

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 14, стр. 1064–1077 (2017)

УДК 519.17+512.54

DOI 10.17377/semi.2017.14.090

MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА
С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$

А.А. МАХНЕВ, М.П. ГОЛУБЯТНИКОВ

АБСТРАКТ. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$. Let $G = \text{Aut}(\Gamma)$, $\bar{G} = G/S(G)$, \bar{T} is the socle of \bar{G} . If Γ is vertex-symmetric then the possible structure of G is determined. In the case $\bar{T} \cong U_3(3)$ graph exist and is arc-transitive.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом). Если Γ — граф диаметра d , то через Γ_i , где $i \leq d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ , в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ .

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим

МАХНЕВ, А.А., ГОЛУБЯТНИКОВ, М.П., AUTOMORPHISMS OF GRAPH WITH INTERSECTION ARRAY $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$.

© 2017 МАХНЕВ А.А., ГОЛУБЯТНИКОВ М.П.

Поступила 6 сентября 2017 г., опубликована 19 октября 2017 г.

$a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X . Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются числами пересечения графа Γ .

Граф называется реберно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин не большим 4096.

Предложение 1. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на $v \leq 4096$ вершинах. Если $\lambda = 2$ и $\mu > 2$, то верно одно из утверждений:

(1) Γ — примитивный граф с массивом пересечений {24, 21, 3; 1, 3, 18}, {35, 32, 8; 1, 4, 8}, {39, 36, 27; 1, 4, 13}, {51, 48, 8; 1, 4, 36}, {60, 57, 16; 1, 4, 30}, {60, 57, 32; 1, 4, 18}, {63, 60, 49; 1, 4, 15}, {68, 65, 32; 1, 4, 40}, {75, 72, 42; 1, 4, 50}, {75, 72, 31; 1, 8, 45}, {80, 77, 61; 1, 7, 20}, {90, 87, 60; 1, 15, 18}, {99, 96, 12; 1, 4, 88}, {99, 96, 20; 1, 4, 72}, {99, 96, 6; 1, 6, 88}, {120, 117, 5; 1, 5, 108}, {143, 140, 34; 1, 7, 10}, {147, 144, 39; 1, 12, 117}, {224, 221, 32; 1, 16, 208};

(2) Γ — антиподальный граф с $\mu \geq 3$ и массивом пересечений {15, 12, 1; 1, 4, 15}, {18, 15, 1; 1, 5, 18}, {27, 24, 1; 1, 8, 27}, {35, 32, 1; 1, 4, 35}, {42, 39, 1; 1, 3, 42}, {45, 42, 1; 1, 6, 45}, {63, 60, 1; 1, 4, 63}, {75, 72, 1; 1, 12, 75}, {99, 96, 1; 1, 4, 99}, {108, 105, 1; 1, 5, 108}, {147, 144, 1; 1, 16, 147}, {171, 168, 1; 1, 12, 171}, {243, 240, 1; 1, 4, 243}, {243, 240, 1; 1, 20, 243}.

Продолжается исследование реберно симметричных графов с такими массивами пересечений. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. Автоморфизмы графов с массивами из пункта (2) {42, 39, 1; 1, 3, 42} и {27, 24, 1; 1, 8, 27} найдены в [2,3]. Реберно симметричный граф с массивом пересечений {27, 24, 1; 1, 8, 27} существует и имеет группу автоморфизмов $(Z_4 \times U_3(3)).Z_2$. Автоморфизмы графов с массивами {15, 12, 1; 1, 4, 15}, {18, 15, 1; 1, 5, 18} найдены в [4] и в статье Ефимова К.С., Махнева А.А., направленной в "Математические заметки". Автоморфизмы графов с массивами {45, 42, 1; 1, 6, 45}, {75, 72, 1; 1, 12, 75} найдены в [5,6]. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {63, 60, 1; 1, 4, 63}.

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [7, стр. 431]) массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k+1)$ вершин и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$ и $f = m(r-1)(k+1)/(n+m)$, $g = n(r-1)(k+1)/(n+m)$. Если $\mu \neq \lambda$, то собственные значения графа целые и параметры графа выражаются через r, n, m : $k = nm$, $\mu = (m-1)(n+1)/r$, $\lambda = \mu + n - m$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений {63, 60, 1; 1, 4, 63}. Тогда Γ имеет $v = 1 + 63 + 945 + 15 = 1024$ вершин и спектр $63^1, 7^{540}, -1^{63}, -9^{420}$. Порядок клики в Γ не превосходит 4, так как $\lambda = 2$.

Теорема 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$ пересекает t антиподальных классов по s вершинам. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и выполняется одно из утверждений:

(1) Ω — пустой граф, то $p = 2$, $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 10l + 32m$ и $\alpha_2(g) = 1024 - 26l - 32m$;

(2) Ω является n -кликкой, либо $n = 1$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 48l + 15$ и $\alpha_2(g) = 993 - 48l$, либо $n = 2$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 16l + 32e - 18$, $\alpha_2(g) = 1042 - 32e - 48l$, либо $n = 4$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 16l + 32e - 36$, $\alpha_2(g) = 1060 - 48l - 32e$, либо $n = 4$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 24l + 48e + 36$, $\alpha_2(g) = 972 - 72l - 48e$, либо $n = 4$, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 40l + 80e + 60$, $\alpha_2(g) = 900 - 120l - 80e$;

(3) Ω содержится в антиподальном классе, то либо $p = 7$, $s = 2, 9, 16$, $\alpha_1(g) = 112l - 24 - 9s$, либо $p = 3$, $s = 4, 7, 10, 13, 16$, $\alpha_1(g) = 48l + 24 - 9s$;

(4) $p = 3$ и либо

(i) $st \leq 64$ и если $st = 64$, то $\alpha_1(g) = 0$ и $s = 16, t = 4$, $\alpha_2(g) = 960$ или $s = 4, t = 16$, $\alpha_2(g) = 1024 - 256 = 768$, либо

(ii) $s = 13, t = 4$, $\alpha_1(g) = 48l - 36$ и $l \in \{1, 2, \dots, 6\}$, либо

(iii) $s = 10, t = 4$, $\alpha_1(g) = 48l - 24 = 24(2l - 1)$ и $l \in \{1, 2, \dots, 10\}$, либо

(iv) $s = 7$, то $t = 4$, $\alpha_1(g) = 48l - 32$ и $l \in \{1, 2, \dots, 15\}$ или $t = 7$, $\alpha_1(g) = 48l - 33$ и $l \in \{1, 2, \dots, 6\}$, либо

(v) $s = 4, t = 4$, $\alpha_1(g) = 48l - 16$ и $l \in \{1, 2, \dots, 20\}$ или $t = 7$, $\alpha_1(g) = 48l + 18$ и $l \in \{1, 2, \dots, 13\}$, или $t = 10$, $\alpha_1(g) = 48l + 8$ и $l \in \{1, 2, \dots, 8\}$, или $t = 13$, $\alpha_1(g) = 48l + 2$ и $l \in \{1, 2, 3, 4\}$;

(5) $p = 2$.

Следствие 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$ и группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ . Если F — антиподальный класс графа Γ , \bar{T} — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, то \bar{T} стабилизирует F и выполняется одно из утверждений:

(1) $\bar{T} \cong U_3(3)$, граф Γ существует и является реберно симметричным, группа G является расширением элементарной абелевой 2-группы Q порядка 2^{10} с помощью $G_2(2)$ и Q содержит подгруппу K порядка 2^4 , регулярную на каждом антиподальном классе, либо

(2) $\bar{T} \cong L_2(7)$, группа G является расширением элементарной абелевой 2-группы Q с помощью $L_2(7)$ или $PGL_2(7)$, длины \bar{T} -орбит на F равны $(8, 8)$, $|Q_{\{F\}} : Q_a| = 2$, $C_Q(f) \cap Q_{\{F\}} = \langle g \rangle$, $[Q_{\{F\}}, f] = Q_a$, подграф $\Omega = \text{Fix}(g)$ является пустым, $\alpha_3(g) = 128$, $\alpha_1(g) = 112(1 + 2n)$, $n \leq 3$, g фиксирует точно 8 антиподальных классов и $|Q_{\{F\}}| \in \{2^4, 2^7\}$.

В случае (2) существование графа неизвестно.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [8]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений (X, \mathcal{R}) с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X , в котором вершины u, w смежны,

если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l .

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l . Тогда собственные значения $p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$. Матрицы P и Q , у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство \mathbf{C}^v является ортогональной прямой суммой собственных подпространств W_0, \dots, W_d матрицы смежности A_1 графа Γ . Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A , поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i} . Тогда (см. § 3.7 [3]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений {63, 60, 1; 1, 4, 63}. Тогда ненулевые числа пересечений равны

- (1) $p_{11}^1 = 2, p_{12}^1 = 60, p_{22}^1 = 870, p_{23}^1 = 1, p_{33}^1 = 0;$
- (2) $p_{11}^2 = 4, p_{12}^2 = 58, p_{13}^2 = 1, p_{22}^2 = 872, p_{23}^2 = 14, p_{33}^2 = 0;$
- (3) $p_{12}^3 = 63, p_{13}^3 = 0, p_{22}^3 = 882, p_{23}^3 = 0, p_{33}^3 = 14.$

Доказательство. Прямые вычисления. □

Лемма 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений {63, 60, 1; 1, 4, 63}, $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 540, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 63. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l , взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g) = (17\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/32 - 4$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/16 - 1$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 540$ и $\chi_2(g) - 63$ делятся на p , а если $|g| = p^2$, p — простое число, то $\chi_1(g^p) - 540$ делится на p^2 .

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 540 & 60 & -4 & -36 \\ 63 & -1 & -1 & 63 \\ 420 & -60 & 4 & -28 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (135\alpha_0(g) + 15\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 9\alpha_3(g))/256$. Подставляя $\alpha_2(g) = 1024 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (17\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/32 - 4$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (63\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 63\alpha_3(g))/1024$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 1024 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/16 - 1$. □

Остальные утверждения леммы следуют из лемм 1–2 [9].

В леммах 3–7 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Если Ω — непустой граф, то будем считать, что Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах. Для вершины $x \in \Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x .

З а м е ч а н и е. Если g фиксирует антиподальный класс K и $a \in \Omega$, то K пересекает Ω , а если Ω пересекает антиподальные классы K, L , то $|K \cap \Omega| = |L \cap \Omega|$.

Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. Вершина из $L \cap \Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K \cap \Omega$, поэтому $|K \cap \Omega| \leq |L \cap \Omega|$. Симметрично, $|L \cap \Omega| \leq |K \cap \Omega|$.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то $p = 2$, $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 10l + 32m$ и $\alpha_2(g) = 1024 - 26l - 32m$;*

(2) *если Ω является n -кликкой, то либо $n = 1$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 48l + 15$ и $\alpha_2(g) = 993 - 48l$, либо $n = 2$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 16l + 32e - 18$, $\alpha_2(g) = 1042 - 32e - 48l$, либо $n = 4$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 16l + 32e - 36$, $\alpha_2(g) = 1060 - 48l - 32e$, либо $n = 4$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 24l + 48e + 36$, $\alpha_2(g) = 972 - 72l - 48e$, либо $n = 4$, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 40l + 80e + 60$, $\alpha_2(g) = 900 - 120l - 80e$;*

(3) *если Ω содержится в антиподальном классе, то либо $p = 7$, $s = 2, 9, 16$, $\alpha_1(g) = 112l - 24 - 9s$, либо $p = 3$, $s = 4, 7, 10, 13, 16$, $\alpha_1(g) = 48l + 24 - 9s$.*

Доказательство. Так как $1024 = 2^{10}$, то $p = 2$. Далее, $\alpha_3(g) = 16l$, l четно, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 8l)/16 - 4$, $\alpha_1(g) = 8l + 32m$ и $\alpha_2(g) = 1024 - 24l - 32m$.

Пусть Ω является n -кликкой, $a \in \Omega$. Тогда g действует без неподвижных точек на $F - \{a\}$, где F — антиподальный класс, содержащий a , поэтому p делит 15.

Если $n = 1$, то g действует без неподвижных точек на $[a]$, p делит 63 и $p = 3$. В этом случае $\alpha_3(g) = 15$, $\chi_1(g) = (1 + \alpha_1(g))/16 - 4$, поэтому $\alpha_1(g) = 48l + 15$, $\alpha_2(g) = 993 - 48l$.

Если $n > 1$, то для различных вершин $a, b \in \Omega$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b] - \Omega$ и на $\Gamma_2(a)$, поэтому либо $p = 2$, $n = 2, 4$, либо $n = 4$, $p = 3, 5$.

Пусть $n = 2$, $p = 2$. Тогда число $\chi_2(g) - 63 = (2 + \alpha_3(g))/16 - 64$ делится на 2, поэтому $\alpha_3(g) = 32l - 2$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 + \alpha_1(g) - 16l + 1)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 16l + 32e - 18$, $\alpha_2(g) = 1024 - 32l - (16l + 32e - 18) = 1042 - 32e - 48l$.

Пусть $n = 4$, $p = 2$. В силу того, что число $\chi_2(g) - 63$ делится на 2, имеем $\alpha_3(g) = 32l - 4$. Далее, число $\chi_1(g) = (34 + \alpha_1(g) - 16l + 2)/16 - 4$ четно, следовательно, $\alpha_1(g) = 16l + 32e - 36$ и $\alpha_2(g) = 1060 - 48l - 32e$.

Пусть $n = 4$, $p = 3$. Тогда число $\chi_2(g) - 63 = (4 + \alpha_3(g))/16 - 64$ делится на 3, поэтому $\alpha_3(g) = 48l + 12$. Далее, число $\chi_1(g) = (28 + \alpha_1(g) - 24l)/16 - 4$ кратно трем, поэтому $\alpha_1(g) = 24l + 48e + 36$ и $\alpha_2(g) = 1024 - 4 - 48l - 12 - 24l - 48e - 36 = 972 - 72l - 48e$.

Пусть $n = 4$, $p = 5$. Тогда число $\chi_2(g) - 63 = (4 + \alpha_3(g))/16 - 64$ делится на 5, поэтому $\alpha_3(g) = 80l + 60$. Далее, из делимости числа $\chi_1(g) = (4 + \alpha_1(g) - 40l)/16 - 4$ на 5 вытекает $\alpha_1(g) = 40l + 80e + 60$, $\alpha_2(g) = 900 - 120l - 80e$.

Пусть Ω содержится в антиподальном классе F . Тогда p делит $16 - s$ и 63 , поэтому g действует без неподвижных точек на множестве антиподальных классов, отличных от F .

Пусть $p = 7$. Тогда $s = 2, 9, 16$, число $\chi_1(g) = (18s + 2\alpha_1(g) - 16)/32 - 4$ сравнимо с 1 по модулю 7 , поэтому $\alpha_1(g) = 112l - 24 - 9s$.

Пусть $p = 3$. Тогда $s = 4, 7, 10, 13, 16$, число $\chi_1(g) = (18s + 2\alpha_1(g) - 16)/32 - 4$ делится на 3 , поэтому $\alpha_1(g) = 48l + 24 - 9s$. \square

Лемма 4. *Если Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе, то $p \leq 3$.*

Доказательство. Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$.

Если $p > 3$, то для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ с условием $d(a, b) \leq 2$ подграф $[a] \cap [b]$ содержится в Ω . Отсюда Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{t-1, 4(s-1), 1; 1, 4, t-1\}$, p делит $16-s, 64-t$ и $1024-st$. В случае $s = 16$ каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна ровно с t вершинами из Ω , поэтому $p \leq 3$, противоречие.

В случае $p = 13$ имеем $s = 3, t = 12, 25, 38, 51$ и Ω имеет массив пересечений $\{t-1, 4(s-1), 1; 1, 4, t-1\}$, причем $t-2-4(s-1) = t-10 = 2$. Далее, неглавные собственные значения графа Ω равны -1 или являются корнями уравнения $x^2 + 2x - (t-5) = 0$. Противоречие с тем, что число $t-4 = 8$ не является квадратом целого числа.

В случае $p = 11$ имеем $s = 5, t = 17, 28, 39, 50, 61$ и Ω имеет массив пересечений $\{t-1, 16, 1; 1, 4, t-1\}$, причем $t-2-16 = 2$, противоречие.

В случае $p = 7$ имеем $s = 2, 9$ и Ω имеет массив пересечений $\{t-1, 4(s-1), 1; 1, 4, t-1\}$, причем $t-2-4(s-1) = 2$. В случае $s = 2$ имеем $t = 8$, а в случае $s = 9$ имеем $t = 36$. Далее, неглавные собственные значения графа Ω равны -1 или являются корнями уравнения $x^2 + 2x - (t-5) = 0$. Так как число $t-4$ является квадратом целого числа, то $t = 8$ и Ω является графом Тэйлора с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 4, 7\}$. Противоречие с тем, что окрестность вершины в Ω является сильно регулярным графом с параметрами $(7, 2, \lambda', 1)$.

В случае $p = 5$ имеем $s = 6, 11$ и Ω имеет массив пересечений $\{t-1, 4(s-1), 1; 1, 4, t-1\}$, причем $t-2-4(s-1) = 2$. В случае $s = 6$ имеем $t = 24$, а в случае $s = 11$ имеем $t = 44$. Далее, неглавные собственные значения графа Ω равны -1 или являются корнями уравнения $x^2 + 2x - (t-5) = 0$. Противоречие с тем, что число $t-4$ должно быть квадратом целого числа. \square

Лемма 5. *Если $p = 3$, Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе, то выполняются следующие утверждения:*

- (1) $st \leq 64$ и если $st = 64$, то $\alpha_1(g) = 0$ и либо $s = 16, t = 4, \alpha_2(g) = 960$, либо $s = 4, t = 16, \alpha_2(g) = 1024 - 256 = 768$;
- (2) если $s = 13$, то $t = 4, \alpha_1(g) = 48l - 36$ и $l \in \{1, 2, \dots, 6\}$;
- (3) если $s = 10$, то $t = 4, \alpha_1(g) = 48l - 24 = 24(2l - 1)$ и $l \in \{1, 2, \dots, 10\}$;
- (4) если $s = 7$, то либо $t = 4, \alpha_1(g) = 48l - 12$ и $l \in \{1, 2, \dots, 15\}$, либо $t = 7, \alpha_1(g) = 48l - 33$ и $l \in \{1, 2, \dots, 6\}$;
- (5) если $s = 4$, то либо $t = 4, \alpha_1(g) = 48l$ и $l \in \{1, 2, \dots, 20\}$, либо $t = 7, \alpha_1(g) = 48l + 12$ и $l \in \{1, 2, \dots, 13\}$, либо $t = 10, \alpha_1(g) = 48l - 12$ и $l \in \{1, 2, \dots, 8\}$, либо $t = 13, \alpha_1(g) = 48l - 36$ и $l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Доказательство. Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе.

Пусть $p = 3$. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$, $\lambda_\Omega = 2$ и $\mu_\Omega \in \{1, 4\}$.

Если $d(u, u^g) = 1$, то $|[u] \cap \Omega| \leq 1$, а если $d(u, u^g) = 2$, то $|[u] \cap \Omega| \leq 4$, причем в случае $|[u] \cap \Omega| \geq 2$ подграф $[u] \cap \Omega$ является кликой. Отсюда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $st(64 - t)$, но не больше $\alpha_1(g) + 4\alpha_2(g)$. В частности, $st(64 - t) \leq 64(64 - t)$, поэтому $st \leq 64$.

Пусть $\alpha_2(g) = 16(64 - t)$. Тогда число $\chi_1(g) = (9st - 8t)/16 - 4$ делится на 3 и $t(9s - 8) = 16(3l + 1)$. Если $s = 2, t = 32$, то $20 = 3l + 1$, противоречие. Если $s = 4, t = 16$, то $28 = 3l + 1$ и $l = 9$. Если $s = 8, t = 8$, то $32 = 3l + 1$, противоречие. Если $s = 16, t = 4$, то $34 = 3l + 1$ и $l = 11$.

Напомним, что $\alpha_1(g) = 16(64 - t) - \alpha_2(g)$.

Пусть $s = 13$. Тогда $t = 4$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $52 \cdot 60$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $720 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (372 + \alpha_1(g))/16$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l - 36$ и $l \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

Пусть $s = 10$. Тогда $t = 4$ и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $40 \cdot 60$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $1440 \leq 3\alpha_2(g)$ и $480 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (264 + \alpha_1(g))/16$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l - 24 = 24(2l - 1)$ и $l \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Пусть $s = 7$. Тогда $t = 4, 7$. В случае $t = 7$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $49 \cdot 57$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $3357 \leq 3\alpha_2(g)$ и $627 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (7(119 - 9) + 2\alpha_1(g))/32 - 4 = (55 \cdot 7 + \alpha_1(g))/16 - 4$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l - 33$ и $l \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

В случае $t = 4$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $28 \cdot 60$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16(105 - 64) + 64 = 720 \leq 3\alpha_2(g)$ и $240 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 28 + 2\alpha_1(g) - 36)/32 - 4 = (1714 - 82 + \alpha_1(g))/16$, поэтому $\alpha_1(g) = 48l - 12$ и $l \in \{1, 2, \dots, 15\}$.

Пусть $s = 4$. Тогда $t = 4, 7, 10, 13$. В случае $t = 13$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $52 \cdot 51$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $36 \cdot 17 \leq \alpha_2(g)$ и $612 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (276 + \alpha_1(g))/16$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l - 36$ и $l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

В случае $t = 10$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $40 \cdot 54$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16 \cdot 27 \leq \alpha_2(g)$ и $432 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (156 + \alpha_1(g))/16$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l - 12$ и $l \in \{1, 2, \dots, 8\}$.

В случае $t = 7$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $28 \cdot 57$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $228 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (132 + \alpha_1(g))/16$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l + 12$ и $l \in \{1, 2, \dots, 13\}$.

В случае $t = 4$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $16 \cdot 60$, но не больше $(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16(t - 4) \leq 3\alpha_2(g)$ и $0 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (48 + \alpha_1(g))/16$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 48l$ и $l \in \{1, 2, \dots, 20\}$. \square

Лемма 6. Если $p = 2$, Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе, то выполняются следующие утверждения:

(1) $st \leq 64$, число $\chi_1(g) = (9st - 8t)/16 - 4$ четно и $t(9s - 8) = 32l$, если $st = 64$, то $s = 4, t = 16$ и $l = 14m$, или $s = 8, t = 8$ и $l = 16m$, или $s = 16, t = 4$ и $l = 17m$;

(2) если $s = 14$, то либо $t = 4$, то $\alpha_1(g) = 32l + 4$ и $l \in \{1, 2, \dots, 7\}$, либо $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l - 10$ и $l \in \{1, 2, \dots, 28\}$;

- (3) если $s = 12$, то либо $t = 4$, $\alpha_1(g) = 32l - 16$ $u l \in \{1, 2, \dots, 15\}$, либо $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l - 8$ $u l \in \{1, 2, \dots, 31\}$;
- (4) если $s = 10$, то либо $t = 6$, $\alpha_1(g) = 32l - 12$ $u l \in \{1, 2, \dots, 4\}$, либо $t = 4$, $\alpha_1(g) = 32l - 8$ $u l \in \{1, 2, \dots, 15\}$, либо $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l - 4$ $u l \in \{1, 2, \dots, 31\}$;
- (5) если $s = 8$, то либо $t = 6$, $\alpha_1(g) = 32l$ $u l \in \{1, 2, \dots, 14\}$, либо $t = 4$, $\alpha_1(g) = 32l$ $u l \in \{1, 2, \dots, 30\}$, либо $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l$ $u l \in \{1, 2, \dots, 31\}$;
- (6) если $s = 6$, то либо $t = 8$, $\alpha_1(g) = 32l - 16$ $u l \in \{1, 2, \dots, 12\}$, либо $t = 6$, $\alpha_1(g) = 32l - 20$ $u l \in \{1, 2, \dots, 26\}$, либо $t = 4$, $\alpha_1(g) = 32l - 24$ $u l \in \{1, 2, \dots, 30\}$, либо $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l - 28$ $u l \in \{1, 2, \dots, 31\}$;
- (7) если $s = 4$, то либо $t = 12$, $\alpha_1(g) = 32l - 16$ $u l \in \{1, 2, \dots, 13\}$, либо $t = 10$, $\alpha_1(g) = 32l - 24$ $u l \in \{1, 2, \dots, 25\}$, либо $t = 8$, $\alpha_1(g) = 32l$ $u l \in \{1, 2, \dots, 28\}$, либо $t = 6$, $\alpha_1(g) = 32l - 20$ $u l \in \{1, 2, \dots, 29\}$, либо $t = 4$, $\alpha_1(g) = 32l - 16$ $u l \in \{1, 2, \dots, 30\}$, либо $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l - 24$ $u l \in \{1, 2, \dots, 64\}$;
- (8) если $s = 2$, то либо $t = 6$, $\alpha_1(g) = 32l - 28$ $u l \in \{1, 2, \dots, 29\}$, либо $t = 4$, $\alpha_1(g) = 32l - 8$ $u l \in \{1, 2, \dots, 30\}$, либо $t = 2$, $\alpha_1(g) = 32l - 20$ $u l \in \{1, 2, \dots, 31\}$.

Доказательство. Пусть Ω не является кликой и не содержится в антиподальном классе.

Пусть $p = 2$. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$, $\lambda_\Omega = 0, 2$ и $\mu_\Omega \in \{0, 2, 4\}$.

Если $d(u, u^g) = 1$, то $|[u] \cap \Omega| \in \{0, 2\}$, а если $d(u, u^g) = 2$, то $|[u] \cap \Omega| \in \{0, 2, 4\}$. Отсюда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $st(64 - t)$, но не больше $2\alpha_1(g) + 4\alpha_2(g)$. В частности, $st(64 - t) \leq 64(64 - t)$, поэтому $st \leq 64$.

Если $st = 64$, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 4 вершинами из Ω , поэтому $\alpha_2(g) = 1024 - 16t$. Отсюда число $\chi_1(g) = (9st - 8t)/16 - 4$ четно и $t(9s - 8) = 32l$. Если $s = 2, t = 32$, то $l = 10$. В этом случае Ω получается из полного двудольного графа $K_{32,32}$ удалением максимального парасочетания. Число ребер в Ω равно $32 \cdot 31$, каждое ребро из Ω смежно с единственной парой вершин вида $\{u, u^g\}$. Число таких пар равно $32 \cdot 8$, причем каждая такая пара смежна с единственным ребром, двумя изолированными ребрами или четырехугольником из Ω . Пусть имеется x пустых графов, y ребер, z изолированных ребер и w четырехугольников, смежных с парами вершин вида $\{u, u^g\}$. Тогда $x + y + z + w = 32 \cdot 8$, $y + 2z + 4w = 31 \cdot 32$, поэтому $x = y = z = 0$ и $w = 32 \cdot 8$. Противоречие с тем, что для вершин $a, a^* \in \Omega$ с $d_\Omega(a, a^*) = 3$ подграф $[a] \cap [a^*]$ содержит две пары вершин $\{u, u^g\}, \{w, w^g\}$.

Если $s = 4, t = 16$, то $l = 14m$. Если $s = 8, t = 8$, то $l = 16m$, а если $s = 16, t = 4$, то $l = 17m$.

Пусть $s = 14$. Тогда $t = 2, 4$. Если $t = 4$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $56 \cdot 60$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(105 - 64) + 32t = 1440 \leq 2\alpha_2(g)$ и $720 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (1756 + 2\alpha_1(g))/32 - 4 = (412 + \alpha_1(g))/16$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l + 4$ и $l \in \{1, 2, \dots, 7\}$.

В случае $t = 2$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $28 \cdot 62$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $0 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 14 + \alpha_1(g) - 2)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 10$ и $l \in \{1, 2, \dots, 28\}$.

Пусть $s = 12$. Тогда $t = 2, 4$. Если $t = 4$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $48 \cdot 60$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(90 - 64) + 32t = 960 \leq 2\alpha_2(g)$ и $480 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 24 + \alpha_1(g) - 8)/16 - 4 = (400 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 16$ и $l \in \{1, 2, \dots, 15\}$.

В случае $t = 2$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $24 \cdot 62$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16(93 - 128 + 4) \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 12 + \alpha_1(g) - 4)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 8$ и $l \in \{1, 2, \dots, 31\}$.

Пусть $s = 10$. Тогда $t = 2, 4, 6$. Если $t = 6$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $60 \cdot 58$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $8 \cdot 203 \leq 2\alpha_2(g)$ и $812 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 30 + \alpha_1(g) - 18)/16 - 4 = (492 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 12$ и $l \in \{1, 2, \dots, 4\}$.

В случае $t = 4$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $40 \cdot 60$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(75 - 64 + 4) = 480 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 20 + \alpha_1(g) - 12)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 8$ и $l \in \{1, 2, \dots, 15\}$.

В случае $t = 2$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $20 \cdot 62$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $8(155 - 256 + 8) \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 10 + \alpha_1(g) - 6)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 4$ и $l \in \{1, 2, \dots, 31\}$.

Пусть $s = 8$. Тогда $t = 2, 4, 6$. Если $t = 6$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $48 \cdot 58$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(87 - 64 + 6) \leq 2\alpha_2(g)$ и $464 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 24 + \alpha_1(g) - 24)/16 - 4 = (384 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l$ и $l \in \{1, 2, \dots, 14\}$.

В случае $t = 4$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $32 \cdot 60$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(60 - 64 + 4) = 0 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 16 + \alpha_1(g) - 16)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l$ и $l \in \{1, 2, \dots, 30\}$.

В случае $t = 2$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $16 \cdot 62$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(31 - 64 + 2) \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 8 + \alpha_1(g) - 8)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l$ и $l \in \{1, 2, \dots, 31\}$.

Пусть $s = 6$. Тогда $t = 2, 4, 6, 8, 10$. Если $t = 10$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $60 \cdot 54$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $8(405 - 256 + 40) \leq 2\alpha_2(g)$ и $756 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 30 + \alpha_1(g) - 50)/16 - 4 = (460 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 12$ и $640 + 32l - 12 + 756 \leq 1024$, противоречие.

В случае $t = 8$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $48 \cdot 56$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(84 - 64 + 8) \leq 2\alpha_2(g)$ и $512 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 24 + \alpha_1(g) - 40)/16 - 4 = (368 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 16$ и $l \in \{1, 2, \dots, 12\}$.

В случае $t = 6$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $36 \cdot 58$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $8(261 - 256 + 24) \leq 2\alpha_2(g)$ и $116 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 18 + \alpha_1(g) - 30)/16 - 4 = (276 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 20$ и $l \in \{1, 2, \dots, 26\}$.

В случае $t = 4$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $24 \cdot 60$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(45 - 64 + 4) \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 12 + \alpha_1(g) - 20)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 24$ и $l \in \{1, 2, \dots, 30\}$.

В случае $t = 2$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $12 \cdot 62$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $8(93 - 256 + 8) \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 6 + \alpha_1(g) - 10)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 28$ и $l \in \{1, 2, \dots, 31\}$.

Пусть $s = 4$. Тогда $t = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$. Положим $\{a, a', a''\} = F \cap \Omega$. Тогда для $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит a , не более двух вершин из $[a]$ и не более четырех вершин из $[a']$, $[a'']$, поэтому $t - 1 \leq 11$.

В случае $t = 12$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $48 \cdot 52$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(78 - 64 + 12) \leq 2\alpha_2(g)$ и $416 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 24 + \alpha_1(g) - 72)/16 - 4 = (336 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 16$ и $l \in \{1, 2, \dots, 13\}$.

В случае $t = 10$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $40 \cdot 54$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16(135 - 128 + 20) \leq 2\alpha_2(g)$ и $64 \leq \alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 20 + \alpha_1(g) - 60)/16 - 4 = (280 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 24$ и $l \in \{1, 2, \dots, 25\}$.

В случае $t = 8$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $32 \cdot 56$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(56 - 64 + 8) \leq 2\alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 16 + \alpha_1(g) - 48)/16 - 4 = (224 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l$ и $l \in \{1, 2, \dots, 28\}$.

В случае $t = 6$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $24 \cdot 58$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16(87 - 128 + 12) \leq 2\alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 12 + \alpha_1(g) - 36)/16 - 4 = (180 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 20$ и $l \in \{1, 2, \dots, 29\}$.

В случае $t = 4$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $16 \cdot 60$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $32(30 - 64 + 4) \leq 2\alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 8 + \alpha_1(g) - 24)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 16$ и $l \in \{1, 2, \dots, 30\}$.

В случае $t = 2$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $8 \cdot 62$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $16(31 - 128 + 4) \leq 2\alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 4 + \alpha_1(g) - 12)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 24$ и $l \in \{1, 2, \dots, 64\}$.

Пусть $s = 2$. Тогда $t = 2, 4, \dots, 30$.

Положим $\{a, a^*\} = F \cap \Omega$. Тогда для $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит a , не более двух вершин из $[a]$ и не более четырех вершин из $[a]$, поэтому $t - 1 \leq 7$.

Если $t = 8$, то Ω является графом Тэйлора с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 4, 7\}$, противоречие.

В случае $t = 6$ число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $12 \cdot 58$, но не больше $2(16(64 - t) - \alpha_2(g)) + 4\alpha_2(g)$. Отсюда $8(87 - 128 + 24) \leq 2\alpha_2(g)$. Далее, число $\chi_1(g) = (17 \cdot 6 + \alpha_1(g) - 42)/16 - 4 = (60 + \alpha_1(g))/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 28$ и $l \in \{1, 2, \dots, 29\}$.

В случае $t = 4$ число $\chi_1(g) = (17 \cdot 4 + \alpha_1(g) - 28)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 8$ и $l \in \{1, 2, \dots, 30\}$.

В случае $t = 2$ число $\chi_1(g) = (17 \cdot 2 + \alpha_1(g) - 14)/16 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 32l - 20$ и $l \in \{1, 2, \dots, 31\}$.

Лемма доказана. □

Из лемм 3–5 следует теорема. Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$ и $G = \text{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 7. Пусть f — элемент порядка 7 из G , g — элементов простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда верно одно из утверждений:

(1) $p = 3$, либо Ω является 1-кликкой, $|\text{Fix}(f)| = 16$ и $\alpha_1(g) = 21(16t + 3)$, $t \leq 2$, либо Ω содержится в антиподальном классе, $|\text{Fix}(f)| = 2$ и $|\Omega| = 16$ или $|\text{Fix}(f)| = 9$ и $|\text{Fix}(f) \cap \Omega| \in \{0, 3, 6, 9\}$, или $|\text{Fix}(f)| = 16$ и $|\Omega| \in \{7, 16\}$, далее, $\alpha_1(g) = 48r + 24 - 9s$ делится на 7, $s = 7$, $r = 7t + 3$, или $s = 10$, $r = 7t + 4$, или $s = 13$, $r = 7t + 5$, или $s = 16$, $r = 7t + 6$;

(2) $p = 2$, либо Ω — пустой граф, $\alpha_3(g) = 16l$, $l-1$ делится на 7, $\alpha_1(g) = 10l + 32t$ делится на 7 и $t = 7n + 1$, либо Ω содержит s вершин в 8 антиподальных

классов, $s = 8$, число $\alpha_2(g) = v - 16t$ делится на 7, $t \in \{1, 8, \dots, 64\}$ или $s = 6$, $\alpha_1(g) = 32l - 16$ делится на 7 и $l \in \{4, 11\}$ или $s = 4$, $\alpha_1(g) = 32l$ делится на 7 и $l \in \{7, 14, 21, 28\}$.

Доказательство. По теореме $\text{Fix}(f)$ содержится в антиподальном классе, $|\text{Fix}(f)| = 2, 9, 16$ и $\alpha_1(f) = 112l - 24 - 9s$.

Пусть g — элементов простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$, $\Omega = \text{Fix}(g)$. Если $p = 5$, то ввиду теоремы Ω является 4-кликкой, попадающей в $\text{Fix}(f)$, противоречие.

Если $p = 3$, то ввиду теоремы либо Ω является 1-кликкой, либо Ω содержится в антиподальном классе, $|\Omega| = s = 4, 7, 10, 13, 16$, $\alpha_1(g) = 48r + 24 - 9s$, либо Ω содержит s вершин в t антиподальных классах. В первом случае $|\text{Fix}(f)| = 16$ (так как 3 делит $|\text{Fix}(f)| - 1$), $\alpha_1(f) = 112l - 24 - 9s$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 48r + 15$ делится на 7, поэтому $r = 7m + 1$, $\alpha_1(g) = 21(16m + 3)$, $m \leq 2$.

Во втором случае либо $|\text{Fix}(f)| = 2$ и $|\Omega| = 16$ либо $|\text{Fix}(f)| = 9$ и $|\text{Fix}(f) \cap \Omega| \in \{0, 3, 6, 9\}$, либо $|\text{Fix}(f)| = 16$ и $|\Omega| \in \{7, 16\}$. Так как $\alpha_1(g) = 48r + 24 - 9s$ делится на 7, то либо $s = 7$, $2r + 1$ делится на 7, либо $s = 10$, $6(8r - 11)$ делится на 7 и $r = 7m + 4$, либо $s = 13$, $48r - 93 = 3(16r - 31)$ делится на 7 и $r = 7m + 5$, либо $s = 16$, $48r - 120 = 24(2r - 5)$ делится на 7 и $r = 7m + 6$.

Пусть Ω содержит s вершин в t антиподальных классах, $s, t > 1$. Тогда $t - 1$ делится на 7, поэтому $s = t = 8$ и противоречие с теоремой 1.

Пусть $p = 2$. Как и выше, Ω не является n -кликкой. Ввиду теоремы либо Ω — пустой граф, $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 10l + 32m$ и $\alpha_2(g) = 1024 - 26l - 32m$, либо Ω содержит s вершин в t антиподальных классах, $s, t > 1$. В первом случае $|\text{Fix}(f)| \in \{2, 16\}$ (так как 2 делит $|\text{Fix}(f)|$), $\alpha_3(g) = 16l$ и $l - 1$ делится на 7. Далее, $\alpha_1(g) = 10l + 32m$ делится на 7, $32m + 10$ делится на 7 и $m = 7n + 1$.

Пусть Ω содержит s вершин в t антиподальных классах, $s, t > 1$. Тогда числа $t - 1$ и $v - 16t = 16(64 - t)$ делятся на 7. Ввиду леммы 5 имеем $t = 8$ и $s \in \{4, 6, 8\}$. Отсюда $\text{Fix}(f)$ содержит s вершин из Ω и $|\text{Fix}(f)| = 16$.

В случае $s = 8$ число $\alpha_2(g) = v - 16t$ делится на 7.

В случае $s = 6$ по лемме 5 имеем $\alpha_1(g) = 32l - 16$ делится на 7 и $l \in \{4, 11\}$

В случае $s = 4$ по лемме 5 имеем $\alpha_1(g) = 32l$ делится на 7 и $l \in \{7, 14, 21, 28\}$. \square

Приступим к доказательству следствия. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$ и группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин. Пусть F — антиподальный класс графа Γ , содержащий вершину a . Тогда $|G : G_a| = 1024$ и $|G : G_{\{F\}}| = 64$.

Допустим, что G — неразрешимая группа. Пусть \bar{T} — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, $Q = O_2(G)$, Σ — множество отличных от F антиподальных классов и f — элемент порядка 7 из G .

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) \bar{T} — простая неабелева группа, изоморфная $A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, PSp_4(3), L_2(7), L_2(8), U_3(3), L_3(4), U_4(3), Sp_6(2)$;

(2) либо \bar{T} стабилизирует F и $\bar{T} \cong L_2(7), U_3(3)$, в случае $\bar{T} \cong L_2(7)$ имеем $|F^Q| = 64$, либо $\bar{T} \cong A_8$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_7$ — подгруппа индекса 8 из \bar{T} , либо \bar{T} не стабилизирует F , $\bar{T} \cong L_2(7)$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong Z_7.Z_3$ — подгруппа индекса 8 из \bar{T} ;

(3) если \bar{T} стабилизирует F и $\bar{T} \cong L_2(7)$, то $S(G) = Q$, длины \bar{T} -орбит на F равны $(8, 8)$, $|Q_{\{F\}} : Q_a| = 2$, $C_Q(f) \cap Q_{\{F\}} = \langle g \rangle$, $[Q_{\{F\}}, f] = Q_a$, подграф

Ω является пустым, $\alpha_3(g) = 128$, $\alpha_1(g) = 112(1 + 2n)$, $n \leq 3$, g фиксирует точно 8 антиподальных классов и $|Q_{\{F\}}| \in \{2^4, 2^7\}$;

(4) если \bar{T} стабилизирует F и $\bar{T} \cong U_3(3)$, то Γ является реберно симметричным графом, группа G является расширением элементарной абелевой 2-группы Q порядка 2^{10} с помощью $G_2(2)$ и Q содержит подгруппу K порядка 2^4 , регулярную на каждом антиподальном классе.

Доказательство. Ввиду теоремы $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$, 25 и 49 не делят $|G|$, а по лемме 6 в G нет элементов порядка 35. Отсюда \bar{T} — простая неабелева группа.

Ввиду [10, таблица 1] группа \bar{T} изоморфна $A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, PSp_4(3), L_2(7), L_2(8), U_3(3), L_3(4), U_4(3), Sp_6(2)$.

Так как $|\bar{T} : \bar{T}_{\{F\}}|$ делит 64, то либо \bar{T} стабилизирует F , либо $\bar{T} \cong A_8, \bar{T}_{\{F\}} \cong A_7$, либо $\bar{T} \cong L_2(7), \bar{T}_{\{F\}} \cong Z_7.Z_3$.

Если \bar{T} стабилизирует F , то ввиду теоремы, 5 не делит $|\bar{T}|$ и $\bar{T} \cong L_2(7), L_2(8), U_3(3)$. В случае $\bar{T} \cong L_2(7)$ длины \bar{T} -орбит на F равны 1, 7 или 8, длины \bar{T} -орбит на множестве Σ равны 7. В этом случае для элемента f порядка 3 из полного прообраза группы \bar{T} имеем $t = 10$ и $s = 4$, поэтому длины \bar{T} -орбит на F равны (1,1,7,7), (1,7,8) или (8,8). Из транзитивности действия G на множестве вершин графа следует, что длины \bar{T} -орбит на F равны (8,8).

Далее, длины \bar{T} -орбит на множестве Σ либо все равны 7, либо все равны 21. С другой стороны, группа \bar{T} действует на множестве F^Q и $|F^Q| = 2^n$, где $2^n - 1$ совпадает с суммой чисел, равных 7 или 21. Отсюда $2^n = 8$ или $2^n = 64$. Так как $|\bar{G} : \bar{T}| \leq 2$, то $2^n = 64$. Допустим, что $Q_{\{F\}} = 1$. Тогда $S(G) = Q, \bar{G} \cong PGL_2(7)$ и элемент из $G - G'$ переставляет неприводимые $F_2L_2(7)$ -модули порядка 2^3 . Компьютерные вычисления в GAP показывают, что граф не существует.

Пусть $Q_{\{F\}} \neq 1$. Тогда $Q_{\{F\}}$ фиксирует еще один антиподальный класс E , причем $|\{E^{f^i} \mid i \in \{0, 1, \dots, 6\}\}| = 7$ и любая инволюция из $Q_{\{F\}}$ фиксирует не менее 8 антиподальных классов. Ввиду теоремы инволюция g из $Q_{\{F\}}$ фиксирует либо не более 16 антиподальных классов, либо каждый антиподальный класс. В последнем случае $\alpha_3(g) = 1024$, граф Γ' на множестве $\langle g \rangle$ -орбит является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{63, (r' - 1)\mu', 1; 1, \mu', 63\}$, где $r' = 8, 2 \leq \lambda' \leq 4$ и $4 \leq \mu' \leq 8$. Противоречие с тем, что $\lambda' = 62 - 7\mu'$.

Так как длины \bar{T} -орбит на F равны (8,8), то либо $|Q_{\{F\}} : Q_a| = 1$ и $\bar{G} \cong PGL_2(7)$, либо $|Q_{\{F\}} : Q_a| = 2$. В первом случае $Q_{\{F\}}$ фиксирует каждую вершину из F и по теореме любая инволюция из $Q_{\{F\}}$ фиксирует ровно 4 антиподальных класса, противоречие с утверждением из предыдущего абзаца. Во втором случае элемент $g \in Q_{\{F\}} - Q_a$ переставляет указанные \bar{T} -орбиты на F , и можно выбрать элемент g , централизующий f . По лемме 6 подграф Ω является пустым, $\alpha_3(g) = 16l$, $l - 1$ делится на 7, $\alpha_1(g) = 10l + 32(7n + 1)$. С другой стороны, $l \in \{8, 16\}$, поэтому $l = 8, \alpha_3(g) = 128, \alpha_1(g) = 112(1 + 2n), n \leq 3$.

Далее, $Q_{\{F\}} = [Q_{\{F\}}, f] \times (C_Q(f) \cap Q_{\{F\}})$, подгруппа $C_Q(f) \cap Q_{\{F\}}$ действует на множестве из восьми $\langle f \rangle$ -орбит на $\Sigma - (F \cup \{E^{f^i} \mid i \in \{0, 1, \dots, 6\})$. Если инволюция $y \in C_Q(f) \cap Q_{\{F\}}$ фиксирует одну из этих орбит, то она фиксирует антиподальный класс из этой орбиты и еще одну орбиту, противоречие с тем, что y фиксирует не более 16 антиподальных классов. Таким образом, $C_Q(f) \cap Q_{\{F\}}$ состоит из инволюций y , фиксирующих ровно 8 антиподальных классов. Но тогда по теореме y фиксирует e вершин из $F, e \in \{0, 4, 6, 8\}$. Из действия f

на $\text{Fix}(y) \cap F$ следует, что $e = 0$. Так как $|Q_{\{F\}} : Q_a| = 2$, то $C_Q(f) \cap Q_{\{F\}} = \langle g \rangle$, $[Q_{\{F\}}, f] = Q_a$.

Если $|Q_a| = 1$, то $Q_{\{F\}} = Q_{\{E\}} = \langle g \rangle$. Противоречие с тем, что $8 = |g^Q| = |Q_{\{F\}}^Q| = 64$. Если же $|Q_a| > 8$, то $|Q_a| = 64$, $S(G) = Q$, и для антиподального класса N_j , не попавшего в $F \cup \{E^{f^i} \mid i \in \{0, 1, \dots, 6\}\}$, получим $Q_{\{F\}} \cap Q_{\{N_j\}} = \langle y_j \rangle$, $y_j = gz_j$, $z_j \in Q_a$, y_j фиксирует 16 антиподальных классов, $j \in \{0, 1, \dots, 6\}$.

В случае $\bar{T} \cong L_2(8)$ длины \bar{T} -орбит на F равны 1 или 9, длины \bar{T} -орбит на множестве Σ равны 28 со стабилизатором точки, изоморфным диэдральной группе порядка 18, противоречие с тем, что 63 не делится на 18.

В случае $\bar{T} \cong U_3(3)$ длины \bar{T} -орбит на F равны 1. Далее, длины \bar{T} -орбит на множестве антиподальных классов, отличных от F , равны 28, 36 или 63 со стабилизатором точки, изоморфным расширению неабелевой группы порядка 27 с помощью Z_8 , $L_2(7)$ или группе порядка 96. Отсюда \bar{T} действует транзитивно на множестве Σ и G действует дважды транзитивно на на множестве антиподальных классов. По [11, теорема] граф существует, группа G является расширением элементарной абелевой 2-группы Q порядка 2^{10} с помощью $G_2(2)$ и Q содержит подгруппу K порядка 2^4 , регулярную на каждом антиподальном классе. Лемма доказана. \square

Лемма 9. *Если \bar{T} не стабилизирует F , то $\bar{T} \cong L_2(7)$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong Z_7 \cdot Z_3$ – подгруппа индекса 8 из \bar{T} , $|F^Q| = 8$, $S(G) = Q$ и Q является неприводимым $F_2L_2(7)$ -модулем порядка 2^8 .*

Доказательство. Допустим сначала, что $\bar{T} \cong A_8$ и $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_7$. Тогда длины $\bar{T}_{\{F\}}$ -орбит на множестве Σ отличных от F антиподальных классов либо все равны 7, либо все равны 42 (последний случай не возникает). С другой стороны, группа \bar{T} действует на множестве F^Q и $|F^Q| = 2^n$, где $2^n - 1$ совпадает с суммой чисел, равных 7, поэтому $2^n = 64$. Далее, элемент f порядка 5 из полного прообраза группы $\bar{T}_{\{F\}}$ фиксирует точно 4 вершины из Γ , три из которых попадают в $\cup_{g \in \bar{T}} F^g$, противоречие.

Допустим, что $\bar{T} \cong L_2(7)$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong Z_7 \cdot Z_3$ – подгруппа индекса 8 из \bar{T} . Тогда длины $\bar{T}_{\{F\}}$ -орбит на множестве Σ отличных от F антиподальных классов равны 7 или 21. С другой стороны, группа \bar{T} действует на множестве F^Q и $|F^Q| = 2^n$, где $2^n - 1$ совпадает с суммой чисел, равных 7 или 21. Отсюда $2^n = 8$, подгруппа $Q_{\{F\}}$ нормальна в Q и $Q/Q_{\{F\}}$ – элементарная абелева группа порядка 8. Отсюда подгруппа Фраттини $\Phi(Q)$ фиксирует каждый антиподальный класс и ввиду теоремы $\Phi(Q) = 1$.

Далее, $Q_{\{F\}}$ фиксирует еще один антиподальный класс E , причем $|\{E^{f^i} \mid i \in \{0, 1, \dots, 6\}\}| = 7$. Пусть N – антиподальный класс, не лежащий в $F \cup \{E^{f^i} \mid i \in \{0, 1, \dots, 6\}\}$. Ввиду теоремы $Q_{\{F\}} \cap Q_{\{N\}}$ фиксирует точно 16 антиподальных классов и $|Q : Q_{\{F\}} \cap Q_{\{N\}}| = 64$. Пусть M – антиподальный класс, не лежащий среди указанных 16 антиподальных классов. Тогда $Q_{\{M\}}$ не пересекает $Q_{\{F\}} \cap Q_{\{N\}}$ и $|Q| \leq 2^9$. Таким образом, либо Q является неприводимым $F_2L_2(7)$ -модулем порядка 2^8 , либо $|Q| = 2^9$ и каждый главный фактор группы G , лежащий в Q , имеет порядок 8. Отсюда, в частности, $S(G) = Q$.

Пусть Q_0 — нормальная в G подгруппа порядка 8. Тогда Q_0 содержится в $Q_{\{F\}}$ или не пересекает $Q_{\{F\}}$. Но в первом случае любая инволюция из Q_0 фиксирует каждый антиподальный класс, противоречие с теоремой. Во втором случае Q_0 действует транзитивно на множестве восьмерок антиподальных классов $\{\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_7\}$, имеющих одинаковые стабилизаторы в Q . Отсюда $G = Q_0 \cdot G_{\Sigma_0}$ и G_{Σ_0} накрывает \bar{T} , в частности, подгруппа $Q_{\{F\}}$ является \bar{T} -допустимой. Противоречие с тем, что тогда \bar{T} стабилизирует некоторый антиподальный класс из $\{E^{f^i} \mid i \in \{0, 1, \dots, 6\}\}$. Лемма доказана. \square

Компьютерные вычисления в GAP показывают, что граф из заключения леммы 8 не существует. Из лемм 7, 8 получаем следствие.

Авторы благодарны Д.В. Падучих за помощь в компьютерных вычислениях с помощью GAP.

REFERENCES

- [1] A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *On distance-regular graphs with $\lambda = 2$* , Journal of Siberian Federal Univ., **7:2** (2014), 188–194.
- [2] A.A. Makhnev, L.Yu. Tsiovkina, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$* , Doklady Akademii nauk, **441:3** (2011), 305–309. MR2953997
- [3] L.Yu. Tsiovkina, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$* , Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 689–698. MR3262317
- [4] V.P. Burichenko, A.A. Makhnev, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$* , Doklady Akademii nauk, **460:3** (2015), 255–259. MR3410052
- [5] A.A. Makhnev, V. I. Belousova, *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$* , Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 130–136. MR3506866
- [6] A.A. Makhnev, N.V. Chuksina, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$* , Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 802–809. MR3493745
- [7] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin: Springer-Verlag, 1989. MR1002568
- [8] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math Soc. Student Texts **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. MR1721031
- [9] A.L. Gavriljuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$* , Doklady Akademii nauk, **432:5** (2010), 583–587. MR2766516
- [10] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673
- [11] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, L.Yu. Tsiovkina, *Edge-symmetric distance-regular coverings of cliques: The affine case*, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, **54:6** (2013), 1353–1367. MR3184100

ALEXANDER ALEKSEEVICH MAKHNEV
 KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
 16 S.KOVALEVSKAYA STR.
 620990, YEKATERINBURG, RUSSIA,
 URAL FEDERAL UNIVERSITY
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

MICHAIL PETROVICH GOLUBYATHIKOV
 620990, YEKATERINBURG, RUSSIA,
 URAL FEDERAL UNIVERSITY
E-mail address: mike_ru1@mail.ru