ

Abstract. The modified method of boundary functions constructed full, uniform asymptotic expansion of the solution bisingular Robin problem for a second order ordinary differential equations with turning points in the real axis. Constructed uniform asymptotic expansion of the solution of the Robin problem justified by the principle of maximum.

Keywords: asymptotic expansion, bisingularly problem, Robin problem, small parameter, boundary function.

1. Введение

Интерес к задачам с точками поворота для уравнений второго порядка был стимулирован задачами механики сплошной среды, гидродинамики, квантовой физики и др. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с точками поворота, исследованы в работах В.Вазова (W.Wasow) [1, 2], Олвера (F.W.J.Olver) [3, 4] и др. Как нам известно, обычно для построения асимптотических разложений решений бисингулярных задач исследователи применяют метод сращивания (метод согласования) [5, 6], или метод регуляризации [7, 8], или другие методы, но кроме метода пограничных функций. Так как не удавалось применять классический метод пограничных функций Вишика-Люстерника-Васильевой-Иманалиева. Нами предлагается модификация метода пограничных функций, благодаря которой удается построить полные, равномерные асимптотические разложения решений бисингулярных задач. В работах [9]-[12] этот метод в другом виде применялся для построения асимптотических разложений решений обыкновенных дифференциальных уравнений с точками поворота. В данной работе развивается идея модификации метода

Tursunov, D.A., The asymptotic solution of the bisingular Robin problem.

Поступила 10 октября 2016 г., опубликована 16 января 2017 г.

пограничных функций т.е., предлагаемый алгоритм для построения полных асимптотических разложений решений бисингулярных задач Робена применяется впервые.

2. Постановка задачи

Исследуем задачу Робена

$$\varepsilon y_\varepsilon''(x) - x(x-x_0)^2 a(x) y_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0) - \alpha y_\varepsilon'(0) = A_1, \quad y_\varepsilon(1) + \beta y_\varepsilon'(1) = A_2, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр, $a(x) \in C^\infty[0,1], f_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k f_k(x),\ x_0 \in (0,1)$, $\forall x \in [0,1]\ a(x) > 0,\ f_0(0) \neq 0,\ f_0(x_0) \neq 0,\ 0 < \alpha, \beta$ — const, $A_{1,2}$ — const.

Решение задачи (1)–(2) существует и единственно. Нас интересует асимптотическое поведение решения задачи, когда $\varepsilon \to 0$. Задачу (1)–(2) по терминологии А.М. Ильина можно называть бисингулярной [5], т.е. с двойной сингулярностью. Действительно, первая сингулярность – присутствие малого параметра при старшей производной (решение предельного уравнения не удовлетворяет краевым условиям (2)), а вторая сингулрность – решение предельного уравнения имеет особенность, и все члены внешнего разложения имеют нарастающую особенность [5]. Чтобы показать эту особенность рассмотрим структуру внешнего разложения, которого будем искать в виде ряда

$$U_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad \varepsilon \to 0. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, получим рекуррентную систему уравнений:

$$-x(x-x_0)^2 a(x) u_0(x) = f_0(x),$$

$$x(x-x_0)^2 a(x) u_k(x) = u_{k-1}''(x) - f_k(x),\ k \in N,$$

или

$$u_0(x) = -\frac{f_0(x)}{x(x-x_0)^2 a(x)},\ u_k(x) = \frac{u_{k-1}''(x) - f_k(x)}{x(x-x_0)^2 a(x)},\ k \in N.$$

Следовательно, ряд (3) примет вид

$$U_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{F_k(x)}{x^{3k+1}(x-x_0)^{4k+2}}, \quad \varepsilon \to 0,$$

где $F_k \in C^\infty[0,1],\ k = 0, 1, \ldots$

Нетрудно заметить, что

$$u_k(x) = O(1/x^{3k+1}), \quad x \to 0; \quad u_k(x) = O(1/(x-x_0)^{4k+2}), \quad x \to x_0.$$

т.е. с увеличением номера k растут и особенности. И поэтому при $0 \le x \le \sqrt[3]{\varepsilon}$ или $|x - x_0| \le \sqrt[4]{\varepsilon}$ асимптотический ряд (3) не только не приближает решение $y_\varepsilon(x)$, но даже теряет асимптотический характер.

Для построения равномерного асимптотического разложения решения задачи (1)–(2) применяем аналог метода пограничных функций. Построение асимптотического разложения состоит из двух частей: построение формального асимптотического разложения решения (ФАРР) и обоснование этого ФАРР.

3. Построение ФАРР

ФАРР задачи (1)–(2) ищем в виде

$$y_\varepsilon(x) = V_\varepsilon(x) + \chi_1(x)W_\mu(\tau) + \chi_2(x)Q_\lambda(\eta) + \Pi_\gamma(\xi), \tag{4}$$

где $V_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(x)$, $\quad W_\mu(\tau) = \sum\limits_{k=-1}^{+\infty} \mu^k w_k(\tau)$, $\quad Q_\lambda(\eta) = \sum\limits_{k=-2}^{+\infty} \lambda^k q_k(\eta)$,
$\Pi_\gamma(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \gamma^k \pi_k(\xi)$, $\tau = \dfrac{x}{\mu}$, $\quad \mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$, $\quad \eta = \dfrac{x - x_0}{\lambda}$, $\quad \lambda = \sqrt[4]{\varepsilon}$, $\xi = \dfrac{1-x}{\gamma}$,
$\gamma = \sqrt{\varepsilon}$, $\quad \chi_i(x)$— функции срезки, $\chi_i(x) \in [0,1]$, $\chi_i \in C^\infty[0,1], i = 1, 2$

$$\chi_1(x) = 1 \text{ при } 0 \le x \le \delta/3 \text{ и } \chi_1(x) = 0 \text{ при } 2\delta/3 \le x,$$

$$\chi_2(x) = 1 \text{ при } |x - x_0| \le \delta/3 \text{ и } \chi_2(x) = 0 \text{ при } 2\delta/3 \le |x - x_0|,$$

$0 < \delta$ — достаточно малое число, не зависящее от малого параметра ε.

Равенство (1) запишем в виде

$$\varepsilon y''_\varepsilon(x) - x(x-x_0)^2 a(x) y_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x) - \chi_1(x)h_\varepsilon(x) - \chi_2(x)\widetilde{h}_\varepsilon(x) + \\ + \chi_1(x)h_\varepsilon(x) + \chi_2(x)\widetilde{h}_\varepsilon(x), \tag{5}$$

Здесь по идее метода введены вспомогательные функции $h_\varepsilon(x)$ и $\widetilde{h}_\varepsilon(x)$ которые представимы в виде:

$$h_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(g_k + \sum_{j=1}^{\infty} h_{k,j} x^j \right), \ \varepsilon \to 0, \ x \to 0;$$

$$\widetilde{h}_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(g_{k,0} + g_{k,1}(x - x_0) + \sum_{j=2}^{\infty} \widetilde{h}_{k,j}(x-x_0)^j \right), \ \varepsilon \to 0, \ x \to x_0,$$

коэффициенты g_k, $h_{k,j}$, $g_{k,0}$, $g_{k,1}$, $\widetilde{h}_{k,j}$ конкретизируются ниже. Они выбираются так, чтобы выполнялись соотношения

$$a)\ v_k(x) \in C^\infty[0,1]; \quad b)\ w_{3k+s}(\tau) = O(\tau^{s-3}), s = 0,1,2, \ k = -1, 0, 1, \ldots;$$

$$c)\ q_{4k+s}(\eta) = O(\eta^{s-4}), s = 0,1,2,3; \ k = -1, 0, 1, \ldots$$

Подставляя (4) в равенство (5) получаем

$$\varepsilon\big(V''_\varepsilon + \widetilde{V}_\varepsilon(x)\big) - x(x-x_0)^2 a(x) V_\varepsilon = f_\varepsilon(x) - \chi_1(x)h_\varepsilon(x) - \chi_2(x)\widetilde{h}_\varepsilon(x), \tag{6}$$

$$\mu W''_\mu(\tau) - \mu\tau\widetilde{a}(\mu\tau) W_\mu(\tau) = h_{\mu^3}(\tau\mu), \tag{7}$$

$$\lambda^2 Q''_\lambda(\eta) - (\lambda\eta)^2 b(\lambda\eta) Q_\lambda(\eta) = \widetilde{h}_{\lambda^4}(x_0 + \eta\lambda), \tag{8}$$

$$\Pi''_\gamma(\xi) - c(\gamma\xi)\Pi_\gamma(\xi) = 0, \tag{9}$$

где
$\widetilde{V}_\varepsilon(x) = \chi''_1(x)W_\varepsilon(x) + 2\chi'_1(x)W'_\varepsilon(x) + \chi''_2(x)Q_\varepsilon(x) + 2\chi'_2(x)Q'_\varepsilon(x)$,
$\widetilde{a}(\mu\tau) = (\mu\tau - x_0)^2 a(\mu\tau)$,
$b(\lambda\eta) = (\lambda\eta + x_0) a(\lambda\eta + x_0)$,
$c(\gamma\xi) = (1 - \gamma\xi)(1 - x_0 - \gamma\xi)^2 a(1 - \gamma\xi)$.

Здесь $W_\varepsilon(x)$, $Q_\varepsilon(x)$ есть ряды $W_\mu(\tau)$, $Q_\lambda(\eta)$, соответственно, переписанные в переменных ε и x. $\widetilde{a}(\mu\tau)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\mu\tau)^k\widetilde{a}_k$, $b(\lambda\eta)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\lambda\eta)^k b_k$, $c(\gamma\xi)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\gamma\xi)^k c_k$. Ниже доказывается, что $\widetilde{V}_\varepsilon(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\widetilde{v}_k(x)$.

Начнем с равенства (7), имеем

$$lw_{-1}\equiv w''_{-1}(\tau)-\tau\widetilde{a}_0 w_{-1}(\tau)=g_0, \tag{10}$$

$$lw_{3k}=\sum_{j=1}^{3k+1}\widetilde{a}_j\tau^{j+1}w_{3k-j}(\tau)+\sum_{j=0}^{k}\tau^{3j+1}h_{k-j,3j+1}, \tag{11}$$

$$lw_{3k+1}=\sum_{j=1}^{3k+2}\widetilde{a}_j\tau^{j+1}w_{3k+1-j}(\tau)+\sum_{j=0}^{k}\tau^{3j+2}h_{k-j,3j+2}, \tag{12}$$

$$lw_{3k+2}=\sum_{j=1}^{3k+3}\widetilde{a}_j\tau^{j+1}w_{3k+2-j}(\tau)+\sum_{j=0}^{k}\tau^{3j+3}h_{k-j,3j+3}+g_{k+1}, \tag{13}$$

где $\tau\in(0,+\infty)$, $\quad k=0,1,\ldots$

Из граничного условия $y_\varepsilon(0)-\alpha y'_\varepsilon(0)=A_1$ имеем

$$w'_{-1}(0)=0,\ w'_0(0)=w_{-1}(0)/\alpha,\ w'_1(0)=(w_0(0)+v_0(0)-A_1)/\alpha-v'_0(0), \tag{14}$$

$w'_{3k-j}(0)=w_{3k-1-j}(0)/\alpha,\ j=0,1,\ w'_{3k+1}(0)=(w_{3k}(0)+v_k(0))/\alpha-v'_k(0),\ k\in N.$

Дополнительно потребуем, выполнения

$$w_k(\tau)\to 0,\ \text{когда}\quad \tau\to+\infty,\ k=-1,0,1,\ldots \tag{15}$$

Нетрудно заметить, что если $\widetilde{f}(\tau)\in C^\infty[0,+\infty)$ и $0<c-$ const, то задача

$$z''(\tau)-c\tau z(\tau)=\widetilde{f}(\tau),\ z'(0)=z^0,\ 0<\tau<\infty, \tag{16}$$

имеет единственное решение в классе функций, растущих не быстрее какой либо степени τ, когда $\tau\to+\infty$:

$$z(t)=\frac{c_1}{Ai'(0)}Ai(t)-\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\left(Ai(t)\int_0^t\widetilde{f}(s)Bi(s)ds+Bi(t)\int_t^{+\infty}\widetilde{f}(s)Ai(s)ds\right),$$

где $c_1=\dfrac{z^0}{\sqrt[3]{c}}+\dfrac{Bi'(0)}{\sqrt[3]{c}}\int\limits_0^{+\infty}\widetilde{f}(s)Ai(s)ds,\quad t=\sqrt[3]{c}\tau,\ Ai(t),\ Bi(t)$ — функции Эйри.

При этом, если $\widetilde{f}(\tau)=O(\tau^m)$, при $\tau\to+\infty$, то $z(\tau)=O(\tau^{m-1}),\ m-const.$

Это означает, что задачи (10)–(13), (14) имеют единственные решения. Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть в задаче* (16) *функция* $\widetilde{f}(\tau)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\widetilde{f}_k}{\tau^{3k+j}},\ \tau\to+\infty,\ j=0,1,2,$ *тогда в области* $0<\tau\le+\infty$ *существует решение уравнения*

$$z''(\tau)-c\tau z(\tau)=\widetilde{f}(\tau), \tag{17}$$

который при $\tau\to+\infty$ *разлагается в асимптотический ряд*

$$z(\tau)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z_k}{\tau^{3k+1+j}},\ j=0,1,2. \tag{18}$$

При этом асимптотический ряд (18) *можно многократно почленно дифференцировать и он является асимптотическим разложением решения уравнения* (17).

Доказательство. Нетрудно заметить, что дифференцируемость асимптотического ряда (18) вытекает непосредственно из уравнения (17). ФАРР ищем в виде (18), где z_k пока неизвестные коэффициенты. Формально подставляя асимптотический ряд (18), в уравнение (17) получаем

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1+3k+j)(2+3k+j)z_k}{\tau^{3k+3+j}}-c\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z_k}{\tau^{3k+j}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{f}_k}{\tau^{3k+j}},\ j=0,1,2.$$

Отсюда определяем все коэффициенты z_k :

$$z_0=-\widetilde{f}_0/c,\quad z_{k+1}=((1+3k+j)(2+3k+j)z_k-\widetilde{f}_{k+1})/c,\quad k=0,1,\dots$$

Оценим остаточный член этого асимптотического разложения. Пусть

$$r(\tau)=z(\tau)-\widetilde{z}(\tau),\quad \widetilde{z}(\tau)=\sum_{k=0}^{m}\frac{z_k}{\tau^{3k+1+j}},\quad j=0,1,2.$$

Тогда для $r(\tau)$ получим

$$r''(\tau)-c\tau r(\tau)=O(1/\tau^{3m+3+j}),\quad j=0,1,2,\quad \tau\to+\infty.$$

Отсюда следует, что $r(\tau)=O(1/\tau^{3(m+1)+1+j}),\quad j=0,1,2,\ \tau\to+\infty.$ □

Теперь перейдем к определению неизвестных коэффициентов $h_{k,j}$, в равенствах (11), (12), (13). Их подберем так, чтобы степени τ, при $\tau\to+\infty$, в правых частях равенств (11), (12), (13) не превышали нуля. Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2. *Пусть в уравнениях* (11), (12), (13) *при* $\tau\to+\infty$ *коэффициенты* $h_{k,j}$*:*

$$h_{k,j}=-\sum_{m=1}^{3k+1}\widetilde{a}_{m+j-1}w_{3k-m,m},$$

тогда, при $\tau\to+\infty$, *справедливы разложения*

$$w_{3k+j}(\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_{3k+j,3m-j}}{\tau^{3m-j}},\ j=0,1,2,\ k=-1,0,1,\dots \tag{19}$$

Доказательство. Применяя лемму (1) к уравнению (10), при $\tau\to+\infty$, получим

$$w_{-1}(\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_{-1,3m-2}}{\tau^{3m-2}}.$$

Из уравнении (11), (12), (13), при $k=0$, имеем

$$lw_0=\widetilde{a}_1\tau^2w_{-1}(\tau)+\tau h_{0,1}, \tag{20}$$

$$lw_1=\widetilde{a}_1\tau^2w_0(\tau)+\widetilde{a}_2\tau^3w_{-1}(\tau)+\tau^2h_{0,2}, \tag{21}$$

$$lw_2=\sum_{j=1}^{3}\widetilde{a}_j\tau^{j+1}w_{3k+2-j}(\tau)+\tau^3h_{0,3}+g_1. \tag{22}$$

Отсюда, при $h_{0,1}=-\widetilde{a}_1 w_{-1,1},\ h_{0,2}=-\widetilde{a}_2 w_{-1,1},\ h_{0,3}=-\widetilde{a}_3 w_{-1,1},\ \tau\to+\infty$, учитывая лемму (1) имеем

$$w_j(\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_{j,3m-j}}{\tau^{3m-j}},\ j=0,1,2.$$

Допустим, что справедливы разложения (19) для любого $k\in N$, докажем их справедливость для $k+1$. Имеем

$$lw_{3k+3}=\sum_{j=1}^{3k+4}\widetilde{a}_j\tau^{j+1}w_{3k+3-j}(\tau)+\sum_{j=0}^{k+1}\tau^{3j+1}h_{k+1-j,3j+1}. \tag{23}$$

Рассмотрим правую часть этого равенства, когда $h_{k,j}=-\sum\limits_{m=1}^{3k+1}\widetilde{a}_{m+j-1}w_{3k-m,m}$,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{3k+4}\widetilde{a}_j\tau^{j+1}w_{3k+3-j}(\tau)+\sum_{j=0}^{k+1}\tau^{3j+1}h_{k+1-j,3j+1}\\
&=\sum_{s=0}^{k}\Big(\widetilde{a}_{3s+1}\tau^{3s+2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_{3(k-s)+2,3m-2}}{\tau^{3m-2}}+\widetilde{a}_{3s+2}\tau^{3s+3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_{3(k-s)+1,3m-1}}{\tau^{3m-1}}\\
&+\widetilde{a}_{3s+3}\tau^{3s+4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_{3(k-s),3m}}{\tau^{3m}}\Big)+\widetilde{a}_{3k+4}\tau^{3k+5}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_{-1,3m-2}}{\tau^{3m-2}}+\sum_{j=0}^{k+1}\tau^{3j+1}h_{k+1-j,3j+1}\\
&=\sum_{s=0}^{k}\left(\sum_{j=1}^{3(k-s)+4}\widetilde{a}_{3s+j}w_{3(k-s)+3-j,j}+h_{k-s+1,3s+1}\right)\tau^{3s+1}\\
&+(\widetilde{a}_{3k+4}w_{-1,1}+h_{0,3k+4})\tau^{3k+4}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha_m}{\tau^{3m+2}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha_m}{\tau^{3m+2}},\ \alpha_m-\text{const},\ \tau\to+\infty.\end{aligned}$$

Применяя лемму (1) для уравнения (23), получим

$$w_{3(k+1)}(\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_{3(k+1),3m}}{\tau^{3m}},\quad \tau\to+\infty.$$

Аналогично доказываются и остальные случаи, т.е. соотношения

$$w_{3(k+1)+j}(\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_{3(k+1)+j,3m-j}}{\tau^{3m-j}},\quad j=1,2,\quad \tau\to+\infty.$$

□

Используя эти результаты, докажем справедливость соотношения

$$W_\mu(\tau)=W_\mu(x/\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\widetilde{w}_k(x)=W_\varepsilon(x),\ \mu\to0,\ x\in[\delta/3,2\delta/3]. \tag{24}$$

Действительно, используя соотношения (19) и $\mu=\sqrt[3]{\varepsilon}$ имеем

$$W_\mu(x/\mu)=\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k w_k(x/\mu)=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^{3m}\frac{w_{-1,3m+1}}{x^{3m+1}}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\mu^{3(m+k)}\left(\frac{w_{3k,3m}}{x^{3m}}+\frac{w_{3k+1,3m+2}}{x^{3m+2}}+\frac{w_{3k+2,3m+1}}{x^{3m+1}}\right)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\widetilde{w}_k(x).$$

Перейдем к соотношению (8), имеем

$$Lq_{-2}\equiv q''_{-2}(\eta)-\eta^2 b_0 q_{-2}(\eta)=g_{0,0}, \tag{25}$$

$$Lq_{-1}=b_1\eta^3 q_{-2}(\eta)+g_{0,1}\eta, \tag{26}$$

$$Lq_{4k}=\sum_{j=1}^{4k+2}b_j\eta^{j+2}q_{4k-j}(\eta)+\sum_{0}^{k}\eta^{4j+2}\widetilde{h}_{k-j,4j+2}, \tag{27}$$

$$Lq_{4k+1}=\sum_{j=1}^{4k+3}b_j\eta^{j+2}q_{4k+1-j}(\eta)+\sum_{0}^{k}\eta^{4j+3}\widetilde{h}_{k-j,4j+3}, \tag{28}$$

$$Lq_{4k+2}=\sum_{j=1}^{4k+4}b_j\eta^{j+2}q_{4k+2-j}(\eta)+\sum_{0}^{k}\eta^{4j+4}\widetilde{h}_{k-j,4j+4}+g_{k+1,0}, \tag{29}$$

$$Lq_{4k+3}=\sum_{j=1}^{4k+5}b_j\eta^{j+2}q_{4k+3-j}(\eta)+\sum_{0}^{k}\eta^{4j+5}\widetilde{h}_{k-j,4j+5}+g_{k+1,1}\eta. \tag{30}$$

В работе [11] доказана следующая лемма

Лемма 3. *Пусть функция $\widetilde{f}(\eta)\in C^\infty(R)$ и $0<c-$ const. Тогда уравнение*

$$z''(\eta)-c\eta^2 z(\eta)=\widetilde{f}(\eta),\quad \eta\in R, \tag{31}$$

имеет единственное решение в классе функций, растущих не быстрее какой либо степени η, когда $\eta\to\pm\infty$.

Также доказана,что если $\widetilde{f}(\eta)=O(\eta^m)$, при $\eta\to\pm\infty$, то $z(\eta)=O(\eta^{m-2})$, $m-$ *const*. С помощью этой леммы доказывается существование и единственность решений уравнений (25)–(30).

Докажем следующую вспомогательную лемму

Лемма 4. *Пусть в (31) функция $\widetilde{f}(\eta)=\eta\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{f}_k}{\eta^{4k+j}}$, $|\eta|\to+\infty$, $j=0,1,2,3$, тогда в области $|\eta|\leq\infty$ существует решение уравнения (31) который при $|\eta|\to+\infty$ разлагается в асимптотический ряд*

$$z(\eta)=\frac{1}{\eta}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z_k}{\eta^{4k+j}},\ j=0,1,2,3. \tag{32}$$

При этом асимптотический ряд (32) можно многократно почленно дифференцировать и он является асимптотическим разложением решения уравнения (31).

Лемма (4) доказывается точно также как и лемма (1).

Теперь перейдем к определению неизвестных коэффициентов $\widetilde{h}_{k,j}$, в равенствах (27)-(30). Их подберем так, чтобы степени η, при $\eta \to \pm\infty$, в правых частях равенств (27)-(30) не превышало единицы. Докажем вспомогательную следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть в уравнениях* (27)–(30) *при* $|\eta| \to +\infty$ *коэффициенты* $\widetilde{h}_{k,j}$ *определяются равенством:*

$$\widetilde{h}_{k,j} = -\sum_{m=1}^{4k+2} b_{m+j-2} q_{4k-m,m},$$

тогда, при $\eta \to \pm\infty$, *справедливы разложения*

$$q_{4k+j}(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{4k+j,4m-j}}{\eta^{4m-j}},\ j = 0, 1, 2, 3,\ k = -1, 0, 1, \dots \tag{33}$$

Доказательство. Применяя лемму (4) к уравнениям (25) и (26), при $\eta \to \pm\infty$, получим

$$q_{-2+j}(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{-2+j,4m-2-j}}{\eta^{4m-2-j}},\ j = 0, 1.$$

Из уравнении (27)-(30), при $k = 0$, имеем

$$Lq_0 = \sum_{j=1}^{2} b_j \eta^{j+2} q_{-j}(\eta) + \eta^2 \widetilde{h}_{0,2}, \tag{34}$$

$$Lq_1 = \sum_{j=1}^{3} b_j \eta^{j+2} q_{1-j}(\eta) + \eta^3 \widetilde{h}_{0,3}, \tag{35}$$

$$Lq_2 = \sum_{j=1}^{4} b_j \eta^{j+2} q_{2-j}(\eta) + \eta^4 \widetilde{h}_{0,4} + g_{1,0}, \tag{36}$$

$$Lq_3 = \sum_{j=1}^{5} b_j \eta^{j+2} q_{3-j}(\eta) + \eta^5 \widetilde{h}_{0,5} + g_{1,1}\eta. \tag{37}$$

Отсюда, при $\widetilde{h}_{0,j} = -(b_{j-1}q_{-1,1} + b_j q_{-2,2})$, $j = 2, 3, 4, 5$, $\eta \to \pm\infty$, на основании леммы (4) имеем

$$q_j(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{j,4m-j}}{\eta^{4m-j}},\ j = 0, 1, 2, 3.$$

Здесь также, допустим, что справедливы разложения (33) для любого $k \in N$, докажем их справедливость для $k + 1$. Имеем

$$Lq_{4(k+1)} = \sum_{j=1}^{4k+6} b_j \eta^{j+2} q_{4k+4-j}(\eta) + \sum_{0}^{k+1} \eta^{4j+2} \widetilde{h}_{k+1-j,4j+2}. \tag{38}$$

Рассмотрим правую часть этого равенства, при $\eta \to \pm\infty$,

$$\sum_{j=1}^{4k+6} b_j \eta^{j+2} q_{4k+4-j}(\eta) + \sum_{j=0}^{k+1} \eta^{4j+2} \widetilde{h}_{k+1-j,4j+2}$$
$$= \sum_{s=0}^{k} \Big(b_{4s+1}\eta^{4s+3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{4(k-s)+3,4m-3}}{\eta^{4m-3}} + b_{4s+2}\eta^{4s+4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{4(k-s)+2,4m-2}}{\eta^{4m-2}}$$
$$+ b_{4s+3}\eta^{4s+5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{4(k-s)+1,4m-1}}{\eta^{4m-1}} + b_{4s+4}\eta^{4s+6} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{4(k-s),4m}}{\eta^{4m}} \Big)$$
$$+ b_{4k+5}\eta^{4k+7} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{-1,4m-3}}{\eta^{4m-3}} + b_{4k+6}\eta^{4k+8} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{-2,4m-2}}{\eta^{4m-2}} + \sum_{j=0}^{k+1} \eta^{4j+2} \widetilde{h}_{k+1-j,4j+2}$$
$$= \sum_{s=0}^{k} \left(\sum_{j=1}^{4(k-s)+6} b_{4s+j} q_{4(k-s)+4-j,j} + h_{k-s+1,4s+2} \right) \eta^{4s+2}$$
$$+ (b_{4k+5}q_{-1,1} + b_{4k+6}q_{-2,2} + \widetilde{h}_{0,4k+6})\eta^{4k+6} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{\eta^{4m+2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{\eta^{4m+2}},\ \beta_m - const,$$

так как $\widetilde{h}_{k,j} = -\sum\limits_{m=1}^{4k+2} b_{m+j-2} q_{4k-m,m}$. Применяя лемму (4) для (38), получим

$$q_{4(k+1)}(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{4(k+1),4m}}{\eta^{4m}}, \quad \eta \to \pm\infty.$$

Аналогично доказываются и остальные случаи, т.е. равенства

$$q_{4(k+1)+j}(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{4(k+1)+j,4m-j}}{\eta^{4m-j}}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \eta \to \pm\infty.$$

□

Используя эти результаты, докажем справедливость соотношения

$$(39) \quad Q_\lambda(\eta) = Q_\lambda\left(\frac{x - x_0}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{q}_k(x) = Q_\varepsilon(x),\ \mu \to 0,\ \frac{\delta}{3} \le |x - x_0| \le \frac{2\delta}{3}.$$

Действительно, используя соотношения (33) и $\lambda = \sqrt[4]{\varepsilon}$ имеем

$$Q_\lambda\left(\frac{x - x_0}{\lambda}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{4m} \left(\frac{q_{-2,4m+2}}{(x - x_0)^{4m+2}} + \frac{q_{-1,4m+1}}{(x - x_0)^{4m+1}} \right) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{4k} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{4m} \sum_{j=0}^{3} \frac{q_{4k+j,4m-j}}{(x - x_0)^{4m-j}} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{q}_k(x) = Q_\varepsilon(x).$$

Из (24) и (39) следует справедливость соотношения $\widetilde{V}_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{v}_k(x)$.

Отметим, что для любого степенного ряда найдется бесконечно дифференцируемая функция, для которой асимптотическое степенное разложение будет совпадать с этим рядом, [13, 14]. Пусть

$$H_k(x)=\sum_{j=1}^{\infty}h_{k,j}x^j,\ \widetilde{H}_k(x)=\sum_{j=2}^{\infty}\widetilde{h}_{k,j}(x-x_0)^j,$$

где коэффициенты $h_{k,j},\ \widetilde{h}_{k,j}$ определены в леммах (2) и (5).

Перейдем теперь к построению регулярного внешнего решения $V_\varepsilon(x)$. Из (6) имеем

$$-x(x-x_0)^2a(x)v_0(x)=g_0(x)-\chi_1(x)g_0-\chi_1(x)H_0(x)\\ -\chi_2(x)(g_{0,0}+g_{0,1}(x-x_0))-\chi_2(x)\widetilde{H}_0(x),$$

$$-x(x-x_0)^2a(x)v_k(x)=g_k(x)-\chi_1(x)g_k-\chi_1(x)H_k(x)\\ -\chi_2(x)(g_{k,0}+g_{k,1}(x-x_0))-\chi_2(x)\widetilde{H}_k(x)-\widetilde{v}''_{k-1}(x),$$

где $g_k(x)=f_k(x)-v''_{k-1}(x),\ v''_{-1}(x)\equiv 0$.

Отсюда

$$v_0(x)=-\frac{f_0(x)-\chi_1(x)g_0-\chi_2(x)(g_{0,0}+g_{0,1}(x-x_0))}{x(x-x_0)^2a(x)}\\ +\frac{\chi_1(x)}{x(x-x_0)^2a(x)}H_0(x)+\frac{\chi_2(x)}{x(x-x_0)^2a(x)}\widetilde{H}_0(x),$$

$$v_k(x)=-\frac{g_k(x)-\chi_1(x)g_k-\chi_2(x)(g_{k,0}+g_{k,1}(x-x_0))}{x(x-x_0)^2a(x)}\\ +\frac{\chi_1(x)}{x(x-x_0)^2a(x)}H_k(x)+\frac{\chi_2(x)}{x(x-x_0)^2a(x)}\widetilde{H}_k(x)+\frac{\widetilde{v}''_{k-1}(x)}{x(x-x_0)^2a(x)}.$$

Нетрудно заметить, что $v_k(x)\in C^\infty[0,1]$, когда

$$g_k=g_k(0),\ g_{k,0}=g_k(x_0),\ g_{k,1}=g'_k(x_0),\ k=0,1,\dots$$

причем

$$v_0(0)=-\frac{f'_0(0)}{x_0^2a(0)}+\frac{h_{0,1}}{x_0^2a(0)},\ v_0(x_0)=-\frac{f''_0(x_0)}{2x_0a(x_0)}+\frac{\widetilde{h}_{0,2}}{x_0a(x_0)},\ v_0(1)=-\frac{f_0(1)}{(1-x_0)^2a(1)},$$

$$v_k(0)=-\frac{g'_k(0)}{x_0^2a(0)}+\frac{h_{k,1}}{x_0^2a(0)},\ v_k(x_0)=-\frac{g''_k(x_0)}{2x_0a(x_0)}+\frac{\widetilde{h}_{k,2}}{x_0a(x_0)},$$

$$v_k(1)=-\frac{g_k(1)}{(1-x_0)^2a(1)},\ k=1,2,\dots$$

Рассмотрим теперь уравнение (9)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k(\pi''_k(\xi)-c_0\pi_k(\xi))=-\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k\sum_{j=1}^{k}c_j\xi^j\pi_{k-j}(\xi), \tag{40}$$

с граничными условиями

$$\pi'_0(0)=0,\ \pi'_1(0)=(A_2-\pi_0(0)-v_0(1))/\beta-v'_0(1),\ \pi'_{2k}(0)=-\pi_{2k-1}(0)/\beta,\\ \pi'_{2k+1}(0)=-(\pi_{2k}(0)+v_k(1))/\beta-v'_k(1),\ k\in N,\ \lim_{\xi\to+\infty}\pi_s(\xi)=0,\ s=0,1,\dots \tag{41}$$

Как нам известно [6], решения задач (40)-(41) существуют, единственны и экспоненциально убывают, когда $\xi \to +\infty$, $(\pi_0(0) \equiv 0)$.

Таким образом, нами построено формальное асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2). Перейдем к обоснованию этого ФАРР.

4. Обоснование ФАРР (4)

. Пусть $R_\varepsilon(x) = y_\varepsilon(x) - y_\varepsilon^m(x)$, где

$$y_\varepsilon^m(x) = V_\varepsilon^m(x) + \chi_1(x) W_\mu^{3m+1}(\tau) + \chi_2(x) Q_\lambda^{4m+1}(\eta) + \Pi_\gamma^{2m+1}(\xi),$$

$V_\varepsilon^m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} \varepsilon^k v_k(x)$, $W_\mu^{3m+1}(\tau) = \sum\limits_{k=-1}^{3m+1} \mu^k w_k(\tau)$, $Q_\lambda^{4m+1}(\eta) = \sum\limits_{k=-2}^{4m+1} \lambda^k q_k(\eta)$, $\Pi_\gamma^{2m+1}(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{2m+1} \gamma^k \pi_k(\xi)$.

Для остаточного члена $R_\varepsilon(x)$ получим задачу

$$\varepsilon R_\varepsilon''(x) - x(x-x_0)^2 a(x) R_\varepsilon(x) = O(\varepsilon^{m+1}), \quad x \in (0,1), \ \varepsilon \to 0,$$

$$R_\varepsilon(0) - \alpha R_\varepsilon'(0) = O\big(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\big), \ \varepsilon \to 0, \quad R_\varepsilon(1) + \beta R_\varepsilon'(1) = 0.$$

Пусть $R_\varepsilon(x) = \rho(x) r_\varepsilon(x)$, где $\rho(x) = \beta(\beta + 3/2) - x^2\beta/2$, $\rho(x) > 0$, $x \in [0,1]$. Тогда имеем задачу

$$\varepsilon r_\varepsilon''(x) - \frac{2\varepsilon\beta x}{\rho(x)} r_\varepsilon'(x) - \left(x(x-x_0)^2 a(x) + \frac{\varepsilon\beta}{\rho(x)} \right) r_\varepsilon(x) = O(\varepsilon^{m+1}), \ x \in (0,1) \tag{42}$$

$$r_\varepsilon(0) - \alpha r_\varepsilon'(0) = O\big(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\big), \ \varepsilon \to 0, \quad r_\varepsilon(1) + \beta(1+\beta) r_\varepsilon'(1) = 0. \tag{43}$$

Для задачи (42)-(43) применяя теорему 26.2 [6], получим

$$r_\varepsilon(x) = O(\varepsilon^m), \quad x \in [0,1], \ \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, $R_\varepsilon(x) = O(\varepsilon^m)$, $\quad x \in [0,1]$, $\varepsilon \to 0$.

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Для решения задачи* (1)–(2)*, при* $\varepsilon \to 0$*, справедливо асимптотическое разложение* (4)*.*

Замечание Проведя аналогичные вычисления, можно доказать теорему

Теорема 2. *Если* $f_0(1) \neq 0$, $f_0(0) \neq 0$, $f_0(x_0) \neq 0$ $x_0 \in (0,1)$, $n_i \in N, i = 1,2,3$, $x \in [0,1]$ $a(x) > 0$, *функция* $f_\varepsilon(x)$ *бесконечно дифференцируемая по* x *и* ε, *то для решения задачи*

$$\varepsilon y_\varepsilon''(x) - x^{n_1}(1-x)^{n_2}(1-x_0)^{2n_3} a(x) y_\varepsilon = f_\varepsilon(x), \quad x \in (0,1),$$

$$y_\varepsilon(0) = 0, \quad y_\varepsilon(1) = 0,$$

при $\varepsilon \to 0$*, справедливо асимптотическое разложение*

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\rho,\varphi) + \chi_1(x) \sum_{k=-n_1}^{\infty} \sqrt[n_1+2]{\varepsilon^k}\, w_k^{(0)} \left(\frac{x}{\sqrt[n_1+2]{\varepsilon}} \right)$$

$$+ \chi_1(1-x) \sum_{k=-n_2}^{\infty} \sqrt[n_2+2]{\varepsilon^k}\, w_k^{(1)} \left(\frac{1-x}{\sqrt[n_2+2]{\varepsilon}} \right) + \chi_2(x) \sum_{k=-2n_3}^{\infty} \sqrt[2n_3+2]{\varepsilon^k}\, \widetilde{w}_k^{(0)} \left(\frac{x-x_0}{\sqrt[2n_3+2]{\varepsilon}} \right).$$

Заключение. Обобщенным методом пограничных функций построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Робена для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота в действительной оси. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзё (V.A.Puiseux). Построенное формальное асимптотическое разложение решения задачи Робена обосновано принципом максимума.

Исследованную задачу можно обобщить и аналогично, обобщенным методом пограничных функций, построить равномерные асимптотические разложения решения систем сингулярно возмущенных задач, с несколькими точками поворота (целого или дробного порядка) внутри или на границе исследуемой области, с любой степенью точности.

References

[1] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Dover publications, INC, Mineola, New York, 1965. MR0203188

[2] W. Wasow, *Linear turning point theory*, Springer-Verlag, New York, 1985. MR0771669

[3] F.M. Olver, *Connection formulas for second-order differential equations with multiple turning points*, SIAM. J. Math. Anal., **1(8)** (1977), 127–154.

[4] F.M. Olver, *Connection formulas for second-order differential equations having an arbitrary number of turning points of arbitrary multiplicities*, SIAM. J. Math. Anal., **4**:8 (1977), 673–700. MR0454215

[5] A.M. Il'in, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992. MR1182791

[6] A.M. Il'in, A.R. Danilin, *Asymptotic Methods in Analysis*, Fizmatlit, Moscow, 2009 [in Russian].

[7] V.N. Bobochko, *Uniform Asymptotics of a Solution of an Inhomogeneous System of Two Differential Equations with a Turning Point*, Russian Mathematics, **50**:5 (2006), 6–16. MR2280688

[8] V.N. Bobochko, *An Unstable Differential Turning Point in the Theory of Singular Perturbations*, Russian Mathematics, **49**:4 (2005), 6–14. MR2180679

[9] K. Alymkulov, T.D. Asylbekov, S.F. Dolbeeva, *Generalization of the Boundary Function Method for Solving Boundary-Value Problems for Bisingularly Perturbed Second-Order Differential Equations*, Math. Notes, **94**:4 (2013), 451–454. MR3206109

[10] K. Alymkulov, D.A. Tursunov, *On a method of construction of asymptotic decompositions of bisingular perturbed problems*, Russian Mathematics, **60**:12 (2016), 1–8.

[11] D.A. Tursunov, *Asymptotic expansion for a solution of an ordinary second-order differential equation with three turning points*, Tr. IMM UrO RAN, **22**:1 (2016), 271–281. MR3497204

[12] D.A. Tursunov, *Asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed ordinary second-order differential equation with two turning points*, Tomsk state university journal of mathematics and mechanics, **21**:1 (2013), 34–40.

[13] T.G.T. Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques*, cspecially Chap. V., Paris, 1926.

[14] A. Erdelyi, *Asymptotic expansions*, Dover publications, INC, New York, 1956. MR0078494

Dilmurat Abdillajanovich Tursunov
Osh State University,
Faculty of mathematics and information technology,
Department of Informatics,
st. Lenin, 331,
723500, Osh, Kyrgyzstan
E-mail address: tdaosh@gmail.com