S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1011–1016 (2017) УДК 512.542
DOI 10.17377/semi.2017.14.085 MSC 20D05

О ГРУПАХ, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ ГРУППЕ ИЗОМОРФИЗМОВ ВТОРОЙ СПОРАДИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ЯНКО

А.Х. ЖУРТОВ, М.Х. ШЕРМЕТОВА

Abstract. We prove that every finite group having the same set of element orders as $Aut(J_2)$ is isomorphic either to $Aut(J_2)$ or to an extension of a non-trivial 2-group by A_8, or to some soluble group.

Keywords: isospectral groups, Frobenius group, sporadic groups of Janko, finite groups.

1. Введение

В статье рассматриваются только конечные группы. Пусть G — группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество простых делителей порядка группы G, а через $\omega(G)$ — спектр группы G, т.е. множество порядков ее элементов. Группы с одним и тем же спектром называются изоспектральными. Группа распознаваема по спектру, если она изоспектральна только самой себе.

Наши обозначения, в основном, стандартны, их можно найти в [1–5].

В [8] было доказано, что все группы автоморфизмов спорадических групп, за исключением $Aut(J_2)$, распознаваемы по спектру. Настоящая работа посвящена оставшемуся случаю.

Теорема 1. *Пусть G — группа, изоспектральная группа автоморфизмов группы J_2. Тогда либо $G \simeq J_2$, либо G обладает нетривиальной нормальной 2-подгруппой N и $G/N \simeq A_8$, либо G обладает нормальным рядом $1 \leqslant N_1 \leqslant N_2 \leqslant N_3 \leqslant G$, где $N_1 = O_2(G) \neq 1$, N_2/N_1 — нециклическая 5-группа, $N_3/N_2 = T \times C$, где T — элементарная абелева 2-группа, $|C| = 7$ и G/N_3 — циклическая группа порядка 3 или 6.*

Zhurtov, A.Kh., Shermetova, M.Kh., On groups isospectral to the automorphism group of the second sporadic group of Janko.

Поступила 15 июня 2017 г., опубликована 6 октября 2017 г.

Отметим, что авторам неизвестны примеры групп, изоспектральных $Aut(J_2)$ и неизоморфных $Aut(J_2)$. Таким образом, вопрос о распознаваемости группы $Aut(J_2)$ по спектру остается открытым.

Отметим еще, что А.С. Кондратьев [6] описал группы с тем же графом простых чисел, что и $Aut(J_2)$. В его списке содержится 11 типов групп.

2. Предварительные результаты

Для группы G ее графом простых чисел или графом Грюнберга-Кегеля называется неориентированный граф $GK(G)$, множество вершин которого совпадает с $\pi(G)$ и две различные вершины p и q смежны, если в G существует элемент порядка $p \cdot q$. Ясно, что $\omega(G)$ определяет граф $GK(G)$.

Из теоремы Грюнберга-Кегеля [9] вытекает, что разрешимая группа G с несвязным графом $GK(G)$ является либо группой Фробениуса, либо двойной группой Фробениуса, т.е. группой вида $G = ABC$, где $1 \neq A \lhd G$, $A \cdot B$ — группа Фробениуса с ядром A и циклическим дополнением B, а $B \cdot C$ — группа Фробениуса с циклическим дополнением C.

Основные свойства группы Фробениуса с ядром A и дополнением B таковы: A нильпотентна, в B любая подгруппа порядка $p \cdot q$, где p и q (не обязательно различные) — простые числа, является циклической (см. [1]). Отметим еще, что изоспектральные группы, очевидно, имеют один и тот же граф Грюнберга-Кегеля.

Лемма 2.1 ([7], Лемма 1). *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G и G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим заполнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Лемма 2.2 ([6], Предложение 1.4). *Пусть q — нечетное простое число, $q-1$ не равно степени числа 2 и G — конечная группа вида $G = P\lambda(T\lambda\langle x\rangle)$, где P — нетривиальная $\{2,q\}'$-группа, T — 2-группа, $|x| = q$ и $C_G(P) = Z(P)$. Если $[T,x] \neq 1$, то $C_P(x) \neq 1$.*

Лемма 2.3. *Пусть K — абелева G — инвариантная секция группы G и $\varphi : G \to Aut(K)$ — гомоморфизм, индуцированный сопряжением в G. Если g — элемент порядка m из G, $f(x) = 1 + x + \dots + x^{m-1}$ и $f(g^\varphi) \neq 0$ в кольце эндоморфизмов K, то в G есть элемент порядка pm для некоторого простого числа p.*

Доказательство. Вытекает из равенства $(ga)^m = g^m a^{g^{m-1}} a^{g^{m-2}} \dots a$, где $a \in G$. □

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — группа, для которой $\omega(G) = \omega(Aut(J_2))$. Тогда множество $\mu(G)$ максимальных по делимости элементов $\omega(G)$ равно $\{2^3 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5\}$.

Лемма 3.1. *Если G обладает холловой $\{3,5,7\}$-подгруппой H, то выполняется одно из следующих трех условий:*

а) *H — группа Фробениуса с ядром A и дополнением B, где $A = G_3 \times G_5$ и $|B| = 7$;*

б) *H — группа Фробениуса с ядром A и дополнением B, где $A = G_7$ и B — циклическая группа порядка 15;*

в) *$H = ABC$ — двойная группа Фробениуса, где $A = G_5 \lhd H$ и BC — группа Фробениуса порядка 21.*

Здесь G_p означает силовскую p-подгруппу группы G.

Доказательство. Если H — группа Фробениуса с ядром A и дополнением B, то A не может быть 3-группой, поскольку в противном случае B — циклическая группа порядка 35, что невозможно.

Если $|A|$ делится на 3, то $A = G_3 \times G_5$, поскольку $|A|$ не может делиться на 21 из-за своей нильпотентности.

Если же $|A|$ делится на 5, но не делится на 3, то в G есть элемент порядка 21, что неверно.

Наконец, если $|A|$ делится на 7, то $A = G_7$, а B — циклическая группа порядка 15.

Если H не является группой Фробениуса, то по теореме Грюнберга-Кегеля [9] H — двойная группа Фробениуса и выполнен пункт в). □

Лемма 3.2. *Если G разрешима, то она удовлетворяет условиям заключения теоремы 1.*

Доказательство. Предположим противное.

Если $O_7(G) \neq 1$, то по лемме 3.1 холлова $\{3,5\}$-подгруппа из G циклическая порядка 15 и для элемента x порядка 3 из G $C = C_G(x)$ является $\{3,2,5\}$-группой, содежащей элемент порядка 8.

При этом $C_G(x) = \langle x \rangle D$, где D — $\{2,5\}$-группа с силовской подгруппой G_5 порядка 2. Если в D существует циклическая подгруппа F порядка $\geqslant 4$, нормализующая G_5, то поскольку $C_G(x) \cap C_G(G_5)$ не содержит инволюций (иначе в G существовал бы элемент порядка 30), подгруппа G_5F является группой Фробениуса и по лемме 2.1 в G есть элемент порядка 28, что неверно. Поэтому в D существует нетривиальная 2-подгруппа T, которую G_5 нормализует. Подгруппа TG_5 является группой Фробениуса, поэтому по лемме 2.1 в G существует элемент порядка 35, что неверно. Поэтому $O_7(G) = 1$.

Если силовская 7-подгруппа G_7 группы G — нециклическая, то по лемме 3.1 холлова $\{3,5,7\}$-подгруппа H является группой Фробениуса с циклическим дополнением порядка 15 и поэтому подгруппа Фиттинга $F(G)$ — это 2-группа. Так как $C(F(G)) \leqslant F(G)$, то по лемме 2.1 в G есть элемент порядка 30, что неверно. Поэтому G_7 — циклическая группа и по лемме 3.1 H либо группа Фробениуса с ядром $A = G_3 \times G_5$, либо $H = ABC$ — двойная группа Фробениуса, где $A = G_5$ и BC — группа Фробениуса порядка 21.

В обоих случаях G_5 — нециклическая группа, а если H — группа Фробениуса, то G_3 — также нециклическая.

Предположим, что H — двойная группа Фробениуса. Тогда G удовлетворяет условиям пункта 3 теоремы из [6], т.е. в G есть нормальный ряд $1 \leqslant N_1 \leqslant N_2 \leqslant N_3 \leqslant G$, где $N_1 = O_2(G)$, N_2/N_1 — нециклическая 5-группа, $N_3/N_2 = T\lambda C$, где T — 2-группа, C — циклическая группа порядка 7 и G/N_3 — циклическая группа порядка 3 или 6. Поскольку в G нет элементов порядка 28, C — централизует T и поэтому T —элементарная абелева группа. Так как в G есть элемент порядка 8, то $O_2(G) \neq 1$. Таким образом, G удовлетворяет заключению теоремы.

Далее считаем, что H — группа Фробениуса, т.е. $H = A\lambda B$, где $A = G_3 \times G_5$, $|B| = 7$. При этом A и B — нециклические группы.

Если $O_2(G) \neq 1$, то в нециклической группе G_3 существует нетривиальный элемент x, чей централизатор C в $O_2(G)$ нетривиален, и нетривиальный элемент $y \in G_5$, чей централизатор в C нетривиален, поэтому в G существует элемент порядка 30, что невозможно. Поэтому $O_2(G) = 1$.

Так как G удовлетворяет условию (2) заключения теоремы Кондратьева [6], то в G есть нормальный ряд $N_1 \leqslant N_2 \leqslant G$, где $N_1 = A$, $N_2 = AT$, где T — 2-группа, G/N_2 — группа порядка 7 или 14.

По лемме 2.2 T — элементарная абелева группа, поэтому в G нет элементов порядка 8, противоречие. Лемма доказана. □

Лемма 3.3. *Любой неразрешимый композиционный фактор S группы G изоморфен одной из групп следующего списка:*

$$S = \{A_5, A_6, S_4(3), L_2(7), U_3(3), A_7, A_8, U_3(5), L_3(4), J_2\}.$$

В частности, $|S|$ делится на 3.

Доказательство. Поскольку $|S|$ не делится ни на одно простое число, большее семи, S изоморфно группе из следующего списка (см. [10]):

$$S_0 = \{A_5, A_6, S_4(3), L_2(7), L_2(8), U_3(3), A_7, L_2(49), U_3(5), \\ L_3(4), A_8, A_9, J_2, A_{10}, U_4(3), S_4(7), S_6(2), O_8^+(2)\}.$$

Так как по [3] $\omega(S) \not\subseteq \omega(G)$ для

$$S \in \{L_2(8), U_n(2), A_9, A_{10}, U_n(3), O_8^+(2), L_2(49), S_4(7),$$

то заключение леммы справедливо. □

Сохраним обозначения этой леммы до конца доказательства.

Лемма 3.4. *Пусть N — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G. Тогда $S \leqslant G/N \leqslant AutS$ для некоторой простой неабелевой группы S.*

Доказательство. Пусть C — цоколь G/N. Тогда $C = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_r$, где S_i — простая группа и порядок S_i делится на 3, $i = 1, \dots, r$. Предположим, $r \geqslant 2$. Тогда силовская 3-подгруппа из C нециклическая и, поскольку в G нет элементов порядка 21, порядок N не делится на 7. Если $|C|$ делится на 7, то в C есть элемент порядка 21, что невозможно.

Пусть x — элемент порядка 7 в G/N. Тогда $x \notin N(S_1)$, $\langle x, S_1\rangle = S_1 \times S_1^x \times \dots \times S_1^{x^6}$ и x централизует $SS^x \dots S^{x^6} \neq 1$, где S — элемент порядка 3 в S_1. Это невозможно, откуда $r = 1$ и лемма доказана. □

Лемма 3.5. *Выполняется одно из следующих условий:*

(а) *N — 2-группа и G/N изоморфна одной из групп A_8, S_8, J_2, $Aut(J_2)$;*
(б) *$S \in \{L_2(7), U_3(3), A_7\}$.*

Доказательство. Вытекает из основного результата работы [6] с учетом леммы 3.3. □

Лемма 3.6. *Расширение 2-группы посредством S_8 не может быть изоспектральным $Aut(J_2)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $G/N \simeq S_8$, где N — 2-группа. Поскольку в G нет элементов порядка 30, элемент порядка 15 действует на N без неподвижных точек. Таблица 2-модулярных характеров S_8 (см. [11]) показывает, что любой G-главный фактор V группы N имеет как G-модуль размерность 6, 8 или 40.

Если $dim(V) = 6$ или 40, то по [12] для линейного преобразования t, которое элемент порядка 10 из S_8 индуцирует в V, выполняется неравенство $1+t+t^2+\cdots+t^S \neq 0$, что по лемме 2.3 означает существование элемента порядка 20 в G, что невозможно.

Если же $dim(V) = 8$, то элемент x порядка 3 из G/N, соответствующий элементу S_8 из класса $3A$, действует на N без неподвижных точек и содержится в подгруппе G/N, изоморфной $L_2(4)$. По [13, теорема 8.2] N — элементарная абелева группа и поэтому в G нет элементов порядка 24, противоречие. □

Лемма 3.7. *Если $S \simeq J_2$, то $G \simeq Aut(J_2)$.*

Доказательство. По лемме 3.5 N — 2-группа и G/N изоморфна J_2 или $Aut(J_2)$.

Если $G/N \simeq J_2$, то $N \neq 1$. Можно считать, что N — элементарная абелева и неприводима как G/N-модуль. Поскольку в G нет элементов порядка 30, то таблица брауэровых 2-характеров G [12] показывает, что элемент порядка 7 из G/N действует на N без неподвижных точек и, следовательно, в G нет элементов порядка $14 \in \omega(Aut(J_2))$. Поэтому $G/N \simeq Aut(J_2)$.

Предположим, что $N \neq 1$. Снова можно считать, что N является абсолютно неприводимым $Aut(J_2)$-моделем. Поскольку в G нет элемента порядка 30, [12] показывает, что размерность N равна 12. В этом случае, аналогично доказательству леммы 3.6, легко показать, что некоторый прообраз в G элемента из класса $10A$ группы $Aut(J_2)$ имеет порядок 20, что неверно. □

Лемма 3.8. $S \notin \{L_2(7), U_3(3), A_7\}$.

Доказательство. Предположим противное. Поскольку $Aut(S)$ не содержит элементов порядка 15, N содержит элемент порядка $p \in \{3,5\}$. Если $p = 3$, то пусть H — холлова $\{3,7\}$-подгруппа в полном прообразе подгруппы порядка 21 из G/N. Так как граф $GK(H)$ несвязен и H не может быть группой Фробениуса, где A и C 3-группы, $|B| = 7$. По лемме 2.1 H содержит элемент порядка $9 \notin \omega(G)$, противоречие. Поэтому $p = 5$.

Пусть $S \simeq L_2(7)$. По теореме из [6] любой G — главный 5-фактор группы N является либо трехмерным $L_2(7)$-модулем, либо шестимерным модулем для $L_2(7)$ или $SL_2(7)$.

В любом случае некоторый элемент порядка 4 из G имеет в этом модуле неподвижную точку и поэтому G содержит элемент порядка $20 \notin \omega(G)$, противоречие.

Аналогично рассматриваются остальные два случая. □

Леммы 3.5-3.8 заканчивают доказательство теоремы 1.

Авторы благодарны В.Д. Мазурову за оказанную помощь.

References

[1] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, 1979. Zbl 0412.20002

[2] C.W. Curtis, I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, American Mathematical Soc., 1966.

[3] J.H. Conway, *Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*, Clarendon Press, 1985.

[4] M. Aschbacher, *Finite Groups Theory*, Cambridge, 1986. MR0895134

[5] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Chelsea Publishing Company, 1980. MR0569209

[6] A.S. Kondratiev, *Finite groups with a graph of prime numbers, like the group* $Aut(J_2)$, Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), **283**:1 (2013), 78—85. MR3476380

[7] V.D. Mazurov, *Characterizations of finite groups by sets of element orders*, Algebra and Logic, **36**:1 (1997), 23—32. MR1454690

[8] V.D. Mazurov, A. R. Moghaddamfar, *Recognizing by Spectrum for the Automorphism Groups of Sporadic Simple Groups*, Commun. Math. Stat., **3**:4 (2015), 491–496.

[9] J.S. Williams, *Prime Graph Components of Finite Groups*, Journal of Algebra, **69**:2 (1981), 487–513. MR0617092

[10] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Siberian Electronic Math. Reports., **6** (2009), 1–12. MR2586673

[11] C. Jansen, K. Lux, R. Parker, R. Wilson, *An atlas of Brauer characters*, Oxford:New York:Clarendon Press, 1995. MR1367961

[12] *ATLAS of Finite Group Representations — Version 3*, http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/

[13] G. Higmen, *Odd characterizations of finite simple groups, Lecture notes*, Univ. Michigan, 1868.

Archil Khazeshevich Zhurtov
Kabardino-Balkarian State University,
str. Chernyshevsky, 173,
360004, Nalchik, Russia
E-mail address: zhurtov_a@mail.ru

Mariyana Khusenovna Shermetova
Kabardino-Balkarian State University,
str. Chernyshevsky, 173,
360004, Nalchik, Russia
E-mail address: mariyana1992@mail.ru