S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 14, стр. 1050–1063 (2017)* УДК 517.95
DOI 10.17377/semi.2017.14.089 MSC 35Q53, 37K10, 12E15

# О ТРОЙКАХ ПОЧТИ КОММУТИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С.П. ЦАРЕВ, В.А. СТЕПАНЕНКО

Abstract. We investigate algebraic properties of weakly commutative triples, appearing in the theory of integrable nonlinear partial differential equations. Algebraic technique of skew fields of formal pseudodifferential operators as well as skew Ore fields of fractions are applied to this problem, relating weakly commutative triples to commuting elements of skew Ore fields of formal fractions of ordinary differential operators. A version of Burchnall–Chaundy theorem for weakly commutative triples is proved by algebraic means avoiding analytical complications typical for its proofs known in the theory of integrable equations.

**Keywords:** integrable systems, skew fields, formal pseudodifferential operators, Ore extensions.

## 1. Введение

В теории интегрируемых нелинейных уравнений с тремя независимыми переменными часто использовалась алгеброгеометрическая теория, аналогичная теории коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов (см., например, [2, 3]): рассматривались два оператора $L_1$, $L_2$ и оператор Шредингера $H = -\partial_x^2 - \partial_y^2 + u(x,y)$ в кольце дифференциальных операторов $F[\partial_x, \partial_y]$ с переменными коэффициентами, такие, что

$$(1) \qquad [L_1, L_2] = P_0 \cdot H, \quad [L_1, H] = P_1 \cdot H, \quad [L_2, H] = P_2 \cdot H$$

Tsarev, S.P., Stepanenko, V.A., On weakly commutative triples of partial differential operators.



Работа поддержана грантом РНФ (проект 14-11-00441).

*Поступила 9 октября 2017 г., опубликована 19 октября 2017 г.*

для некоторых $P_0, P_1, P_2 \in F[\partial_x, \partial_y]$. Подобные наборы операторов мы в дальнейшем будем называть тройками почти коммутирующих операторов (коммутирующих $\mod H$) или, более точно, тройками $H$-коммутирующих операторов. При этом для простоты мы будем работать с гиперболической версией тождеств (1), в которой соответственно полагаем $H = -\partial_x\partial_y + u$. Подобные тройки обладают многими замечательными свойствами, из которых отметим аналог теоремы Берчнала-Чаунди [1, 3]:

**Теорема 1.** *Операторы $L_1$ и $L_2$, удовлетворяющие уравнениям (1), связаны полиномиальным соотношением $Q(L_1, L_2) = 0$ с постоянными коэффициентами на пространстве решений $H = 0$, другими словами, $Q(L_1, L_2) = S \cdot H$, $S \in F[\partial_x, \partial_y]$.*

Кроме богатой аналитической и алгеброгеометрической составляющей, данная теория имеет важный чисто алгебраический аспект, которому и посвящена данная работа. Именно, мы изучим формальные алгебраические свойства троек (1) и докажем алгебраические аналоги аналитических результатов [2, 3], не прибегая к многим аналитическим предположениям (неявно содержащимся, например, в приведенной выше теореме). В частности, мы докажем теорему 1 чисто алгебраическими средствами. Кроме того, мы приводим другие простые алгебраические свойства почти коммутирующих троек. Обобщая технику [6], мы покажем коммутативность по модулю $H$ всех операторов $L_2$, почти коммутирующих с заданными $H$ и $L_1$, и наличие аналитического (вообще говоря, неполиномиального) соотношения между коммутирующими формальными псевдодифференциальными обыкновенными операторами из тела Оре, тем самым частично решив одну из проблем, выдвинутых в [8].

В следующем разделе мы приводим необходимые сведения из алгебраической теории формальных псевдодифференциальных операторов и даем обзор необходимых нам конструкций и результатов.

В разделе 3 мы описываем простейшие свойства почти коммутативных троек и приводим полезные примеры семейств операторов, почти коммутирующих с $H$.

Доказательству основных теорем данной работы посвящен раздел 4.

В Заключении мы обсудим имеющиеся нерешенные алгебраические проблемы теории коммутирующих псевдодифференциальных операторов.

## 2. Тело формальных псевдодифференциальных операторов и тело Оре формальных отношений дифференциальных операторов

В дальнейшем мы часто будем прибегать к операции формального обращения как обыкновенных дифференциальных операторов, так и дифференциальных операторов в частных производных. Традиционное в теории интегрируемых нелинейных уравнений тело псевдодифференциальных операторов одной переменной определяется в нужном нам контексте как тело формальных рядов вида

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} p_{n-i} X^{n-i} = p_n X^n + p_{n-1} X^{n-1} + p_{n-2} X^{n-2} + \dots \tag{2}$$

где $p_k$ — гладкие или аналитические функции от двух переменных $x$, $y$. Здесь и далее приняты обозначения $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$. Однако не всегда разумно работать в терминах подобных псевдодифференциальных операторов в виде бесконечных рядов. Часто более подходит очень простое и конструктивное определение “тела частных Оре” — известная в некоммутативной алгебре конструкция, аналогичная конструкции поля частных области целостности в коммутативной алгебре (см. [5, 7, 8]). Коротко, конструкция тела Оре состоит в следующем: рассматриваются формальные элементы вида $L^{-1} \cdot M$ или $B \cdot A^{-1}$ (каждый из них можно переписать в виде другого) где $A$, $B$, $L$, $M$ — обычные дифференциальные операторы (как обыкновенные, так и с частными производными); при этом для определения операций сложения таких формальных отношений необходимо приводить выражения к общему знаменателю, находя общие кратные (не обязательно наименьшие) знаменателей слагаемых. Краткое изложение и необходимые условия для корректности конструкции Оре см. в [4]. Обозначим через $F(\partial_x) \equiv F(X)$ результат применения этой конструкции к кольцу $F[\partial_x] \equiv F[X]$ обыкновенных дифференциальных операторов с коэффициентами из некоторого пространства функций $F$, по аналогии с построением поля рациональных функций $\mathbb{Q}(x)$ из кольца многочленов $\mathbb{Q}[x]$. В последующих разделах мы всегда будем использовать в качестве поля $F$ коэффициентов операторов поле (локально) аналитических функций двух переменных $\mathcal{F}_2 = \{f(x,y)\}$.

Аналогично, результат применения конструкции Оре к кольцу дифференциальных операторов $\mathcal{F}_2[\partial_y, \partial_x]$ с частными производными по $x, y$ обозначается $\mathcal{F}_2(\partial_y, \partial_x)$.

Ниже мы часто будем использовать кольцо $\mathcal{F}_2(\partial_x)[\partial_y] \equiv \mathcal{F}_2(X)[Y]$ формальных обыкновенных дифференциальных операторов по $y$ над телом Оре $\mathcal{F}_2(\partial_x)$. Все алгебраические свойства кольца обыкновенных дифференциальных операторов сохраняются (фактически, как было замечено уже в работах Оре, возможно строить кольца дифференциальных операторов и тела их частных над некоммутативными дифференциальными телами).

Тело формальных рядов (2) будет далее обозначаться через $\mathcal{F}_2((\partial_x)) \equiv \mathcal{F}_2((X))$. Приведем для справки явное выражение умножения в этом теле (композиции формальных операторов): для $L_1$ вида (2) и

$$L_2 = \sum_{i=0}^{\infty} q_{m-i} X^{m-i} = q_m X^m + q_{m-1} X^{m-1} + q_{m-2} X^{m-2} + \dots,$$

имеем

$$L_1 \cdot L_2 = p_n q_m X^{n+m} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{k} p_{n-j} \left( \sum_{i=0}^{k-j} \binom{n-j}{k-j-i} q_{m-i}^{(k-i-j)} \right) \right) X^{m+n-k}. \tag{3}$$

В этой формуле верхний индекс $(k-i-j)$ при коэффициенте $q_{m-i}$ означает его производную порядка $(k-i-j)$ по переменной $x$.

Для всех рассмотренных выше тел и колец формальных операторов естественным образом вводится понятие порядка элемента, расширяющее понятие порядка дифференциального оператора.

Фактически многие идеи теории формальных псевдодифференциальных операторов вида (2) были заложены еще И.Шуром [6], в частности, им были доказаны следующие важные теоремы.

**Теорема 2.** *Для любого элемента $L \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$ (с коэффициентами из поля гладких функций одной переменной) произвольного ненулевого порядка $n$ существует корень $R = \sqrt[n]{P}$ степени $n$, имеющий тем самым порядок 1.*

Фактически в этой теореме доказывается существование такого $R \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$, что $R^n = P$; при этом для каждого выбора одного из $n$ корней $r_1 = \sqrt[n]{p_n}$ ($p_n$ — старший коэффициент $L$, см. (2)) как старшего коэффициента искомого оператора $R$, остальные коэффициенты $R$ восстанавливаются однозначно.

**Теорема 3.** *Если два элемента $L_1, L_2 \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$ (порядков $n$ и $m \neq 0$ соответственно) коммутируют, то существуют такие постоянные $c_0$, $c_1$, $c_2, \dots$, что*

$$L_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_2^{\frac{n-k}{m}}. \tag{4}$$

Из этой теоремы уже легко вытекает основное утверждение работы [6]:

**Теорема 4.** *Если два элемента $L_1, L_2 \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$ коммутируют с третьим $L_3 \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$, не равным константе, то $L_1$ и $L_2$ коммутируют между собой.*

Мы фактически воспроизведем доказательство этих трех теорем в разделе 4 в контексте теории почти коммутирующих троек (1).

Отметим, что разложение (4) в случае дифференциальных операторов $L_1, L_2 \in F[X]$ задает разложение Пьюизо на бесконечности алгебраической функции, задаваемой полиномом $Q(L_1, L_2) = 0$, существование которого следует из теоремы Берчнала-Чаунди. Методика Шура доказательства теоремы 3 не позволяет установить данный факт в силу очевидной принципиальной трудности: в теле $\mathcal{F}_2((X))$ возможны соотношения (4) с произвольными наборами констант $c_k$, т.к. $\mathcal{F}_2((X))$ включает не только “рациональные” элементы, образующие тело Оре $\mathcal{F}_2(X)$. Именно по данной причине изучение более узкого тела Оре формальных частных важно для наших целей.

Еще один важный результат, приводящий естественным образом к изучению тела $\mathcal{F}_2(X)$ в контексте теории почти коммутирующих троек (1), будет приведен ниже в разделе 4 (Теорема 5).

В хорошем обзоре [8] даны многие полезные алгебраические конструкции и результаты теории тел Оре и тел формальных рядов вида (2).

## 3. Простейшие свойства и примеры почти коммутирующих операторов

Предварительно рассмотрим алгебраические свойства множества операторов $L$, почти коммутирующих с фиксированным $H$. Во-первых, как мы увидим из примеров ниже (Примеры 2 и 3), два таких оператора $L_1$, $L_2$ не обязательно удовлетворяют (1), что отличает нашу ситуацию от ситуации, описанной в теореме 4. Однако их суммы и произведения, как легко проверить, по-прежнему почти коммутируют с заданным $H$, тем самым образуя подкольцо $\mathcal{F}_2[X, Y]$. Если рассматривать теперь более узкий набор операторов, а именно операторов $L_2 \in \mathcal{F}_2[X, Y]$, для которых выполнено (1) с заданными $L_1$, $H$, то вновь легко убедиться, что все такие $L_2$ будут между собой уже $H$-коммутирующими. Это также естественным образом вытекает из результатов раздела 4 и естественно приводит к рассмотрению подполей тела $\mathcal{F}_2(X)$, состоящих из тех элементов

$\mathcal{F}_2(X)$, которые коммутируют с данным его элементом (централизатор элемента в алгебраической терминологии [8]).

Рассмотрим теперь несколько простейших преобразований, упрощающих вид почти коммутирующих троек операторов и соответствующих им пар коммутирующих элементов $\mathcal{F}_2(X)$ (см. ниже теорему 5 в разделе 4).

**Лемма 1.** *Пусть дифференциальные операторы $L$ и $H$ коммутируют по модулю $H$:*

$$[L,H] = D \cdot H, \tag{5}$$

*$D \in \mathcal{F}_2[X,Y]$. Произведем замену $\widehat{H} = fH$, где $f(x,y) \in \mathcal{F}_2$. Тогда существует оператор $\widehat{D} \in \mathcal{F}_2[X,Y]$ такой,что*

$$[L,\widehat{H}] = \widehat{D} \cdot \widehat{H},$$

*т.е. $L$ и $\widehat{H}$ коммутируют по модулю $\widehat{H}$.*

*Доказательство.* Из (5) вытекает, что $H \cdot L = (L - D) \cdot H$, следовательно

$$[L,\widehat{H}] = L \cdot \widehat{H} - \widehat{H} \cdot L = L \cdot \widehat{H} - fH \cdot L = L \cdot \widehat{H} - f(L-D) \cdot H.$$

Подставив $H = f^{-1}\widehat{H}$ в это равенство, получаем требуемое:

$$[L,\widehat{H}] = L \cdot \widehat{H} - f(L-D)f^{-1} \cdot \widehat{H} = (L - f(L-D)f^{-1}) \cdot \widehat{H}.$$

□

Естественно провести следующее упрощение вида операторов $L_i$, почти коммутирующих с $H$. Прежде всего, отметим, что в силу $[P \cdot H, H] = [P,H] \cdot H$, $P \cdot H$ почти коммутирует с $H$ для любого оператора $P$, в частности, это верно для операторов вида $a(x,y)X^mY^n \cdot H$.

Представим общий оператор $L = \sum_{i,j=0}^{i+j\le N} a_{ij}X^iY^j$ в виде

$$L = L_{(1)}(X) + L_{(2)}(Y) + L_{(1,2)}(X,Y) + a_{00}(x,y),$$

где

$$L_{(1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{i0}X^i, \quad L_{(2)} = \sum_{j=1}^{m} a_{0j}Y^j, \quad L_{(1,2)} = \sum_{i,j=1}^{i+j\le N} a_{ij}X^iY^j,$$

$a_{ij} \in \mathcal{F}_2$, $m \le N$, $n \le N$.

Упорядочив “смешанные” $X,Y$-мономы в $L_{(1,2)}$ лексикографически, возьмем старший из них $a_{r,s}X^rY^s$. Тогда $\widetilde{L} = L - a_{r,s}X^{r-1}Y^{s-1} \cdot H$ также почти коммутирует с $H$, но $\widetilde{L}$ уже имеет меньший старший моном (при этом, возможно, изменятся $L_{(1)}$, $L_{(2)}$). Таким образом мы будем последовательно убирать смешанные мономы в $L$. Через конечное число шагов оператор $L$ примет простой вид

$$\widehat{L} = \sum_{k=1}^{n} p_k(x,y)X^k + \sum_{k=1}^{m} q_k(x,y)Y^k + p_{00}(x,y), \tag{6}$$

при этом $\widehat{L}$ почти коммутирует с $H$ и, если исходный $L$ почти коммутировал с каким-либо $L_2$, то и $\widehat{L}$, как легко проверить, сохранит это свойство.

В дальнейшем мы будем называть *порядком оператора* $L$, упрощенного до вида (6), пару $(n,m)$: $\operatorname{ord} L = (n,m)$, а саму упрощенную форму (6) — *$H$-редуцированной.*

Разумеется, приведение к виду (6) также полезно для проверки условий типа $[L_1, H] = 0 \pmod{H}$.

*Упрощение операторов с помощью замен независимых переменных $x$, $y$.* Проследим, как изменяются старшие коэффициенты операторов при заменах $\hat{x} = \varphi(x)$, $\hat{y} = \psi(y)$. Используя формулу производной сложной функции, получаем преобразования операторов $X^m$ и $Y^n$ (отслеживаем только старшие члены):

$$X^m = \left(\varphi^{(1)}\right)^m \hat{X}^m + \ldots, Y^n = \left(\psi^{(1)}\right)^n \hat{Y^n} \ldots,$$

где

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{X} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{Y} = \frac{\partial}{\partial \hat{y}}, \quad \varphi^{(1)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \psi^{(1)} = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Пусть исходный оператор $L$ уже $H$-редуцирован. После указанной замены переменных его старшие коэффициенты соответственно будут равны

$$\hat{p}_n(\hat{x}) = p_n\left(\varphi^{-1}(\hat{x})\right) \cdot \left(\varphi^{(1)}\right)^n, \qquad \hat{q}_m(\hat{y}) = q_m\left(\psi^{-1}(\hat{y})\right) \cdot \left(\psi^{(1)}\right)^m.$$

Оператор $H = -XY + u(x, y)$ при замене переменных $x$, $y$ переходит в $\hat{H} = \varphi^{(1)}\psi^{(1)}\hat{X}\hat{Y} + u\left(\varphi^{-1}(\hat{x}), \psi^{-1}(\hat{y})\right)$.

Как легко показать (см. теорему 6 ниже), старшие коэффициенты $p_n$, $q_m$ почти коммутирующего с $H$ оператора $L$ вида (6) обязаны зависеть лишь от одной соответствующей переменной: $p_n = p_n(x)$, $q_m = q_m(y)$. Подводя итог, можно утверждать, что для любого почти коммутирующего с $H$ оператора $L$, или почти коммутирующей тройки (1), можно считать эти операторы $H$-редуцированными (6), и, выполняя замену переменных $x$, $y$, привести старшие коэффициенты $p_n$, $q_m$ одного из почти коммутирующего с $H$ операторов к единице (или, для четных порядков, если мы не хотим прибегать к формально комплексным заменам $x$, $y$, в некоторых случаях, к плюс и минус единице). Тогда, как легко проверить (см. ниже начало доказательства теоремы 6), для почти коммутирующей тройки условие $[L_1, L_2] = 0 \pmod{H}$ влечет, что старшие коэффициенты второго оператора должны быть константами. При этом, разумеется, оператор $H$ примет вид $\tilde{H} = -\alpha(x)\beta(y)XY + \tilde{u}$. Разделив его на $\alpha(x)\beta(y)$, вновь получим принятую нами форму $\hat{H} = -XY + \hat{u}$ с сохранением в силу леммы 1 свойства почти коммутируемости (1).

Приведем в порядке усложнения несколько примеров $L$, коммутирующих с $H$ по модулю $H$.

**Пример 1.** Пусть $\operatorname{ord} L = (2, 0)$, $p_2 = 1$, $p_1 = 0$, тогда условия почти коммутирования с $H$ влекут, что $p_{00} = \varphi(y)$ — произвольная функция от $y$, т.е. $L = X^2 + \varphi(y)$. Остальные условия почти коммутирования переходит в

$$\begin{cases} u_{xx} = 0, \\ u_y = -\frac{1}{2}\varphi_y. \end{cases}$$

Отсюда следует вид потенциала $u$:

$$u(x, y) = -\frac{1}{2}\varphi'(y)x + \psi(y),$$

где $\psi(y)$ — произвольная функция от $y$.

**Пример 2.** Пусть оператор $L$ порядка (2,0) имеет общий вид $L = X^2 + p_1(x,y)X + p_{00}(x,y)$ с ненулевым $p_1$. Из условия почти коммутирования получаем систему дифференциальных уравнений на $p_1$, $p_{00}$, $u$, из которой вытекает, что $p_1 = p_1(x)$, $p_{00} = p_{00}(y)$, $(p_{00})_y = -2u_x$, $u_{xx} = 0$, $(p_1 u)_x = 0$. Окончательно получаем $p_1 = \frac{c_2}{x-2c_1}$, $p_{00} = \varphi(y)$, $u = -\frac{1}{2}\varphi'(y)X + c_1\varphi'(y)$, где $c_1$, $c_2$ — произвольные постоянные, $\varphi(y)$ — произвольная функция от $y$.

Этот пример, несмотря на свою простоту, дает один весьма полезный результат. Заметим, что мы фактически нашли *два* линейно независимых оператора, почти коммутирующих с фиксированным $H = -XY - \frac{1}{2}\varphi'(y)X + c_1\varphi'(y)$:

$$L_1 = X^2 + \varphi(y), \qquad L_2 = \frac{1}{x-2c_1}X.$$

Если вычислить их коммутатор и редуцировать по модулю $H$, то получится ненулевой результат.

Тем самым, в отличие от ситуации в теореме 4, *если два оператора коммутируют по модулю $H$ с самим $H$, то они не обязательно коммутируют между собой по модулю $H$.*

Еще одним важным наблюдением является тот факт, что условие $p_1 \not\equiv 0$, с одной стороны, влечет наличие *двух* независимых почти коммутирующих с данным $H$ (хотя и не $H$-коммутирующих между собой) операторов, с другой — является *существенно более ограничительным на вид потенциала* (ср. Примеры 1 и 2).

Общим операторам $L$ порядка (2,2) мы посвятим отдельный подраздел.

3.1. **Операторы порядка (2,2) и теоремы сложения.** Данный случай, с одной стороны, также довольно прост, с другой, заслуживает подробного рассмотрения, поскольку приводит к одному из типичных феноменов алгеброгеометрической техники в теории интегрируемых систем: нетривиальным *теоремам сложения специальных функций.*

Вновь мы можем предполагать, что старшие коэффициенты $p_2$, $q_2$ операторов $L_{(1)}(X)$ и $L_{(2)}(Y)$ в представлении (6) равны 1. Случай $p_2 = 1$, $q_2 = -1$ будет обсуждаться ниже. Условия почти коммутирования оператора $L$ порядка (2,2) с $H$, как легко проверить, сводятся к условиям:

(1) $(p_1)_y = (q_1)_x = 0$,
(2) $(p_{00})_y = -2u_x$,
(3) $(p_{00})_x = -2u_y$,
(4) $(p_{00})_{xy} + (p_1 u)_x + (q_1 u)_y + u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Из второго и третьего сразу получаем, что $u_{xx} - u_{yy} = 0$, т.е.

$$u = u_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + u_2\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{7}$$

— что означает разделение переменных в операторе Шредингера $H = -XY + u$ в координатах $\hat{x} = (x+y)/2$, $\hat{y} = (x-y)/2$. Совместность последнего условия с предыдущими двумя тоже приводит к специальному виду потенциала $u$. Именно, с учетом $u_{xx} - u_{yy} = 0$ получим, что необходимо и достаточно выполнение равенства $(p_1 u)_x + (q_1 u)_y = 0$. Введя функцию $\psi(x,y)$ такую, что

$$\psi_x = q_1 u, \qquad \psi_y = -p_1 u, \tag{8}$$

получим эквивалентное условие

$$p_1(x)\psi_x + q_1(x)\psi_y = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим три возможных случая:

(1) $p_1 \equiv q_1 \equiv 0$;
(2) $p_1 \not\equiv 0$, $q_1 \equiv 0$ (аналогично рассматривается случай $p_1 \equiv 0$, $q_1 \not\equiv 0$);
(3) $p_1 \not\equiv 0$, $q_1 \not\equiv 0$.

**Первый случай** тривиален: $L = X^2 + Y^2 - 2\left(u_1\left(\frac{x+y}{2}\right) - u_2\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)$ и в повернутых переменных $\hat{x} = (x+y)/2$, $\hat{y} = (x-y)/2$ с точностью до знаков совпадет с $\hat{X}$ и $\hat{Y}$-частями $H$.

**Второй случай** дает частичное вырождение: $(p_1 u)_x = 0$, т.е.

$$u(x,y) = u_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + u_2\left(\frac{x-y}{2}\right) = \alpha(y)/p_1(x). \tag{10}$$

Как легко видеть, это тождество представляет собой простейшую форму *теоремы сложения*. Дальнейшее рассмотрение этого случая отложим до полного разбора третьего случая.

**Третий случай**. Условие (9) позволяет выписать вид $\psi$:

$$\psi(x,y) = \phi(\alpha(x) - \beta(y)) \tag{11}$$

для некоторых функций одной переменной $\phi$, $\alpha$, $\beta$, при этом $p_1(x) = 1/\alpha'(x)$, $q_1(y) = 1/\beta'(y)$.

Условия (8) связывают функции $\psi$ и $u$, которые имеют простой вид (11), (7). Покажем, как получить из этой связи одну из форм теоремы сложения. Прежде всего, из (8) видим, что

$$u = u_1((x+y)/2) + u_2((x-y)/2) = \alpha'(x)\beta'(y)\phi'(\alpha(x) - \beta(y)). \tag{12}$$

Проинтегрируем это уравнение по $x$ и $y$, введя первообразные $U_1$, $U_2$, $\Phi$, такие, что $U_1''(z) = u_1(z)$, $U_2''(z) = u_2(z)$, $\Phi'(z) = \phi(z)$. Тогда окончательно необходимое и достаточное условие наличия почти коммутирующего оператора в третьем случае состоит в выполнении тождества

$$\Phi(\alpha(x) - \beta(y)) = U_1\left(\frac{x+y}{2}\right) - U_2\left(\frac{x-y}{2}\right) + U_3(x) + U_4(y) \tag{13}$$

для указанных 7 функций одного переменного.

*Возникает задача нахождения всех возможных нетривиальных тождеств вида (13).*

Массу примеров такого сорта предоставляют теоремы сложения из разных разделов математики, начиная с тривиальных алгебраических:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y),$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2},$$

и подобных им тригонометрических и экспоненциальных тождеств. После логарифмирования они приводятся к виду (13):

$$\log(x^2 - y^2) = \log\frac{x+y}{2} + \log\frac{x-y}{2} + \log 4,$$

$$\log(\cos x+\cos y)=\log\cos\frac{x+y}{2}+\log\cos\frac{x-y}{2}+\log 2.$$

В последнем случае получаем следующие значения коэффициентов оператора $L=X^2+p_1X+Y^2+q_1Y+p_{00}$ и потенциала $u$:

**Пример 3.**

$$p_1=\frac{c_1}{\sin x},\qquad q_1=-\frac{c_1}{\sin y},\qquad p_{00}=-2\left(\frac{1}{\cos^2(\frac{x+y}{2})}+\frac{1}{\cos^2(\frac{x-y}{2})}\right),$$

$$u=\frac{1}{\cos^2(\frac{x+y}{2})}-\frac{1}{\cos^2(\frac{x-y}{2})}.$$

Богатый запас таких тождеств дает теория специальных функций. Например, для двоякопериодической функции Якоби $\operatorname{sn} z$ справедливо следующее тождество (см. [10]):

$$\operatorname{sn}(x+y)\operatorname{sn}(x-y)=\frac{\operatorname{sn}^2x-\operatorname{sn}^2y}{1-k^2\operatorname{sn}^2x\operatorname{sn}^2y}. \tag{14}$$

Умножим обе его части на $k$ и определим функции $\alpha(x)$, $\beta(y)$ с помощью соотношений $k\operatorname{sn}^2x=\operatorname{th}\alpha(x)$, $k\operatorname{sn}^2y=\operatorname{th}\beta(y)$. Тогда правая часть (14) перепишется так формула для гиперболического тангенса от разности аргументов:

$$\frac{\operatorname{th}\alpha(x)-\operatorname{th}\beta(y)}{1-\operatorname{th}\alpha(x)\operatorname{th}\beta(y)}=\operatorname{th}(\alpha(x)-\beta(y)),$$

т.е. получаем

$$k\operatorname{sn}(x+y)\operatorname{sn}(x-y)=\operatorname{th}(\alpha(x)-\beta(y)).$$

Прологарифмировав, имеем:

$$\log\operatorname{th}(\alpha(x)-\beta(y))=\log\operatorname{sn}(x+y)+\log\operatorname{sn}(x-y)+\log k,$$

где $\alpha(z)=\beta(z)=\operatorname{arcth}(k\operatorname{sn}^2(z))$. т.е. требуемое тождество (13).

Аналогичным образом можно привести к виду (13) или (12) соотношения

$$\wp(u)-\wp(v)=-\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)},$$

$$\wp(u+v)-\wp(u-v)=-\frac{\wp'(u)\wp'(v)}{(\wp(u)-\wp(v))^2}.$$

Приведем более сложное соотношение на $\theta$-функции Якоби (см. [10]), которое также можно привести к виду (13):

$$\theta_3(z+y)\theta_3(z-y)\theta_3^2=\theta_3^2(y)\theta_3^2(z)+\theta_1^2(z)\theta_1^2(y).$$

Перепишем его в виде

$$\frac{\theta_1^2(z)}{\theta_3^2(z)}+\frac{\theta_3^2(y)}{\theta_1^2(y)}=\frac{\theta_3(z+y)\theta_3(z-y)\theta_3^2}{\theta_3^2(z)\theta_1^2(y)}$$

и, обозначив

$$\frac{\theta_1^2(z)}{\theta_3^2(z)}=\alpha(z),\qquad \frac{\theta_3^2(y)}{\theta_1^2(y)}=-\beta(y),$$

прологарифмируем обе части:

$$\log(\alpha(z)-\beta(y))=\log\theta_3(z+y)+\log\theta_3(z-y)-\log\theta_3^2(z)-\log(\theta_1^2(y)/\theta_3^2),$$

что вновь дает (13).

Большой запас теорем сложения вида (13) (иногда называемых псевдотеоремами сложения в силу наличия в них не только $x+y$, но и разности $x-y$) можно найти в [10] и оригинальных трудах К.Якоби.

Возвращаясь к обсуждению равенства (10) для второго случая, можем констатировать, что имеется весьма большой набор нетривиальных примеров подобных тождеств, в которых могут участвовать как элементарные, так и специальные функции. Каждое тождество вида (10), (12) или (13) дает пример *двух* операторов $L$, почти коммутирующего с $H$ (но, как правило, не $H$-коммутирующих между собой). Часть таких примеров тривиализуется при переходе к переменным $\hat{x}=(x+y)/2$, $\hat{y}=(x-y)/2$. Однако следует отметить, что, несмотря на то, что оператор Шредингера допускает разделение переменных во всех случаях, часть рассмотренных выше случаев представляет определенный интерес для теории почти коммутирующих троек. Пример 3 выше содержит фактически уже *два* оператора, почти коммутирующих с $H$, порядков (2,2) (в котором можно положить $c_1=0$) и порядка (1,1), именно существование которого уже налагает жесткое ограничение (9), эквивалентное наличию теоремы сложения. Причем, как в Примере 2, эти два оператора между собой уже не будут $H$-коммутирующими.

Остановимся кратко на случае $p_2=1$, $q_2=-1$. Как легко проверить, условия почти коммутирования дают $u_{xx}+u_{yy}=0$, т.е. потенциал $u$ должен быть гармонической функцией. Остальные условия дают $p_1=p_1(x)$, $q_1=q_1(y)$, $(p_{00})_y=-2u_x$, $(p_{00})_x=2u_y$, $(p_{00})_{xy}+(p_1u)_x+(q_1u)_y+u_{xx}-u_{yy}=0$.

Из них вновь следует выполнение равенства $(p_1u)_x+(q_1u)_y=0$ и, после введения $\psi(x,y)$ такой, что выполнены (8), и соответствующих вторых первообразных, получим (в максимально невырожденном случае $p_1\not\equiv 0$, $q_1\not\equiv 0$)

$$U(x,y)=\Phi(\alpha(x)-\beta(y))+U_3(x)+U_4(y) \tag{15}$$

для гармонической функции $U(x,y)$. Подобная форма *гармонической теоремы сложения*, безусловно, заслуживает отдельного изучения. Как и выше, из каждого нетривиального тождества вида (15) можно построить пример почти коммутирующих с $H=-XY+u(x,y)$ пары операторов, уже без очевидного разделения переменных.

## 4. Основные теоремы

Прежде всего, отметим, что при рассмотрении свойств троек $H$-коммутирующих операторов (1) использование тела $\mathcal{F}_2(\partial_x)=\mathcal{F}_2(X)$ и кольца $\mathcal{F}_2(\partial_x)[\partial_y]=\mathcal{F}_2(X)[Y]$ приводит к намного более простым формулировкам.

Обозначим за $M$ и $\widetilde{M}$ следующие формальные операторы из $\mathcal{F}_2(X)[Y]$ и $\mathcal{F}_2(Y)[X]$ соответственно:

$$M=-X^{-1}\cdot H=Y-X^{-1}\cdot u, \qquad \widetilde{M}=-Y^{-1}\cdot\widetilde{H}=X-Y^{-1}\cdot u, \tag{16}$$

где мы, как упомянуто во введении, используем гиперболическую форму оператора $H=-\partial_x\partial_y+u=-XY+u$.

Предположим, что $H$ и операторы $L_1$ и $L_2$ удовлетворяют (1). Разделим с остатком операторы $L_1$ и $L_2$ на оператор $M$ (или $\widetilde{M}$) в кольце $\mathcal{F}_2(X)[Y]$ (соотв. $\mathcal{F}_2(Y)[X]$); получим формальные линейные *обыкновенные* псевдодифференциальные операторы $R_1$, $R_2$ из тела Оре $\mathcal{F}_2(X)$ такие, что

$$L_1-Q_1\cdot M=R_1\in\mathcal{F}_2(X), \quad L_2-Q_2\cdot M=R_2\in\mathcal{F}_2(X) \tag{17}$$

с $Q_i \in \mathcal{F}_2(X)[Y]$.

В работе [4] была доказана следующая несложная теорема:

**Теорема 5.** *Для операторов $R_1$, $R_2$ и $M$ выполнены соотношения*

(1) $[R_1, R_2] = 0$ *в* $\mathcal{F}_2(X)$;
(2) $[R_1, M] = [R_2, M] = 0$ *в* $\mathcal{F}_2(X)[Y]$;
(3) *если существует полином $Q(L_1, L_2)$ с постоянными коэффициентами, такой, что $Q(L_1, L_2) = 0$ $(mod\ H)$ в $\mathcal{F}_2[X, Y]$, то $Q(R_1, R_2) = 0$ в $\mathcal{F}_2(X)$.*

Тем самым очевидно, что теория коммутирующих элементов тела Оре $\mathcal{F}_2(X)$ имеет большое значение для теории интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных. Она во многом напоминает теорию Берчнала-Чаунди коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов, хотя и не все классические результаты Берчнала и Чаунди были перенесены на рассматриваемый нами случай. Сошлемся вновь на обзор [8] и недавние работы других авторов [9].

Вначале докажем несколько результатов для кольца $\mathcal{F}_2((X))[Y]$. Рассмотрим оператор

$$M = Y - X^{-1}u = Y + \sum_{i-1}^{\infty}(-1)^i u^{i-1,0} X^{-i},$$

(здесь и далее мы используем обозначение $a^{i,j} \equiv \frac{\partial^{i+j}a}{\partial x^i \partial y^j}$ для частных производных от функций $a(x, y) \in \mathcal{F}_2$) и два элемента тела $\mathcal{F}_2((X))$ вида

$$R_1 = \sum_{i=0}^{\infty} r_{1-i} X^{1-i}$$

(тем самым $R_1$ имеет порядок 1) и

$$\widetilde{R} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{k-i} X^{k-i}$$

произвольного порядка $k$.

**Теорема 6.** *Если операторы $M$, $R_1$, $\widetilde{R}$ попарно коммутируют, т.е. $[M, R_1] = [M, \widetilde{R}] = [R_1, \widetilde{R}] = 0$, то существуют такие постоянные $c_0$, $c_1$, $c_2, \ldots$, что*

$$\widetilde{R} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i R_1^{k-i}. \tag{18}$$

*Доказательство.* (по схеме И.Шура [6]). Из

$$[M, R_1] = r_1^{0,1} X^1 + r_0^{0,1} + (r_{-1}^{0,1} + r_1^{1,0} u + r_1 u^{1,0}) X^{-1} + \ldots = 0$$

следует, что $r_1^{0,1} = 0$, $r_0^{0,1} = 0$, т.е. $r_1$ и $r_0$ являются функциями только от $x$: $r_1 = r_1(x)$, $r_0 = r_0(x)$. Аналогично, из $[M, \widetilde{R}] = 0$ следует, что $p_k^{0,1} = p_{k-1}^{0,1} = 0$, т.е. $p_k(x)$ и $p_{k-1}(x)$ также не зависят от $y$. Из коммутативности операторов $R_1$ и $\widetilde{R}$ имеем $r_1 p_k^{1,0} - k r_1^{1,0} p_k = 0$, тем самым существует константа $c_0$ такая, что $p_k = c_0 r_1^k$, т.к. $r_1$ и $p_k$ зависят только от $x$.

Следовательно, оператор $\widetilde{R}$ порядка $k$ представим в виде

$$\widetilde{R} = c_0 r_1^k X^k + p_{k-1} X^{k-1} + \ldots.$$

Вычтем из $\widetilde{R}$ оператор $c_0 R_1^k$; получим новый оператор $\widetilde{\widetilde{R}} = \widetilde{R} - c_0 R_1^k$ порядка $k-1$. Очевидно, что оператор $\widetilde{\widetilde{R}}$ также коммутирует с $R_1$ и $M$.

Рассуждая аналогично предыдущему, найдем константу $c_1$ такую, что $\widetilde{\widetilde{R}} = c_1 r_1^{-k-1} X^{-k-1} + \dots$. Тем самым получаем

$$\widetilde{R} = c_0 R_1^{-k} + c_1 R_1^{-k-1} + \dots$$

с остатком порядка $k-2$. Продолжая процедуру далее, получим требуемое разложение (18). $\square$

**Лемма 2.** *Если коммутируют $P \in \mathcal{F}_2((X))$ порядка $n$ и $M$, т.е. $[P,M]=0$ в кольце $\mathcal{F}_2(X)[Y]$, то $R = \sqrt[n]{P}$ (корень степени $n$ из оператора $P$) также коммутирует с $M$: $[R,M]=0$.*

*Доказательство.* Доказательство существования корня степени $n$ любого элемента $\mathcal{F}_2((X))$ порядка $n$ было дано Шуром (теорема 2). Выпишем цепочку очевидных равенств

$$0 = [P,M] = [R^n, M] = \sum_{i-1}^{n} R^{n-i}[R,M]R^{i-1}. \tag{19}$$

Далее, рассуждая от противного, предположим, что $[R,M] \neq 0$, где

$$R = \sqrt[n]{P} = r_1 X^1 + r_0 X^0 + r_{-1} X^{-1} + \dots,$$

$M = Y - uX^{-1} + u^{1,0}X^{-2} - u^{2,0}X^{-3} + \dots$. Пусть старший член коммутатора $[R,M]$ равен $\phi_s(x,y)X^s$, тогда старший член в сумме (19) есть $nr_1^{n-1}\phi_s X^{n-1+s}$, т.е. не равен нулю, что противоречит (19). $\square$

**Теорема 7.** *Для пары операторов $L_1$, $L_2, \in \mathcal{F}_2[X,Y]$ и $H = -\partial_x\partial_y + u$, для которых выполнено (1), существует полином $Q(L_1,L_2)$ с постоянными коэффициентами, такой, что $Q(L_1,L_2) = S \cdot H$, $S \in \mathcal{F}_2[X,Y]$.*

*Доказательство.* Будем предполагать, что операторы $L_1$, $L_2, \in \mathcal{F}_2[X,Y]$ уже упрощены до вида (6):

$$L_1 = L_{1(1)}(X) + L_{1(2)}(Y) + p_{100}(x,y) = \sum_{k=1}^{n_1} p_{1k}(x,y)X^k + \sum_{k=1}^{n_2} q_{1k}(x,y)Y^k + p_{100}(x,y),$$

$$L_2 = L_{2(1)}(X) + L_{2(2)}(Y) + p_{200}(x,y) = \sum_{k=1}^{m_1} p_{2k}(x,y)X^k + \sum_{k=1}^{m_2} q_{2k}(x,y)Y^k + p_{200}(x,y).$$

Тогда преобразование (17) операторов $L_1$, $L_2$ в коммутирующие псевдодифференциальные операторы $R_1, R_2 \in \mathcal{F}_2(X)$ сохранит их старшие коэффициенты $p_{1n_1}$ и $p_{2m_1}$. Как следует из доказательства теоремы 6 (и ее прообраза — теоремы 3), эти старшие коэффициенты тем самым будут иметь вид $p_{1n_1} = c_1(\phi(x))^{n_1}$, $p_{2m_1} = c_2(\phi(x))^{m_1}$ для некоторой функции $\phi(x)$ одной переменной $x$. Применяя такое же преобразование (17) в коммутирующие псевдодифференциальные операторы $\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2 \in \mathcal{F}_2(Y)$ с помощью оператора $\widetilde{M}$, получим, что старшие коэффициенты $q_{1n_2}$ и $q_{2m_2}$ имеют вид $d_1(\psi(y))^{n_2}$, $d_2(\psi(y))^{m_2}$.

Рассмотрим слагаемые общего полинома с постоянными коэффициентами $Q(L_1, L_2) = \sum_{r,s}^{r+s \le N} b_{r,s}(L_1)^r(L_2)^s$. Поскольку операторы $L_1$, $L_2$ $H$-коммутируют, мы считаем порядок их внутри каждого монома фиксированным (сначала степени $L_1$, потом степени $L_2$). $H$-редуцируя каждое слагаемое

$$b_{r,s}(L_1)^r(L_2)^s = P_{r,s}H + W,$$

получим $H$-коммутирующий с $L_1$, $L_2$ оператор вида

$$W = W_{(1)}(X) + W_{(2)}(Y) + w_{00}(x, y), \tag{20}$$

порядок которого ограничен сверху числом $N \max(n_i, m_i)$. Старшие коэффициенты $W_{(1)}(X)$, $W_{(2)}(Y)$ должны иметь вид

$$c_3(\phi(x))^{n_3}, \qquad c_4(\psi(y))^{m_2}, \qquad c_i = \mathrm{const} \tag{21}$$

соответственно (другие их коэффициенты существенно сложнее). Полный $H$-упрощенный оператор $Q(L_1, L_2)$ также почти коммутирует с $L_1$, $L_2$, $H$, следовательно, его старшие коэффициенты также должны иметь вид (21) с константами $c_i$, линейно выражающимися через $b_{r,s}$. Тем самым, приравняв эти два старших коэффициента нулю, получим два линейных уравнения на $b_{r,s}$ вида

$$\sum_{r+s \le N} \lambda_{r,s} b_{r,s} = 0. \tag{22}$$

Предполагая их выполнение, получим, что $H$-редуцированная форма $Q(L_1, L_2)$ имеет в представлении (20) порядки, как минимум на 1 меньшие исходных, при двух линейных условиях на коэффициенты $b_{r,s}$. При этом старшие коэффициенты полученных операторов в силу $H$-коммутативности с $L_1$, $L_2$, $H$ также имеют вид (21); вновь приравнивая их нулю, получим еще 2 линейных уравнения вида (22). Как очевидно, при достаточно большом $N$ количество слагаемых (порядка $N^2/2$) в $Q(L_1, L_2)$ будет больше числа уравнений (порядка $2N \max(n_i, m_i)$) вида (22), гарантирующих последовательное зануление всех коэффициентов $H$-редуцированного оператора $Q(L_1, L_2)$ в форме (20). Оставшийся свободный член $w_{00}(x, y)$ обязан почти коммутировать с $H$, и, следовательно, является константой. Таким образом, существование нетривиального полинома $Q(L_1, L_2)$ с постоянными коэффициентами, такого, что $Q(L_1, L_2) = 0 \pmod H$, очевидно.

□

## 5. Заключении

В обзоре [8] подробно изложены многие результаты теории тел Оре, их различных алгебраических обобщений, тел формальных рядов вида (2), обсуждаются возможные обобщения теоремы Берчнала-Чаунди о полиномиальных соотношениях между коммутирующими элементами, коммутативность и конечномерность централизаторов нетривиальных элементов (обобщения теоремы 4 И.Шура). В частности, там приводится теорема Resco, Small'a и Wadsworth'a (Теорема 5.13) об оценке сверху степени трансцендентности любого подполя (обобщенного) тела Оре $R(\delta)$, из которой, в частности, вытекает теорема типа Берчнала-Чаунди для случая, когда поле коэффициентов исходного кольца обыкновенных дифференциальных операторов — поле рациональных или алгебраических функций одного переменного. Однако, по-видимому, до настоящего времени общая теорема об алгебраической зависимости любых двух коммутирующих элементов для общего случая одномерного тела Оре $F(X)$ с произвольным дифференциальным полем коэффициентов $F$ характеристики 0 неизвестна. Отметим, что коммутирующие элементы $R_1$, $R_2 \in \mathcal{F}_2(X)$, соответствующие операторам $L_1$, $L_2 \in \mathcal{F}_2[X, Y]$ в теореме 7, имеют весьма специальный вид. Представляет большой интерес либо доказать подобную общую алгебраическую теорему для $F(X)$, либо привести контрпример. Как очевидно из теоремы 3, легко доказывается лишь наличие *функционального* (возможно, трансцендентного) соотношения между коммутирующими элементами $R_1$, $R_2 \in F(X)$.

## References


[1] J.L. Burchnall, T.W. Chaundy, *Commutative ordinary differential operators*, Proc. London Soc., Ser. 2, **21** (1923), 420–440. MR1575373

[2] B.A. Dubrovin, I.M. Krichever and S.P. Novikov, *The Schrödinger equation in a periodic field and Riemann surfaces*, Soviet Math. Dokl. **17** (1976), 947–952.

[3] I.M. Krichever, *Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations*, Russian Math. Surveys, **32**:6 (1977), 185–213. MR0516323

[4] I.A. Taimanov, S.P. Tsarev, *The Moutard transformation: an algebraic formalism via pseudodifferential operators and applications*, OCAMI (Osaka City University Advanced Mathematical Institute) Study Series, **3** (2010), 169–183. MR2605796

[5] O. Ore, *Linear equations in non-commutative fields*, Ann. of Math. **32**:3 (1931), 463–477. MR1503010

[6] I. Schur, *Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke*, Sitzungsber. Berliner Math. Gesellschaft, **4** (1904), 2–8.

[7] P.M. Cohn, *Skew Fields. Theory of General Division Rings*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **57**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[8] K.R. Goodearl, *Centralizers in differential, pseudo-differential, and fractional differential operator rings*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, **13**:4 (1983), 573–618. MR0724420

[9] J. Richter, S.D. Silvestrov, *Computing Burchnall–Chaundy Polynomials with Determinants*, In: Silvestrov S., Rančić M. (eds.), Engineering Mathematics II. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, **179** (2016), 57–64. MR3630574

[10] K.T. Whittaker, G.N. Watson, *A course of modern analysis*, 4ed., CUP, 1950.



Sergey Petrovich Tsarev
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
*E-mail address*: `sptsarev@mail.ru`

Vitaly Anatolievich Stepanenko
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
*E-mail address*: `sptsarev@mail.ru`