S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1017–1029 (2017) УДК 512.761.2
DOI 10.17377/semi.2017.14.086 MSC 14L17

О СОВПАДЕНИИ СТАНДАРТНОЙ И КАНОНИЧЕСКОЙ ЦЕЛЫХ МОДЕЛЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ТОРА

М.В. ГРЕХОВ

Abstract. Algebraic tori occupy a special place among linear algebraic groups. An algebraic torus can be defined over an arbitrary field but if a ground field belongs to an arithmetic type one can additionally consider schemes over this field's ring of integers which are linked to the original tori and called their integral models. Néron model and Voskresenskiĭ model are most well-known among them. There exists a broad range of problems dealing with the construction of these models and the research of their properties. This paper is dedicated to the research of some important integral models of algebraic tori over number fields, namely, standard and canonical integral models. Finally, the coincidence of these two models for an arbitrary algebraic torus is proven.

Keywords: algebraic tori, integral models.

1. О целых моделях алгебраических торов

Алгебраические торы занимают особое место среди линейных алгебраических групп. Над алгебраически замкнутым полем алгебраические торы имеют весьма простую структуру и, скорее, представляют интерес как структурный элемент алгебраических групп. Однако при переходе к рассмотрению над алгебраически незамкнутым основным полем алгебраический тор становится нетривиальным объектом изучения. В этом случае алгебраический тор представляет собой связную диагонализируемую алгебраическую группу. Первые фундаментальные результаты в теории алгебраических торов были получены в 1970-х годах в работах В. Е. Воскресенского, впоследствии многократно дополнявшихся, в систематическом виде они изложены в монографии [1].

Grekhov, M.V., On the coincidence of standard and canonical integral models of an arbitrary algebraic torus over a number field.

Поступила 20 декабря 2016 г., опубликована 16 октября 2017 г.

Для алгебраических торов, определённых над полями арифметического типа, возникает дополнительная область исследования — арифметика алгебраических торов. Её задачи требуют построения схем над кольцом целых основного поля, называемых целыми моделями.

Определение 1. *Пусть T — схема, определённая над полем k. R-моделью (или R-формой) T называется определённая над некоторым кольцом $R \subset k$ схема X такая, что $X \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} k \cong T$. В частности, для случая, когда k — поле арифметического типа, целой моделью называется модель над $\mathcal{O}_k \subset k$, где $\mathcal{O}_k$ — кольцо целых поля k.*

Понятно, что такому определению удовлетворяют самые разнообразные схемы, и интерес представляют те из них, которые обладают полезными дополнительными свойствами. Статус классической среди целых моделей алгебраических торов получила модель Нерона. Исследование этой модели для алгебраических торов (до того она применялась не к алгебраическим торам, а к абелевым многообразиям) подробно описано в книге З. Боша и соавторов [4].

Трудности, возникающие при построении модели Нерона, послужили стимулом для исследования её связи с другими целыми моделями алгебраических торов. Для случая локального поля ситуация была достаточно хорошо изучена в работах В. Е. Воскресенского, Б. Э. Кунявского, Б. З. Мороза, С. Ю. Попова, К. Лиу, Д. Лоренцини, Чинг-Ли Чаи, Цзю-Канга Ю и многих других исследователей.

Над глобальным полем ситуация иная. Существуют две различных целых модели алгебраического тора, представляющие интерес с точки зрения связи с моделью Нерона: стандартная целая модель, предложенная и изученная в совместной работе В. Е. Воскресенского, Б. Э. Кунявского и Б. З. Мороза [7], и каноническая целая модель, впервые определённая в монографии В. Е. Воскресенского [1].

Стандартная и каноническая модели и их свойства ранее уже исследовались автором настоящей работы в статье [9]. В частности, было показано, каким образом они могут быть использованы для построения модели Нерона произвольного анизотропного алгебраического тора, определённого над полем алгебраических чисел. Однако вопрос о сравнении этих моделей, то есть о том, представляют ли они собой один и тот же объект для произвольного тора, оставался открытым. Целью настоящей работы является доказательство совпадения стандартной и канонической целых моделей для произвольного алгебраического тора, определённого над полем алгебраических чисел.

2. Основные сведения из теории алгебраических торов

Коротко напомним необходимые основные понятия, используемые при определении целых моделей алгебраических торов. Вначале условимся о дальнейших обозначениях. Пусть T — алгебраический тор, k и L — соответственно основное поле (произвольное) и поле разложения T, $G = \operatorname{Gal}(L/k)$ (здесь и далее будем рассматривать те случаи, когда L/k — расширение Галуа), $\hat{T}$ — G-модуль характеров тора T. Пусть $d = \operatorname{rk} \hat{T} = \dim T$, $[L : k] = |G| = n$, $L[\hat{T}]$ — групповое кольцо $\hat{T}$. Координатное кольцо тора T тогда будет иметь вид $k[T] = L[\hat{T}]^G$. Наконец, пусть $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ — какой-либо базис расширения L/k.

Известно (см. [1], [2], [3]), что существует функтор контравариантной эквивалентности ρ между категорией $\mathcal{T}$ алгебраических k-торов, разложимых над L, и категорией $\mathcal{M}$ конечно порождённых G-модулей, ставящий каждому тору T в соответствие его модуль характеров $\hat{T}$. Эта эквивалентность позволяет реализовать алгебраический тор в виде аффинного многообразия (более подробно см. в [2], [3]). Имеет место изоморфизм $L[\hat{T}] \cong L \otimes L[\hat{T}]^G \cong \bigoplus_{i=1}^n (L[\hat{T}]^G \omega_i)$. Пусть x_{ij}, $y_{ij} \in k[T]$ — координаты (координатные функции) при разложении базисных элементов модуля $\hat{T}$ из множества $\{\chi_i\}$, $i = \overline{1,d}$ и обратных им $\{\chi_i^{-1}\}$ по базису $\omega_1, ..., \omega_n$, которое имеет следующий вид:

$$\chi_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}\omega_j; \quad \chi_i^{-1} = \sum_{j=1}^n y_{ij}\omega_j, \quad i = \overline{1,d}. \tag{1}$$

Известно (см. [2]), что $L[\hat{T}]^G$ как k-алгебра порождена над k элементами x_{ij}, y_{ij}, $i = \overline{1,d}$, $j = \overline{1,n}$ (поэтому в дальнейшем для краткости будем писать $L[\hat{T}]^G = k[x_{ij}, y_{ij}]$, хотя образующие этой алгебры, вообще говоря, алгебраически зависимы) и её конструкция не зависит от выбора базисов $\hat{T}$ и L/k. Схема $T = \operatorname{Spec} L[\hat{T}]^G$ представляет собой аффинную реализацию тора T.

Как уже говорилось в пункте 1, при исследовании алгебраических торов над полями арифметического типа широко используется построение их целых моделей. Модель Нерона, подробно описанная в [4], является классической, так как всегда, по определению, обладает дополнительным свойством гладкости. Определяется она следующим образом.

Определение 2. *Пусть R — дедекиндова схема с кольцом рациональных функций K, X_K — гладкая приведённая K-схема конечного типа. Тогда моделью Нерона схемы X_K называется такая её R-модель X, которая является гладкой, приведённой, конечного типа и при этом удовлетворяет следующему свойству: для любой гладкой R-схемы Y любой K-морфизм $u_K : Y_K \to X_K$ (где $Y_K = Y \otimes_R K$) единственным образом продолжается до R-морфизма $u : Y \to X$.*

Очевидно, что под это определение подпадает случай, когда $X_K = T$ — алгебраический тор, $K = k$ — его основное поле, $R = \mathcal{O}_k$ — кольцо целых элементов k. Правда, определение не утверждает, в каких случаях схема X существует, но в [4] доказано, что она существует, когда K — произвольное локальное поле и когда K — глобальное поле характеристики 0, то есть во всех тех случаях, которые будут интересовать нас в данной работе. Отметим, что модель Нерона может не иметь конечного типа, в частности, известно (см. [4]), что она не имеет конечного типа для k-разложимых торов, но имеет конечный тип для k-анизотропных торов.

Серьёзным недостатком модели Нерона является то, что определение само по себе ещё не даёт алгоритма её построения. Общие сведения о построении модели Нерона читатель может найти в [4], [5].

В отличие от модели Нерона, модель Воскресенского (стандартная целая модель) определяется конструктивным способом. Кроме того, она всегда обладает рядом полезных дополнительных свойств, например, свойствами строгой плоскости и перестановочности с этальной заменой базиса, но, вообще говоря, не обладает свойством гладкости.

Изначально (см. [1], [2]) модель Воскресенского определяется для случая, когда поле k локальное. Её конструкция тесно связана с конструкцией аффинной реализации алгебраического тора. В случае локальных полей базис $\omega_1, ..., \omega_n$ расширения L/k можно выбрать целым. Если после этого рассмотреть не алгебру $k[x_{ij}, y_{ij}]$, а построенную аналогичным способом алгебру $\mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, то оказывается, что она имеет конструкцию $\mathcal{O}_k$-алгебры Хопфа, а также не зависит от выбора базиса $\hat{T}$ и целого базиса L/k. При этом спектр этой алгебры является целой моделью T, так как $k \otimes \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}] \cong k[x_{ij}, y_{ij}]$.

Определение 3. *В условиях обозначений, введённых ранее, аффинная групповая схема $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$ называется стандартной целой моделью (моделью Воскресенского) тора T.*

Таким образом, при фиксированных основном поле k и поле разложения L по группе рациональных характеров $\hat{T}$ L-разложимого алгебраического k-тора T мы определили $\mathcal{O}_k$-алгебру Хопфа $\mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, которую, следуя Воскресенскому, будем обозначать $A(\hat{T})$. В конкретных примерах в качестве локальных полей обычно рассматривают поля p-адических чисел или их конечные расширения.

Перейдём к случаю глобального основного поля. Мы сосредоточим своё внимание на случае, когда k и L — поля алгебраических чисел. Одна из целых моделей, которые можно считать обобщением модели Воскресенского (впервые была описана в [1]), определяется следующим образом.

Пусть в условиях тех же обозначений, что и ранее, k — поле алгебраических чисел, $\mathcal{O}_k$ и $\mathcal{O}_L$ — кольца целых элементов k и L соответственно. Для каждого простого идеала $\wp \subset \mathcal{O}_k$ пополнение поля k по $\wp$-адическому показателю будет давать локальное поле $k_\wp$. При этом в $\mathcal{O}_L$ можно взять такой простой идеал $\mathfrak{P}|\wp$, что пополнение L по показателю, задаваемому этим идеалом, будет давать локальное поле $L_\mathfrak{P}$, $k_\wp \subset L_\mathfrak{P}$ (известно (см. [6]), что тот же результат можно получить, взяв минимальное расширение $k_\wp$, содержащее L).

Далее, рассмотрим тор $T \otimes_k k_\wp$. Можно считать, что $\hat{T}$ является группой характеров и для тора T, и для $T_\wp = T \otimes_k k_\wp$. Тогда к тору $T_\wp$ с расширением $L_\mathfrak{P}/k_\wp$ и группой Галуа $G_\wp$ (так называемая группа разложения, подгруппа в G) можно применить конструкцию модели Воскресенского для локальных полей, получив алгебру Хопфа $A_\wp(\hat{T})$ (обозначим её $B_\wp$). Спектр этой алгебры Хопфа (обозначим его $X_\wp$) будет целой моделью Воскресенского тора $T \otimes_k k_\wp$. Из определения модели Воскресенского следует, что $B_\wp \subset L_\mathfrak{P}[\hat{T}]^{G_\wp} \cong k_\wp[T]$. Заметим, что кольцо инвариантов $Y = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L[\hat{T}]^G)$ является $\mathcal{O}_k$-формой T, так как $Y \otimes_{\mathcal{O}_k} k \cong T$. Причём для всех точек $\wp$, неразветвлённых в L, выполняется $X_\wp = Y_\wp$. Для всех простых идеалов $\wp \subset \mathcal{O}_k$ обозначим $C_\wp = B_\wp \cap k[T]$ и рассмотрим $C = \cap_\wp C_\wp$. Поясним строение этого объекта.

Как уже говорилось выше, $B_\wp = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{uv}^{(\wp)}, y_{uv}^{(\wp)}]$, где $x_{uv}^{(\wp)}, y_{uv}^{(\wp)}$ — координаты при разложении по базису $L_\mathfrak{P}/k_\wp$ (обозначим его $\omega_v^{(\wp)}$, $v = \overline{1, m}$, где $m = [L_\mathfrak{P} : k_\wp]$) базисных характеров модуля $\hat{T}$ и обратных им, а $k[T] \cong k[x_{ij}, y_{ij}]$, где x_{ij}, y_{ij} — координаты при разложении базисных характеров по базису $\{\omega_j\}$, $j = \overline{1, n}$ расширения L/k. В таком случае (см. [1]) C будет алгеброй Хопфа над $\mathcal{O}_k$. Из конструкции C также следует, что $\mathcal{O}_L[\hat{T}]^G \subset C$, поэтому $X = \operatorname{Spec} C$ является $\mathcal{O}_k$-формой (то есть целой моделью) T.

Определение 4. *Аффинная схема* $X = \mathrm{Spec}\ C$ *называется канонической целой моделью тора* T*, определённого над полем алгебраических чисел.*

Основным недостатком такого подхода является то, что определение C не даёт способа её построения. Этого недостатка не имеет ещё одна целая модель тора над полем алгебраических чисел, предложенная в работе [7]. Она определяется следующим образом.

Определение 5. *Стандартной целой моделью алгебраического тора* T*, определённого над полем алгебраических чисел* k*, называется* $\mathcal{O}_k$*-схема вида* $X^{'} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$*, где* x_{ij}*,* y_{ij} *— координаты при разложении базисных характеров модуля* $\hat{T}$ *и обратных им по базису* L/k*.*

Следует заметить, что изначально в работе [7] базовым было альтернативное, более сложное определение этой модели, так как на тот момент не было известно, всегда ли у расширения L/k в условиях данных обозначений существует целый базис. Однако позднее в работе [8] было доказано, что для любого расширения L/k полей алгебраических чисел существует некоторое конечное нормальное расширение F/L такое, что F будет иметь целый базис над k. В нашем случае F можно считать некоторым (не обязательно минимальным) полем разложения тора T и использовать его для построения рассматриваемой алгебры Хопфа. Это позволяет ограничиться приведённым выше определением стандартной целой модели. Из данного определения следует, что конструкция стандартной целой модели полностью аналогична конструкции модели Воскресенского из случая локального поля и она может быть построена аналогичным образом.

Теперь мы можем перейти к решению вопроса о совпадении стандартной и канонической целых моделей произвольного алгебраического тора над полем алгебраических чисел.

3. Совпадение канонической и стандартной моделей

Докажем, что стандартная и каноническая целые модели произвольного тора, определенного над полем алгебраических чисел, совпадают. Для этого вначале необходимо зафиксировать обозначения и доказать несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $S = R_{F/k}(G_m)$ — простейший квазиразложимый алгебраический тор, то есть тор, получаемый из простейшего F-разложимого тора $G_{m,F}$ путём применения конструкции ограничения основного поля с F до k (подробно эта конструкция описана, например, в [3]). Далее, пусть основное поле k является полем алгебраических чисел, а L — некоторое поле разложения, имеющее целый базис над k. Пусть расширение L/k является расширением Галуа, $G = \mathrm{Gal}(L/k)$, $[L : k] = n$, $F \subset L$, $[F : k] = m \leqslant n$. Если $F \neq L$, то расширение F/k, вообще говоря, может не являться нормальным. Пусть $k_\wp$ — пополнение поля k по некоторому $\wp$-адическому дискретному нормированию $\nu_\wp$, а $F_{\mathfrak{P}_i}$, $i = \overline{1, m_F}$ — все возможные пополнения поля F по продолжениям этого дискретного нормирования на F, соответственно $L_{\tilde{\mathfrak{P}}_j}$, $j = \overline{1, m_L}$ — все возможные пополнения поля L по продолжениям этого дискретного нормирования на L. Если $F \neq L$, то возможно, что $m_F < m_L$.

Пусть $\omega_1, ..., \omega_m$ — произвольный базис F/k, а $\omega_1, ..., \omega_n$ $(n \geq m)$ — базис L/k, до которого его можно дополнить (вообще говоря, также произвольный).

Обозначим $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)} = F_{\mathfrak{P}_1} \oplus ... \oplus F_{\mathfrak{P}_{m_F}}$ и $L_{\tilde{\mathfrak{P}}}^{(m_L)} = L_{\tilde{\mathfrak{P}}_1} \oplus ... \oplus L_{\tilde{\mathfrak{P}}_{m_L}}$. Тогда известно (см. [10]), что $\hat{\omega}_1, ..., \hat{\omega}_m$, где $\hat{\omega}_i = (\omega_i, ..., \omega_i)$ (содержит m_F компонентов), будет базисом $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ как векторного пространства над $k_\wp$, аналогично $\hat{\omega}_1, ..., \hat{\omega}_n$, где $\hat{\omega}_i = (\omega_i, ..., \omega_i)$ (содержит m_L компонентов) будет базисом $L_{\mathfrak{P}}^{(m_L)}$ как векторного пространства над $k_\wp$ (данные разложения следуют из изоморфизма $F \otimes_k k_\wp \cong \bigoplus F_{\mathfrak{P}_i}$ и аналогичного для L). Причём $\sum_{j=1}^{m_F} [F_{\mathfrak{P}_i} : k_\wp] = [F : k]$ и аналогично $\sum_{j=1}^{m_L} [L_{\tilde{\mathfrak{P}}_i} : k_\wp] = [L : k]$. Более того, известно, что так как расширение L/k нормальное, то $\forall i = \overline{1, m}$ $[L_{\tilde{\mathfrak{P}}_i} : k_\wp] = n/m_L$ и, более того, поля вида $L_{\tilde{\mathfrak{P}}_i}$ попарно $k_\wp$-изоморфны.

Лемма 1. *Пусть* $S_\wp = S \times \operatorname{Spec} k_\wp$, $S_{\mathfrak{P}_i} = R_{F_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp}(G_m)$, $S_{\mathfrak{P}} = S_{\mathfrak{P}_1} \times ... \times S_{\mathfrak{P}_{m_F}}$. *Тогда* $S_\wp \cong S_{\mathfrak{P}}$.

Доказательство. Для случая, когда $m_F = 1$, утверждение тривиально. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $m_F > 1$. Из конструкции сравниваемых торов $S_\wp$ и $S_{\mathfrak{P}}$ следует, что основное поле для них обоих — это $k_\wp$, то есть одно и то же. Далее, если рассмотреть нормальное замыкание минимального расширения поля $k_\wp$, содержащего поле L, то оно, очевидно, будет полем разложения тора $S_\wp$ (обозначим его $L_\wp$). С другой стороны, нормальное замыкание расширения поля $k_\wp$, содержащего все поля $L_{\mathfrak{P}_i}$ (которые все равны $L_{\mathfrak{P}_1}$), очевидно, будет полем разложения тора $S_{\mathfrak{P}}$ (обозначим его $L_{\mathfrak{P}}$). Но из такого задания следует, что оба эти расширения поля $k_\wp$ совпадают, поэтому $L_\wp = L_{\mathfrak{P}}$ (вышеприведённое рассуждение показывает, что минимальные поля разложения обоих торов совпадают, но отсюда очевидно, что и любое поле разложения тора $S_\wp$ является полем разложения тора $S_{\mathfrak{P}}$ и обратно, поэтому не требуется, чтобы рассматриваемое поле разложения $L_{\mathfrak{P}}$ было минимальным).

При совпадении основного поля и поля разложения для изоморфности алгебраических торов необходимо и достаточно (см. [1]), чтобы были изоморфны их модули характеров. Рассмотрим конструкцию модуля характеров тора $S_\wp$. Для этого сначала напомним, какова конструкция $\hat{S}$ (модуля характеров тора S) и как она меняется при расширении поля констант до $k_\wp$. Известно (см. [1]), что конструкция $\hat{S}$ как группы при этом не меняется, то есть все отличия связаны с действием на $\hat{S}$ групп Галуа соответствующих расширений полей.

Так как S — простейший квазиразложимый тор, известно (см. [1]), что базис $\hat{S}$ можно выбрать пермутационным, тогда все базисные характеры выражаются с помощью действия G через любой один из них, то есть, например, $\chi_j = \chi_1^{\delta_j}$, $\delta_j \in G$, где $j = \overline{1, d}$, $\hat{S} = \langle \chi_1, ..., \chi_d \rangle$, $d = \operatorname{rk} \hat{S}$, $\delta_1 = \varepsilon$, где ε — тождественный характер.

Обозначим минимальный многочлен какого-либо примитивного элемента α поля F над k через $p_\alpha(x)$. Так как расширение F/k сепарабельно, а L/k нормально и сепарабельно, то $p_\alpha(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j)$, где α_j — корни $p_\alpha(x)$, которые все различны, все лежат в L и в совокупности порождают L над k (но если F/k не является нормальным, то не все корни лежат в F; условимся, что $\alpha_1 = \alpha \in F$). Так как каждый элемент G переводит корень $p_\alpha(x)$ также в корень $p_\alpha(x)$, $|G| = n$ и $d = m \leqslant n$, можно установить соответствие между элементами G и базисными характерами из $\hat{S}$ следующим образом: зафиксируем один корень α_1 минимального многочлена $p_\alpha(x)$ и один базисный характер χ_1, тогда из выполняющегося для любого алгебраического тора изоморфизма

$L[\hat{S}] \cong L \otimes k[S] \cong \bigoplus_{i=1}^{n} k[S]\omega_i$, если рассмотреть в качестве $\{\omega_i\}$ степенной базис, состоящий из степеней α_1, получим разложение для базисного характера вида $\chi_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}\alpha_1^i$, $x_{i1} \in k[S]$. Тогда каждый базисный характер χ_j можно представить как результат действия на χ_1 элемента $\delta_{1j} \in G$, переводящего α_1 в α_j, при этом $\delta_{11} = \varepsilon$ (однако если $F \neq L$, то взаимно однозначного соответствия с элементами G, вообще говоря, не будет, так как на χ_1 могут одинаково действовать несколько элементов G). Так как с учётом других свойств простейшего квазиразложимого тора $d = [F : k] = m$, то $\forall j = \overline{1, d}$ $\mathcal{O}_G(\chi_j) = \{\chi_1, ..., \chi_d\}$, то есть орбита любого базисного характера состоит в точности из всех базисных характеров (в дальнейшем для краткости будем обозначать это множество $\mathcal{O}_G(\chi_1)$).

Из того, что $m_F > 1$, а значит, для любого $i = \overline{1, m_F}$ справедливо неравенство $[F_{\mathfrak{P}_i} : k_\wp] < [F : k]$, следует, что многочлен $p_\alpha(x)$ оказывается приводим в $k_\wp[x]$. Каждый из примитивных элементов F над k, являющихся корнями $p_\alpha(x)$, по заданию остаётся примитивным элементом и для некоторого расширения $F_{\mathfrak{P}_i}$ над $k_\wp$, но его минимальным многочленом оказывается некоторый многочлен $p_{\alpha_i}^{(\mathfrak{P})}(x) | p_\alpha(x)$. Тогда известно (см. [10]), что можно установить взаимно однозначное соответствие между простыми идеалами $\mathfrak{P}_i$ (которые, в свою очередь, находятся во взаимно однозначном соответствии с полями $F_{\mathfrak{P}_i}$) и неприводимыми множителями в разложении на неприводимые множители многочлена $p_\alpha(x)$ в $k_\wp[x]$ (причём каждый из этих множителей содержит хотя бы один примитивный элемент F над k). Если обозначить это разложение $p_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{m} p_{\alpha_{t_i}}^{(\mathfrak{P})}(x)$, то группа $G_{\mathfrak{P}} = \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/k_\wp)$ (одна и та же, так как нормальные расширения, в которые вкладываются $F_{\mathfrak{P}_i}$, все равны $L_{\mathfrak{P}}/k_\wp$) своим действием переводит друг в друга только базисные характеры, соответствующие корням одного и того же многочлена $p_{\alpha_{t_i}}^{(\mathfrak{P})}(x)$ (который представляет собой минимальный многочлен примитивного элемента поля $F_{\mathfrak{P}_i}$ над $k_\wp$). В силу ранее введённого биективного соответствия множество $\mathcal{O}_G(\chi_1)$ при этом принимает вид $\mathcal{O}_G(\chi_1) = \bigsqcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{G_{\mathfrak{P}}}(\chi_{t_i})$.

Таким образом, действие группы $G_{\mathfrak{P}}$ на $\hat{S}_\wp$ установлено. Это позволяет определить тип тора $S_\wp$. Так как $\mathrm{rk}\, \hat{S}_\wp = \mathrm{rk}\, \hat{S}$, а действие элементов $G_{\mathfrak{P}}$ на базисные характеры такое же, как у соответствующих элементов G, то $S_\wp$ остаётся квазиразложимым тором. Далее, так как установлено разбиение множества базисных характеров в дизъюнктное объединение орбит некоторых из них относительно действия $G_{\mathfrak{P}}$, то получаем $S_\wp \cong S_{\wp_1} \times ... \times S_{\wp_m}$, где $S_{\wp_i}$ — торы, соответствующие $\mathcal{O}_{G_{\mathfrak{P}}}(\chi_{t_i})$ (и имеющие поле разложения $L_{\mathfrak{P}}$). А так как действие $G_{\mathfrak{P}}$ внутри каждой из орбит переводит каждый базисный характер в каждый другой базисный, то торы $S_{\wp_i}$ являются простейшими квазиразложимыми и утверждение леммы доказано.

$\square$

Итак, мы имеем $k_\wp$-алгебру $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$, которая представляет собой прямую сумму локальных полей $F_{\mathfrak{P}_i}$. Каждое расширение $F_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp$ обладает целым базисом, базис алгебры $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ над полем $k_\wp$, полученный прямым произведением целых базисов компонентов, будем также называть целым. Отметим, что в алгебре $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ естественным образом выделяется целая подструктура — $\mathcal{O}_{k_\wp}$-алгебра

$\bigoplus_i \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{P}_i}}$, для которой целый базис алгебры $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ является целым базисом как для $\mathcal{O}_{k_\wp}$-модуля. Аналогично введём понятие целого базиса $L_{\mathfrak{P}}^{(m_L)}$ над $k_\wp$.

Как легко доказать, если $\{\omega_i\}$ — целый базис L/k, то и $\{\hat{\omega}_i\}$ — целый базис $L_{\mathfrak{P}}^{(m_L)}/k_\wp$. Справедливо и аналогичное утверждение, что если $\{\omega_i\}$ — целый базис F/k, то и $\{\hat{\omega}_i\}$ — целый базис $F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}/k_\wp$.

Перед формулировкой следующей леммы немного изменим конструкцию рассматриваемых торов. Обозначим через F^{δ_i} результат действия на F элемента $\delta_i \in G$, $i = \overline{1, n}$. Понятно, что для всех i справедливо $k \subset F^{\delta_i} \subset L$. Пусть $F = k(\alpha_1)$, минимальный многочлен над k элемента α_1 обозначим через $p_\alpha(x)$. Далее, пусть $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ — множество корней $p_\alpha(x)$.

Как уже говорилось при доказательстве леммы 1, существует взаимно однозначное соответствие между всеми различными полями $F_{\mathfrak{P}_i}$, каждое из которых получено пополнением поля F по простому идеалу $\mathfrak{P}_i$, лежащему над некоторым фиксированным простым идеалом $\wp \subset k$, и простыми множителями в разложении многочлена $p_\alpha(x)$ в $k_\wp[x]$. Возьмём в указанном разложении на простые множители по одному корню из каждого множителя и обозначим их α_{i_j}, $j = \overline{1, m_F}$, $m_F \leqslant m$ (в частности, $\alpha_{i_1} = \alpha_1$). Обозначим через δ_{1j} такой элемент G, который переводит корень α_1 в α_j (в частности, $\delta_{11} = \varepsilon$). Тогда все поля вида $F^{\delta_{1j}}$ будут различными и каждое из них будет содержать некоторый единственный простой идеал $\mathfrak{P}_{i_j}$ кольца $\mathcal{O}_F$, лежащий над $\wp$, причём в совокупности эти поля будут содержать все такие идеалы. Обозначим пополнение поля $F^{\delta_{1j}}$ по идеалу $\mathfrak{P}_{i_j}$ через $(F^{\delta_{1j}})_{\mathfrak{P}_{i_j}}$. Учитывая, что $F^{\delta_{1j}} \cong F$ и $k \subset F^{\delta_{1j}}$, а конструкция $\wp$-адического пополнения в этих полях одинакова, можно утверждать, что локальные поля $(F^{\delta_{1j}})_{\mathfrak{P}_{i_j}}$ и $F_{\mathfrak{P}_t}$ будут $k_\wp$-изоморфны для некоторого t. Таким образом, учитывая, что все такие изоморфные пары полей различны, $\bigoplus_{i_j} (F^{\delta_{1j}})_{\mathfrak{P}_{i_j}} \cong F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ (для краткости обозначим эту прямую сумму $(F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$). Это означает, что тор $\prod_{i_j} (R_{(F^{\delta_{1j}})_{\mathfrak{P}_{i_j}}/k_\wp}(G_m))$ по заданию изоморфен $S_{\mathfrak{P}}$. Поэтому мы можем отождествить его с тором $S_{\mathfrak{P}}$ и в дальнейшем будем обозначать так именно этот тор. В частности, утверждение леммы 1 для него также выполняется. Заметим, что для обеих конструкций поля L и $L_{\mathfrak{P}}$ и алгебра $L_{\mathfrak{P}}^{(m_L)}$, определённые ранее, одни и те же. Поскольку нумерация идеалов $\mathfrak{P}_{i_j}$ для доказательства несущественна, будем с точностью до перенумерации считать, что $i_j = j$ и для краткости будем писать $S_{\mathfrak{P}} = \prod_{t=1}^{m_F} (R_{(F^{\delta_t})_{\mathfrak{P}_t}/k_\wp}(G_m))$.

Обсудим теперь, как при таком переобозначении видоизменится ситуация с целым базисом. Если зафиксировать базис F над k вида $\{\omega_i\}$, $i = \overline{1, m}$, то для F^{δ_t} ему будет соответствовать базис $\{\omega_i^{\delta_t}\}$. Поэтому, очевидно, базис пространства $(F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)} = \bigoplus_{t=1}^{m_F} F_{\mathfrak{P}_t}^{\delta_t}$ над $k_\wp$, соответствующий $\{\hat{\omega}_i\}$, должен иметь вид $\{\hat{\omega}_i^{(1)} = (\omega_i, \omega_i^{\delta_2}, ..., \omega_i^{\delta_{m_F}})\}$ (так как $\delta_1 = \varepsilon$). Проверим, что такой объект действительно будет базисом нужного пространства. Для любого элемента $a \in F_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$ выполняется равенство $a = \sum_{i=1}^m c_i \hat{\omega}_i$, где $c_i \in k_\wp$, так как $\{\hat{\omega}_i\}$ является базисом этого векторного $k_\wp$-пространства. Учитывая, что $a = (a_1, ..., a_{m_F})$, $\hat{\omega}_i = (\omega_i, ..., \omega_i)$, это выражение равносильно системе равенств $a_j = \sum_{i=1}^m c_i \omega_i$, $j = \overline{1, m_F}$. Подействовав на каждое из этих равенств элементом G с соответствующим номером $\delta_j \in G$, получим равенство вида $a_j^{\delta_j} = \sum_{i=1}^m c_i \omega_i^{\delta_j}$. По построению элемент $a_j^{\delta_j}$ лежит в поле $F_{\mathfrak{P}_j}^{\delta_j}$, следовательно, элемент $(a_1, a_2^{\delta_2}, ..., a_m^{\delta_m})$ лежит в пространстве $(F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$, причём в силу произвольности a_i он является также произвольным элементом этого пространства, следовательно, в силу биективности построенного отображения любой элемент данного пространства раскладывается по системе образующих $\{\omega_j^{\delta_j}\}$. Это разложение однозначно, так как если бы элемент $(a_1, a_2^{\delta_2}, ..., a_m^{\delta_m})$ имел два различных разложения, записывающиеся системами равенств вида $a_j^{\delta_j} = \sum_{i=1}^m c_i\omega_i^{\delta_j}$ и $a_j^{\delta_j} = \sum_{i=1}^m d_i\omega_i^{\delta_j}$, то действие на соответствующие равенства элементами вида δ_j^{-1} позволило бы получить два различных разложения элемента a по базису $\{\hat{\omega}_i\}$, что невозможно. Итак, $\{\hat{\omega}_i^{(1)}\}$ является базисом $(F^\delta)_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$. Тот факт, что если базис $\{\omega_i\}$ целый, то и $\{\hat{\omega}_i^{(1)}\}$ целый, также легко доказать.

Лемма 2. *Пусть, помимо ранее введённых обозначений, X_T — стандартная, а X_T' — каноническая целая модель алгебраического тора T. Тогда слои над полем $k_\wp$ у X_T и X_T' совпадают.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда тор T имеет специальный вид, а именно $T = S = R_{F/k}(G_m)$ — простейший квазиразложимый тор. Выясним, какова в этом случае структура указанных слоёв целых моделей. Стандартная целая модель тора S представляет собой схему вида $X_S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, где $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, а $x_{ij}, y_{ij} \in k[S]$ — коэффициенты при разложении базисных характеров $\chi_1, ..., \chi_n$ модуля $\hat{S}$ и обратных им по системе образующих $\{\omega_i\}$, являющейся базисом L над k. Как мы упоминали ранее, поле разложения L можно выбрать так, чтобы оно имело целый базис над k, (при этом, возможно, оно не будет минимальным, но минимальности мы и не требуем), с этого момента условимся, что базис $\{\omega_i\}$ целый. Учитывая, что указанные коэффициенты при разложении $\chi_2, ..., \chi_n$ выражаются с помощью действия группы Галуа через соответствующие коэффициенты для χ_1, можно считать, что $X_S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k[x_{1j}, y_{1j}]$. Слой этой схемы над $k_\wp$, очевидно, имеет вид $X_{S_\wp} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k[x_{1j}, y_{1j}] \times \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp} = \mathrm{Spec}\ (\mathcal{O}_k[x_{1j}, y_{1j}] \otimes \mathcal{O}_{k_\wp}) = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{1j}, y_{1j}]$. Следует также заметить, что поскольку тор S простейший квазиразложимый, то все его характеры, в частности, χ_1 и χ_1^{-1}, могут быть разложены по базису F/k. Это означает, что мы можем обозначить $\omega_1, ..., \omega_m$ какой-либо целый базис F/k (пока условимся, что мы рассматриваем случай, когда F обладает целым базисом над k) и взять в качестве образующих коэффициенты при разложении векторов χ_1 и χ_1^{-1} по этому базису. Тогда $X_{S_\wp} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{1j}, y_{1j}]$, $j = \overline{1,m}$.

Слой канонической целой модели тора S представляет собой стандартную модель в смысле определения над локальным полем тора $S_\wp = S \times_{\mathrm{Spec}\ k} \mathrm{Spec}\ k_\wp$. Так как по лемме 1 имеем $S_\wp \cong S_{\mathfrak{P}}$, рассмотрим стандартную целую модель тора $S_{\mathfrak{P}}$. Так как $S_{\mathfrak{P}} = S_{\mathfrak{P}_1} \times ... \times S_{\mathfrak{P}_m}$, то $k_\wp[S_{\mathfrak{P}}] = k_\wp[S_{\mathfrak{P}_1}] \otimes ... \otimes k[S_{\mathfrak{P}_m}]$. Так как каждый из торов $S_{\mathfrak{P}_i}$ может быть аффинно реализован как $\mathrm{Spec}\ k_\wp[S_{\mathfrak{P}_i}]$, то можно утверждать, что $S_{\mathfrak{P}} = \mathrm{Spec}\ (k_\wp[S_{\mathfrak{P}_1}] \otimes ... \otimes k[S_{\mathfrak{P}_m}])$. Как уже говорилось при доказательстве леммы 1, для каждого из простейших квазиразложимых торов $S_{\mathfrak{P}_i}$ в его групповом кольце есть один из базисных характеров группы $\hat{S}$ (с точностью до обозначения можем считать, что это χ_i), через который выражаются с помощью действия группы Галуа все базисные характеры группы $\hat{S}_{\mathfrak{P}_i}$. Соответственно, если $\eta_1, ..., \eta_s$ — целый базис $L_{\mathfrak{P}}/k_{\wp}$ (здесь $s = n/m_L$), а $x_{i1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{is}^{(\mathfrak{P})}$ и $y_{i1}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{is}^{(\mathfrak{P})}$ — разложение по этому базису соответственно χ_i и χ_i^{-1}, то слой канонической модели $X_S^{'}$ тора S над полем $k_{\wp}$ имеет вид $X_{S_{\wp}}^{'} = \mathrm{Spec}\ (\otimes_{i=1}^{m_L} \mathcal{O}_{k_{\wp}}[x_{i1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{is}^{(\mathfrak{P})}, y_{i1}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{is}^{(\mathfrak{P})}]) = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_{\wp}}[x_{11}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{1s}^{(\mathfrak{P})}, y_{11}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{1s}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{m_L 1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{m_L s}^{(\mathfrak{P})}, y_{m_L 1}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{m_L s}^{(\mathfrak{P})}]$. Причём, как и в случае с тором S, для каждого из торов $S_{\mathfrak{P}_i} = R_{(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_{\wp}}(G_m)$ характеры из $\hat{S}_{\mathfrak{P}_i}$ могут быть разложены по целому базису $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_{\wp}$ (так как мы условились, что для L/k и F/k целые базисы существуют, они существуют и для $L_{\mathfrak{P}}/k_{\wp}$ и $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_{\wp}$). Таким образом, через коэффициенты при разложении по целым базисам расширений $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_{\wp}$ характеров $\chi_1, ..., \chi_{m_F}$ могут быть выражены коэффициенты при разложении остальных базисных характеров с помощью действия группы Галуа $G_{\mathfrak{P}}$. Поэтому условимся, что $\eta_1^{(i)}, ..., \eta_{t_i}^{(i)}$ — целые базисы расширений $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_{\wp}$, здесь $t_i = [(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i} : k_{\wp}] \leqslant [L_{\mathfrak{P}} : k_{\wp}])$. Тогда $X_{S_{\wp}}^{'} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_{\wp}}[x_{11}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{1t_1}^{(\mathfrak{P})}, y_{11}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{1t_1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{m_F 1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{m_F t_{m_F}}^{(\mathfrak{P})}, y_{m_F 1}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{m_F t_{m_F}}^{(\mathfrak{P})}]$.

Теперь, чтобы доказать утверждение леммы, достаточно доказать, что образующие, порождающие над $\mathcal{O}_{k_{\wp}}$ каждую из сравниваемых алгебр Хопфа (спектрами которых являются $X_{S_{\wp}}$ и $X_{S_{\wp}}^{'}$) выражаются через образующие другой. Докажем это. Групповое кольцо тора $S_{\mathfrak{P}}$ согласно известному изоморфизму имеет вид $L_{\mathfrak{P}}[\hat{S}_{\mathfrak{P}}] = L_{\mathfrak{P}} \otimes k_{\wp}[S_{\mathfrak{P}}]$. С учётом сказанного выше о характерах χ_i в нём лежит элемент вида $\chi = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_{m_L})$. С одной стороны, каждый из характеров χ_i, как уже говорилось выше, имеет разложение по базису $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_{\wp}$ вида $\chi_i = \sum_{j=1}^{t_i} x_{ij}^{(\mathfrak{P})}\eta_j^{(i)}$. В совокупности, как легко проверить, это покомпонентное разложение можно рассматривать как разложение характера χ по базису пространства $(F^{\delta})_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}/k_{\wp}$, который имеет вид $\{\hat{\eta}_{ij}^{(\mathfrak{P})} = (0, ..., 0, \eta_j^{(i)}, 0, ..., 0)\}$, то есть на i-м месте стоит j-й элемент базиса $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_{\wp}$, а на остальных нули. С другой стороны, все χ_i имеют разложение по базису F^{δ_i}/k, который может рассматриваться как система образующих для $(F^{\delta_i})_{\mathfrak{P}_i}/k_{\wp}$ (хотя, вообще говоря, эта система может быть линейно зависимой). Причём так как $\chi_1 = \sum_{j=1}^{m} x_{1j}\omega_j$, то $\chi_i = \chi_1^{\delta_i} = \sum_{j=1}^{m} x_{1j}(\omega_j)^{\delta_i}$, то есть коэффициенты при разложении каждого из χ_i по соответствующей системе образующих одни и те же. Покомпонентное разложение снова можно рассматривать в совокупности как разложение характера χ по системе образующих пространства $(F^{\delta})_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}/k_{\wp}$, причём это оказывается система $\hat{\omega}_j^{(1)}$, которая, как было показано в рассуждении перед началом леммы, является базисом данного пространства.

Итак, приравняв два имеющихся разложения характера χ, получаем равенство вида $\sum_{i=1}^{m_F}\sum_{j=1}^{t_i} \hat{x}_{ij}^{(\mathfrak{P})}\hat{\eta}_{ij}^{(\mathfrak{P})} = \sum_{v=1}^{m} \hat{x}_v\hat{\omega}_v^{(1)}$. Здесь $\hat{x}_{ij}^{(\mathfrak{P})} = (0, ..., 0, x_{ij}^{(\mathfrak{P})}, 0, ..., 0) \in k_{\wp}[S_{\mathfrak{P}}]$, $\hat{\eta}_{ij}^{(\mathfrak{P})} = (0, ..., 0, \eta_j^{(i)}, 0, ..., 0) \in (F^{\delta})_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$, $\hat{x}_v = (x_v, ..., x_v) \in k_{\wp}[S_{\mathfrak{P}}]$, $\hat{\omega}_v^{(1)} = (\omega_v, \omega_v^{\delta_2}, ..., \omega_v^{\delta_{m_F}}) \in (F^{\delta})_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}$.

Системы $\{\hat{\eta}_{ij}^{(\mathfrak{P})}\}$ и $\{\hat{\omega}_v^{(1)}\}$ обе являются базисами $(F^{\delta})_{\mathfrak{P}}^{(m_F)}/k_{\wp}$, поэтому все элементы каждой из них могут быть выражены через элементы другой в виде линейной комбинации, причём невырожденно и единственным образом. Выразив одну из них через другую (что корректно в силу единственности), получим уравнение с коэффициентами из алгебры $k_{\wp}^{m_F} = \bigoplus_{i=1}^{m_F} k_{\wp}$ относительно переменных $\hat{x}_{ij}^{(\mathfrak{P})}$, $\hat{x}_v$. Количество переменных $\hat{x}_{ij}^{(\mathfrak{P})}$ равно $\sum_{i=1}^{m_F} t_i = m$, то есть одинаково с количеством переменных $\hat{x}_v$. Данное равенство можно заменить системой равенств относительно переменных $x_{ij}^{(\mathfrak{P})}$, x_v, получаемых путём покомпонентной записи первоначального равенства, причём так как переменные $x_{ij}^{(\mathfrak{P})}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $\hat{x}_{ij}^{(\mathfrak{P})}$, а $\hat{x}_v$ с x_v, то количество переменных из множеств $x_{ij}^{(\mathfrak{P})}$ и x_v также одинаково. Принимая переменные одного из этих множеств за параметры, эквивалентными преобразованиями полученной системы можно получить линейное выражение через них переменных другого из этих множеств. Как уже говорилось выше, элементы x_v есть образующие алгебры Хопфа, спектром которой является схема $X_{S_{\wp}}$, аналогично $x_{ij}^{(\mathfrak{P})}$ — образующие алгебры Хопфа, соответствующей $X'_{S_{\wp}}$. Таким образом, получено выражение образующих одной из этих алгебр Хопфа через образующие другой и обратно. Полностью аналогично получается выражение друг через друга образующих y_v и $y_{ij}^{(\mathfrak{P})}$. Учитывая, что полученное выражение невырожденное и в силу рассуждения перед формулировкой леммы коэффициенты этого выражения целые, всё проведённое доказательство корректно, то есть построены совпадающие аффинные реализации $X_{S_{\wp}} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_{\wp}}[x_{1j}, y_{1j}]$, $j = \overline{1,m}$ и $X'_{S_{\wp}} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{k_{\wp}}[x_{11}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{1t_1}^{(\mathfrak{P})}, y_{11}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{1t_1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{m_F1}^{(\mathfrak{P})}, ..., x_{m_Ft_{m_F}}^{(\mathfrak{P})}, y_{m_F1}^{(\mathfrak{P})}, ..., y_{m_Ft_{m_F}}^{(\mathfrak{P})}]$ слоёв над полем $k_{\wp}$ соответственно стандартной и канонической целых моделей тора S, следовательно, указанные слои изоморфны и для случая простейшего квазиразложимого тора утверждение леммы доказано.

Пусть теперь тор T квазиразложимый, но не простейший. Тогда по определению (см. [3]) этот тор может быть представлен в виде $T = S_1 \times ... \times S_l$, где все S_i, $i = \overline{1,l}$ — простейшие квазиразложимые торы. Рассмотрим алгебры Хопфа $A(\hat{T})$ и $A'(\hat{T})$, спектрами которой являются соответственно стандартная и каноническая целые модели T. Из двойственности аффинной схемы и соответствующей алгебры Хопфа следует, что $A(\hat{T}) = A(\hat{S}_1) \otimes ... \otimes A(\hat{S}_l)$; аналогично $A'(\hat{T}) = A'(\hat{S}_1) \otimes ... \otimes A'(\hat{S}_l)$, что было доказано в статье [9]. Так как по предыдущему случаю известно, что $A(\hat{S}_i) = A'(\hat{S}_i)$, $i = \overline{1,l}$, то получаем $A(\hat{T}) = A'(\hat{T})$, следовательно, $X_{T_{\wp}} = X'_{T_{\wp}}$ и утверждение для этого случая также доказано.

Наконец, рассмотрим оставшийся случай, когда тор T произвольный. Тогда известно (см. [2]), что существует эпиморфизм (его также называют накрытием) $\beta : \hat{S} \to \hat{T}$, где S — некоторый квазиразложимый тор. По доказанному для предыдущих случаев получаем, что совпадают слои над полем $k_{\wp}$ стандартной и канонической моделей X_S и X'_S тора S, то есть $X_{S_{\wp}} = X'_{S_{\wp}}$.

Слой $X'_{S_{\wp}}$ над полем $k_{\wp}$ канонической целой модели X_S по определению представляет собой модель Воскресенского, или стандартную целую модель в смысле определения над локальным полем, тора $S_{\wp} = S \otimes_k k_{\wp}$, а слой над полем $k_{\wp}$ схемы X_T — аналогичную модель тора $T_{\wp} = T \otimes_k k_{\wp}$. Для алгебр Хопфа, спектрами которых являются стандартные целые модели над локальным полем, так как задан эпиморфизм $\beta : \hat{S} \to \hat{T}$, выполняется (см. [2]) свойство замкнутых вложений: $A'_{T_{\wp}} = A'_{S_{\wp}}/I'$, где $I' = A'_{S_{\wp}} \cap \mathrm{Ker}\ \beta_k$, $\beta_k : k[S] \to k[T]$ —

морфизм координатных колец, индуцированный β (здесь и далее для краткости будем обозначать $A'_{T_\wp} = A'(\hat{T}_\wp)$, $A_{T_\wp} = A(\hat{T}_\wp)$ и т.д.).

С другой стороны, для слоёв стандартных целых моделей $X_{S_\wp}$ и $X_{T_\wp}$ свойство замкнутых вложений также выполняется, так как доказано в статье [9]. Поэтому $A_{T_\wp} = A_{S_\wp}/I$, где $I = (A_{S_\wp} \cap \mathrm{Ker}\ \beta_k)$. Но $A_{S_\wp} = A'_{S_\wp}$, так как результат для квазиразложимых торов доказан, тогда $I = I'$, отсюда по заданию $A_{T_\wp} = A'_{T_\wp}$, а значит, и $X_{T_\wp} = X'_{T_\wp}$.

Вернёмся к случаю простейшего квазиразложимого тора. Если для F не существует целого базиса над k, то, как уже упоминалось ранее, существует такое конечное нормальное расширение F (обозначим его $\tilde{F}$), которое имеет целый базис над k. Тогда тор $R_{F/k}(G_m)$ можно вложить в тор $R_{\tilde{F}/k}(G_m)$, выполнение утверждения леммы следует из приведённого выше рассуждения для произвольного тора (вложение торов определяет накрытие для двойственных им объектов — их модулей характеров). Таким образом, утверждение леммы доказано для всех возможных случаев.

$\square$

Теперь мы можем доказать теорему, дающую ответ на вопрос о соотношении стандартной и канонической целых моделей алгебраического тора над полем алгебраических чисел.

Теорема 1. *В условиях ранее введённых обозначений $X_T = X'_T$.*

Доказательство. Докажем эквивалентное утверждение, что совпадают алгебры Хопфа $A(\hat{T})$ и $A'(\hat{T})$, спектрами которых являются соответственно X_T и X'_T. По лемме 2 для каждого простого идеала $\wp \lhd \mathcal{O}_k$ у сравниваемых алгебр Хопфа совпадают слои над $k_\wp$, то есть $A(\hat{T}_\wp) = A'(\hat{T}_\wp)$.

Известно, что при выполнении этого условия для доказательства равенства алгебр Хопфа достаточно установить вложение одной из них в другую. Покажем, что такое вложение существует.

По определению $A'(\hat{T}) = \bigcap_\wp (B_\wp \cap k[T])$, где $B_\wp = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(1)}]$, а $x_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(1)}$ — координаты при разложении соответственно базисных характеров χ_i группы $\hat{T}$ и обратных им χ_i^{-1} по целому базису $\omega_1^{(1)}, ..., \omega_m^{(1)}$ расширения полей $L_\mathfrak{P}/k_\wp$. Также по определению $A(\hat{T}) = \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, где x_{ij}, y_{ij} — координаты при разложении соответственно χ_i и χ_i^{-1} по целому базису $\omega_1, ..., \omega_n$ расширения L/k, который для $L_\mathfrak{P}/k_\wp$ является системой образующих (но, вообще говоря, может не быть базисом, если $m < n$). Как легко проверить, отсюда $A(\hat{T}) = \bigcap_\wp (B'_\wp \cap k[T])$, где $B'_\wp = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}]$.

Сравним алгебры $B_\wp = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(1)}]$ и $B'_\wp = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}]$. Образующие алгебры $B'_\wp$ выражаются через образующие алгебры $B_\wp$ следующим образом. Если приравнять разложения одного и того же характера χ_i по базисам L/k и $L_\mathfrak{P}/k_\wp$, в полученном равенстве вида $\sum_{j=1}^m x_{ij}^{(1)} \omega_j^{(1)} = \sum_{t=1}^n x_{ij} \omega_t$ можно элементы $\omega_t \in L_\mathfrak{P}$ линейно выразить через элементы системы $\{\omega_j^{(1)}\}$, причём полученное выражение будет однозначным и определённым над $\mathcal{O}_{k_\wp}$, так как эта система — целый базис расширения полей $L_\mathfrak{P}/k_\wp$. Подставив в равенства полученное выражение, а затем заменив каждое равенство с коэффициентами из L системой равенств с коэффициентами из k, соответствующих компонентам

$\omega_j^{(1)}$ (что корректно в силу однозначности разложения), получим выражение образующих x_{it} через образующие $x_{ij}^{(1)}$. Полностью аналогичным образом можно получить выражение образующих y_{it} через образующие $y_{ij}^{(1)}$. Это означает, что $\mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}] \subset \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(1)}]$, то есть $B_\wp^{'} \subset B_\wp$. Отсюда по заданию и в силу свойств операции пересечения $A^{'}(\hat{T}) \subset A(\hat{T})$ и искомое вложение установлено, следовательно, $A(\hat{T}) = A^{'}(\hat{T})$, то есть утверждение теоремы доказано.

$\square$

Таким образом, стандартная и каноническая целые модели совпадают не только для частных случаев, но и для произвольного тора, определённого над полем алгебраических чисел, что позволяет при необходимости в дальнейшем при рассмотрении одной из них пользоваться известными свойствами другой. В частности, свойство слоёв над локальными полями $X_\wp$ стандартной целой модели X, необходимое для использования этих слоёв в качестве начального шага при построении модели Нерона над локальным полем (предложение 4 из статьи [9]), которое ранее пришлось доказывать отдельно, теперь сразу следует из доказанной теоремы, так как выполняется (см. [1]) для слоёв канонической целой модели.

References

[1] V. E. Voskresenskiĭ, *Birational Geometry of Linear Algebraic Groups* [in Russian], Moscow: MCCME, 2009.

[2] S. Yu. Popov, *Standard Integral Models of Algebraic Tori*, Preprintreihe des SFB 478 — Geometrische Strukturen in der Mathematik. 2003.

[3] V. P. Platonov and A. S. Rapinchuk, *Algebraic Groups and Number Theory*, Boston et al.: Academic Press, 1994. MR1278263

[4] S. Bosch, W. Lütkebohmert and M. Raynaud, *Néron Models*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990. MR1045822

[5] Ching-Li Ch. and Jiu-Kang Yu., *Congruences of Néron models for tori and the Artin conductor*, National Center for Theoretical Science, National Tsing-Hua University, Hsinchu, Taiwan, 1999.

[6] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, Eds., *Algebraic Number Theory.* London — New York: Academic Press, 1967. Zbl 0153.07403

[7] V. E. Voskresenskiĭ, B. É. Kunyavskiĭ and B. Z. Moroz, *On Integral Models of Algebraic Tori*, St. Petersburg Mathematical Journal, **14**:1 (2003), 35–52. Zbl 1060.20042

[8] M. V. Bondarko, *Ideals in an extension of a number field as modules over the ring of integers in a ground field*, in: Proceedings of the Session in analytic number theory and Diophantine equations (ed. by D.R. Heath-Brown and B.Z. Moroz), Bonner Math. Schriften, 360 (2003). MR2024043

[9] M. V. Grekhov, *Integral Models of Algebraic Tori Over Fields of Algebraic Numbers*, Journal of Mathematical Sciences, **219**:3 (2016), 413–426. Zbl 06676853

[10] Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number Theory* [in Russian]. Moscow: Nauka, 1985. MR0816135

Mikhail Vladimirovich Grekhov
Samara National Research University,
Department of Algebra and Geometry
Ac. Pavlova st., 1,
443068, Samara, Russia
E-mail address: m.grekhov@yandex.ru