S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1078–1087 (2017) УДК 514.772.35
DOI 10.17377/semi.2017.14.091 MSC 53Cxx

КАНОНИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОБЪЕМА ДЛЯ МНОГОГРАННИКОВ КОМБИНАТОРНОГО ТИПА ГЕКСАЭДРА

Д.И. САБИТОВ, И.Х. САБИТОВ

Abstract. We present an algorithm for the explicit construction of the canonical volume polynomials for polyhedra combinatorially isomorphic to a hexahedron and realize them in the case of some special values of edge lengths.

Keywords: hexaHedral-type polyhedra, volume, polynomial equation.

1. Введение и формулировка результата. В работах второго автора (см., например, [1], [2], [3]) было установлено, что для ориентируемых симплициальных многогранников существует аналог формулы Герона, позволяющий вычислять объем многогранника как корень некоторого многочлена

$$Q(V) = V^{2N} + a_1(l)V^{2N-2} + ... + a_{N-1}(l)V^2 + a_N(l),$$

в котором коэффициенты $a_i(l)$ в свою очередь являются многочленами от совокупности (l) квадратов длин ребер с числовыми коэффициентами, определяемыми только комбинаторным строением многогранника. Доказательство существования такого многочлена было по теории конструктивным, но вопрос о практическом нахождении его явного вида оставался трудным. Оказалось, что он имеет необыкновенно большое количество мономов; более того, предложенный в этих работах алгоритм его нахождения приводит к многочленам очень больших степеней, не все корни которых имеют какое-либо отношение к объемам разных конфигураций изометричных многогранников с одинаковым комбинаторным строением. Поэтому в работе [5] было введено понятие канонического многочлена объема, который по определению должен иметь наименьшую степень среди всех многочленов объема. В той же работе показано,

Sabitov D.I., Sabitov, I.Kh., Volume polynomial for polyhedra of hexaedral type.

Поступила 4 сентября 2017 г., опубликована 23 октября 2017 г.

что для гомеоморфных сфере многогранников такой многочлен существует, единственен, и, более того, он является делителем всех возможных многочленов объема (а общее определение *многочлена объема* дано в статье [4], $ 5). К настоящему времени канонические многочлены объема известны лишь для нескольких комбинаторных типов многогранников с малым числом вершин, и все они имеют общее свойство, которое выражается в том, что существуют такие наборы длин, когда *все* корни соответствующего канонического многочлена являются объемами реально существующих многогранников, так что степень их многочлена объема действительно понизить нельзя. В данной работе мы предложим алгоритм построения канонического многочлена объема для многогранников, которые комбинаторно изоморфны гексаэдру (т.е. шестиграннику с 4-х угольными гранями). Примерами таких многогранников являются обычный куб, любая 4-х гранная призма, усеченная 4-х угольная пирамида, причем в алгоритме ни для призм, ни для пирамид не требуется ни их какой-либо симметричности, ни их выпуклости, так же как необязательна и параллельность соответствующих граней. После изложения идеи алгоритма мы реализуем его в случае правильного куба со стороной длины a.[1]. Так как теорема о многочлене объема предполагает, что все грани многоугольника треугольные, то в случае гексаэдра мы должны предварительно триангулировать грани, и выбор способа триангуляции приводит к симплициальным многогранникам с разными комбинаторными строениями, и, соответственно, мы получаем для гексаэдра несколько канонических форм многочленов объема.

Теорема 1. *Существуют триангуляции гексаэдра, для которых канонические многочлены объема для многогранников комбинаторного типа гексаэдра с соответствующей триангуляцией являются многочленами степени 64 с коэффициентами, зависящими от квадратов длин ребер многогранника и тех его диагоналей, которые участвуют в выбранной триангуляции граней.*

Теорема 2. *Для триангуляций из теоремы 1 канонические полиномиальные уравнения для объемов многогранников, изометричных правильному кубу со стороной длины a и с соответствующей триангуляцией граней, имеют вид*

$$V^{28}(V-12a^3)(V+12a^3)(V-8a^3)^2(V+8a^3)^2(V-4a^3)^{15}(V+4a^3)^{15}=0 \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned}&V^{20}(V-12a^3)(V+12a^3)(V-8a^3)^2(V+8a^3)^2(V-4a^3)^{11}(V+4a^3)^{11}\times\\ &(V^2+8a^3V+48a^6)^2(V^2-8a^3V+48a^6)^2(V^2+32a^6)^4=0,\end{aligned} \tag{2}$$

где $V=12v$, а v – ориентированный объем куба

(напоминаем, что среди корней канонического полиномиального уравнения должны быть все возможные значения объемов, включая полученные и при изменении ориентации многогранника).

[1]В связи с этой задачей мы позволим себе привести следующее воспоминание: когда второй автор получил в 1996 г. свой результат о существовании многочлена объема для произвольного многогранника, тогдашний декан механико-математического факультета МГУ Олег Борисович Лупанов обратился к нему с вопросом "А как выглядит этот многочлен для куба?"Тогда мы не имели технической возможности реализовать теоретически известный алгоритм, а декан, по-видимому, ожидал, что поскольку формула для объема куба очень простая, то и многочлен должен быть простым.

Теорема 3. *Существуют триангуляции гексаэдра, для которых канонические многочлены объема для многогранников комбинаторного типа гексаэдра с соответствующей триангуляцией являются многочленами степени 32 с коэффициентами, зависящими от квадратов длин ребер многогранника и тех его диагоналей, которые участвуют в выбранной триангуляции граней. В случае многогранников, изометричных правильному кубу со стороной длины a и с соответствующей триангуляцией граней, канонический многочлен имеет вид*

$$V^8(V-12a^3)(V+12a^3)(V-8a^3)^4(V-4a^3)^7(V+4a^3)^7(V+8a^3)^4=0,$$

Теорема 4. *Не существует триангуляции граней гексаэдра, для которой многочлен объема имел бы степень меньше 32.*

2. Алгоритм и доказательство теоремы 1. Рассмотрим триангуляцию куба, проиллюстрированную рисунком 1. Так как многочлен для объема строится для многогранников с треугольными гранями, мы должны сначала провести триангуляцию поверхности гексаэдра. Для большей наглядности конструкции текст сопроводим иллюстрацией на кубе. Пусть дан куб (рис. 1) с длиной ребра a. Пусть каждая его грань триангулирована, как указано на рис. 1.

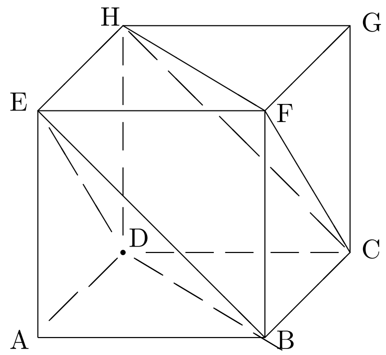

Рис.1

Тогда можем считать, что куб получен добавлением к октаэдру с вершинами $EDBCFH$ двух тетраэдров $ABED$ и $GCFH$. Чтобы представить себе этот октаэдр более наглядно, скажем, что его можно увидеть как подвеску с 4-х звенным экватором $EBCH$ и с вершинами F и D как полюсами. Объем куба можно считать как сумму объема октаэдра V_0 и объемов V_1 и V_2 двух тетраэдров, причем длины ребер этих трех многогранников или известны, или вычисляются как длины проведенных диагоналей граней, которые определяются внутренней геометрией многогранника и одинаковы для всех изометричных ему многогранников. Очевидно, такую конструкцию формально можно применить к любому многограннику с гексаэдральным комбинаторным строением, в том числе и без требования его выпуклости или даже вложенности.

Так как мы ищем способ найти объем уже любого симплициального многогранника, который можно построить на основе треугольных граней триангулированного куба (читай: гексаэдра), нужно учитывать, что новые многогранники можно построить и располагая упомянутые тетраэдры по-другому (например, один тетраэдр, который приложен к некоторой грани октаэдра, можно направить наружу, а второй, приложенный к противоположной грани октаэдра, можно направить внутрь), но для всех случаев мы имеем один и тот же алгоритм нахождения многочлена объема. Именно, объем v любого многогранника, полученного из октаэдра прибавлением тетраэдров в произвольном их расположении по отношению к октаэдру, удовлетворяет уравнению, учитывающему все возможные варианты их расположения:

$$(v-(V_0+V_1+V_2))(v-(V_0+V_1-V_2))(v-(V_0-V_1+V_2))(v-(V_0-V_1-V_2))=0 \tag{3}$$

или

$$(V-12(V_0+V_1+V_2))(V-12(V_0+V_1-V_2))(V-12(V_0-V_1+V_2))(V-12(V_0-V_1-V_2))=0,$$

где $V = 12v$ (выбор множителя 12 объясняется тем, что при таком его выборе многочлен относительно переменной V получается со старшим коэффициентом 1, а остальные коэффициенты принимают только целочисленные значения).

Производя умножения, получим полиномиальное уравнение для $12V_0$:

$$P(V_0) = (12V_0)^4 + b_1(12V_0)^3 + b_2(12V_0)^2 + b_3(12V_0) + b_4 = 0, \tag{4}$$

где

$$b_0 = 1, b_1 = -4V, b_2 = -2[(12V_1)^2+(12V_2)^2-3V^2], b_3 = 4V[(12V_1)^2+(12V_2)^2-V^2),$$
$$b_4 = V^4 + 2[(12V_1)^2+(12V_2)^2)V^2+[(12V_1)^2-(12V_2)^2]^2.$$

Так как квадраты объемов тетраэдров выражаются известной формулой Эйлера через квадраты длин их ребер, то коэффициенты уравнения (4) полиномиально зависят от квадратов длин ребер тетраэдров и от объема v многогранника, составленного из октаэдра и двух тетраэдров. С другой стороны, мы знаем по [6], что для объема $12V_0$ октаэдра есть каноническое уравнению вида

$$Q(V_0) = (12V_0)^{16} + a_2(l)(12V_0)^{14} + ... + a_{14}(l)(12V_0)^2 + a_{16}1 = 0, \tag{5}$$

где коэффициенты с нечетными номерами равны нулю, а с четными номерами являются в свою очередь многочленами с целыми коэффициентами от квадратов длин ребер октаэдра, совокупность которых обозначена символом l. Приравнивая нулю результант многочленов (4) и (5) относительно $12V_0$, получаем требуемое полиномиальное уравнение на объем V. Исследуем структуру этого уравнения. В нашем случае результант $R(Q, P)$ представляет собой определитель матрицы порядка 20x20, первые 4 строки которого составлены из коэффициентов уравнения (5), а 16 строк - из коэффициентов уравнения (4). Произведение диагональных элементов результанта дает выражение V^{64} - это старший член многочлена объема. Убедимся, что переменная V входит в многочлен только в четных степенях. Тут есть такая тонкость - в используемом нами сейчас методе вывода многочлена объема по ходу рассуждения встречается многочлен (4), в который переменная V входит и в нечетных степенях, и нам надо убедиться, что в итоговом многочлене нет нечетных степеней переменной[2].

[2]В работах второго автора доказывается, что в *построенном* им многочлене объема переменная V входит только в четных степенях, но отсюда не следует, что не существует многочлена объема, в котором переменная V встречалась бы в нечетной степени — например, многочлен объема можно умножить на любой другой многочлен, и тоже получится многочлен объема. А вот канонический многочлен объема должен обладать свойством четности относительно переменной V, но это формально еще не доказано, хотя представляется очевидным, что все степени должны быть четными, так как при изменении ориентации объемы изменяют знак, но должны оставаться корнями одного и того же уравнения.

Известно, что общий j-й член результанта имеет вид

$$A_j a_0^{\mu_0^{(j)}} a_1^{\mu_1^{(j)}} ... a_{16}^{\mu_{16}^{(j)}} b_0^{\nu_0^{(j)}} b_1^{\nu_1^{(j)}} b_2^{\nu_2^{(j)}} b_3^{\nu_3^{(j)}} b_4^{\nu_4^{(j)}}, \tag{6}$$

где A_j - некоторый целочисленный коэффициент, а показатели степеней коэффициентов удовлетворяют, в частности, уравнениям

$$\mu_0^{(j)} + \mu_1^{(j)} + ... + \mu_{16}^{(j)} = 4, \ \nu_0^{(j)} + \nu_1^{(j)} + ... + \nu_4^{(j)} = 16 \tag{7}$$

$$\mu_1^{(j)} + 2\mu_2^{(j)} + ... + 16\mu_{16}^{(j)} + \nu_1^{(j)} + 2\nu_2^{(j)} + 3\nu_3^{(j)} + 4\nu_4^{(j)} = 64. \tag{8}$$

Так как в многочлене (5) все коэффициенты с нечетными номерами равны нулю, то тот член (6) результанта, в котором встречается хотя бы один показатель μ_i с нечетным индексом, обязательно равен нулю. Значит, нам интересны только те равенства (9), в которых все μ_i четны, а тогда вся сумма $\mu_1^{(j)} + 2\mu_2^{(j)} + ... + 16\mu_{16}^{(j)}$ будет четной, вместе с ней четной будет и сумма $\nu_1^{(j)} + 2\nu_2^{(j)} + 3\nu_3^{(j)} + 4\nu_4^{(j)}$. Следовательно, сумма $\nu_1^{(j)} + \nu_3^{(j)}$ четная. А тогда суммарная степень переменной V в каждом ненулевом члене результанта будет четной, причем максимальная степень будет при $\mu_0 = \mu_1 = ... = \mu_{16} = \nu_0 = ... = \nu_3 = 0, \ \nu_4 = 16$, т.е. 64, что и требовалось установить конкретно в нашем случае.

Итак, для всех многогранников комбинаторного типа гексаэдра и с данной триангуляцией многочлен объема выписывается как результант многочленов (4) и (5). Мы утверждаем, что он является каноническим, т.е. имеет наименьшую возможную степень. Для рассматриваемого комбинаторного типа объем получен как алгебраическая сумма объема *произвольного* октаэдра и объемов двух тетрэдров. В общем случае (т.е. при произвольных значениях длин ребер) при данной ориентации объем октаэдра может иметь 8 различных значений. Два тетраэдра могут быть "пристроены"к двум противоположным граням октаэдра 4 способами - оба направлены "наружу"или внутрь, один - внутрь, другой - наружу, и с противоположным расположением. Значит, в общем случае при данной ориентации всего возможны 32 значений объема, а с учетом возможного изменения ориентации получается 64 значений объема или 32 значения для квадрата объема. Значит, ни один многочлен объема многогранников рассматриваемого комбинаторного типа не может иметь степень меньше 64. Один вариант теоремы 1 доказан.

Второй способ триангуляции, тоже приводящий к многочлену степени 64,

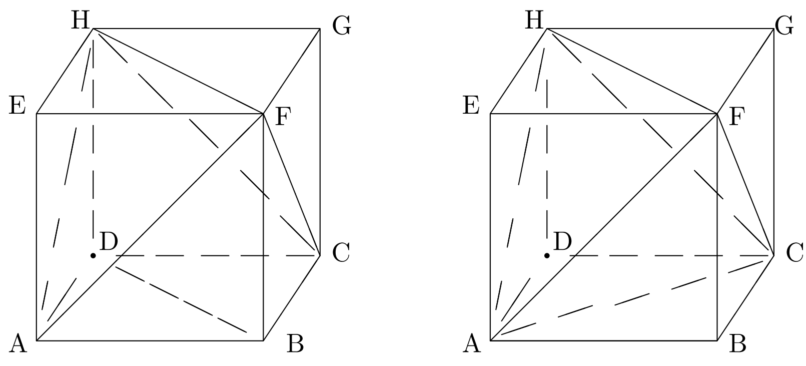

Рис.2a Рис.2b

показан на рис. 2а. Здесь отсекаются два тетраэдра $GHFC$ и $EFHA$ с вершинами E и G из одной грани, а нижняя грань $ABCD$ триангулируется проведением диагонали BD. Для оставшейся части гексаэдра в виде октаэдра (скажем, с экватором $HDBC$ и полюсами A и F) снова выписывается его многочлен объема, далее проводятся те же самые действия с результантом, и приходим тоже к некоторому уравнению степени 64. Теорема 1 доказана для двух триангуляций.

3. Пример и доказательство теоремы 2. Хотя мы и нашли краткое описание многочлена объема гексаэдра как результанта двух известных многочленов, практическое его вычисление весьма и весьма затруднительно, так как даже представление многочлена октаэдра в явном виде в общем случае до сих пор еще является незавершенной задачей. Однако, если в октаэдре есть большое количество ребер одинаковой длины, тогда удается получить более или менее обозримый результат. Например, такое бывает, если октаэдр обладает большой группой симметрии, см. работу [7]. В случае правильного куба с первой триангуляцией в октаэдре $EDBCFH$ ребра имеют всего две разные длины: a - длина ребра куба и $b = a\sqrt{2}$ - длина диагонали грани. По своей метрике этот октаэдр имеет метрику октаэдра Брикара 1-го типа, и, более того, допускает реализацию в виде октаэдра Брикара 1-го типа. Для этого случая многочлен объема известен, он имеет вид (см., напр., [6],[4], [7]):

$$(12V_0)^{16} - 64b^4(3a^2 - b^2)(12V_0)^{14} = 0, \tag{9}$$

а $(12V_1)^2$ и $(12V_2)^2$ равны $b^4(3a^2 - b^2)$. Вычисление результанта как определителя 20-го порядка, конечно, немыслимо без применения мощных компьютеров. Наши вычисления проводились на суперкомпьютере "Ломоносов"в ВЦ МГУ им. Ломоносова с использованием C++ библиотеки GiNaC. Ниже приведен полученный многочлен.

$$\mathbf{V^{64}} + 128(b^6 - 3b^4a^2)\mathbf{V^{62}} + 7168(b^{12} - 6b^{10}a^2 + 9b^8a^4)\mathbf{V^{60}} + 237056(b^{18} - 9b^{16}a^2 + 27b^{14}a^4 - 27b^{12}a^6)\mathbf{V^{58}} + 5248000(b^{24} - 12b^{22}a^2 + 54b^{20}a^4 - 108b^{18}a^6 + 81b^{16}a^8)\mathbf{V^{56}} + 83320832(b^{30} - 15b^{28}a^2 + 90b^{26}a^4 - 270b^{24}a^6 + 405b^{22}a^8 - 243b^{20}a^{10})\mathbf{V^{54}} + 989986816(b^{36} - 18b^{34}a^2 + 135b^{32}a^4 - 540b^{30}a^6 +$$

$$\begin{gathered}
1215b^{28}a^8-1458b^{26}a^{10}+729b^{24}a^{12})\mathbf{V^{52}}+9049604096(b^{42}-21b^{40}a^2+189b^{38}a^4-\\
945b^{36}a^6+2835b^{34}a^8-5103b^{32}a^{10}+5103b^{30}a^{12}-2187b^{28}a^{14})\mathbf{V^{50}}+\\
64795574272(b^{48}-24b^{46}a^2+252b^{44}a^4-1512b^{42}a^6+5670b^{40}a^8-\\
13608b^{38}a^{10}+20412b^{36}a^{12}-17496b^{34}a^{14}+6561b^{32}a^{16})\mathbf{V^{48}}+\\
367368601600(b^{54}-27b^{52}a^2+324b^{50}a^4-2268b^{48}a^6+10206b^{46}a^8-\\
30618b^{44}a^{10}+61236b^{42}a^{12}-78732b^{40}a^{14}+59049b^{38}a^{16}-19683b^{36}a^{18})\mathbf{V^{46}}+\\
1657807044608(b^{60}-30b^{58}a^2+405b^{56}a^4-3240b^{54}a^6+17010b^{52}a^8-\\
61236b^{50}a^{10}+153090b^{48}a^{12}-262440b^{46}a^{14}+295245b^{44}a^{16}-196830b^{42}a^{18}+\\
59049b^{40}a^{20})\mathbf{V^{44}}+5953797750784(b^{66}-33b^{64}a^2+495b^{62}a^4-4455b^{60}a^6+\\
26730b^{58}a^8-112266b^{56}a^{10}+336798b^{54}a^{12}-721710b^{52}a^{14}+1082565b^{50}a^{16}-\\
1082565b^{48}a^{18}+649539b^{46}a^{20}-177147b^{44}a^{22})\mathbf{V^{42}}+16922238255104(b^{72}-\\
36b^{70}a^2+594b^{68}a^4-5940b^{66}a^6+40095b^{64}a^8-192456b^{62}a^{10}+673596b^{60}a^{12}-\\
1732104b^{58}a^{14}+3247695b^{56}a^{16}-4330260b^{54}a^{18}+3897234b^{52}a^{20}-2125764b^{50}a^{22}+\\
531441b^{48}a^{24})\mathbf{V^{40}}+37607270514688(b^{78}-39b^{76}a^2+702b^{74}a^4-7722b^{72}a^6+\\
57915b^{70}a^8-312741b^{68}a^{10}+1250964b^{66}a^{12}-3752892b^{64}a^{14}+8444007b^{62}a^{16}-\\
14073345b^{60}a^{18}+16888014b^{58}a^{20}-13817466b^{56}a^{22}+6908733b^{54}a^{24}-\\
1594323b^{52}a^{26})\mathbf{V^{38}}+63995012710400(b^{84}-42b^{82}a^2+819b^{80}a^4-9828b^{78}a^6+\\
81081b^{76}a^8+486486b^{74}a^{10}+2189187b^{72}a^{12}-7505784b^{70}a^{14}+19702683b^{68}a^{16}-\\
39405366b^{66}a^{18}+59108049b^{64}a^{20}-64481508b^{62}a^{22}+48361131b^{60}a^{24}-\\
22320522b^{58}a^{26}+4782969b^{56}a^{28})\mathbf{V^{36}}+80547816669184(b^{90}-45b^{88}a^2+945b^{86}a^4-\\
12285b^{84}a^6+110565b^{82}a^8-729729b^{80}a^{10}+3648645b^{78}a^{12}-14073345b^{76}a^{14}+\\
42220035b^{74}a^{16}-98513415b^{72}a^{18}+177324147b^{70}a^{20}-241805655b^{68}a^{22}+\\
241805655b^{66}a^{24}-167403915b^{64}a^{26}+71744535b^{62}a^{28}-14348907b^{60}a^{30})\mathbf{V^{34}}+\\
70682276790272(b^{96}-48b^{94}a^2+1080b^{92}a^4-15120b^{90}a^6+147420b^{88}a^8-\\
1061424b^{86}a^{10}+5837832b^{84}a^{12}-25019280b^{82}a^{14}+84440070b^{80}a^{16}-\\
225173520b^{78}a^{18}+472864392b^{76}a^{20}-773778096b^{74}a^{22}+967222620b^{72}a^{24}-\\
892820880b^{70}a^{26}+573956280b^{68}a^{28}-229582512b^{66}a^{30}+43046721b^{64}a^{32})\mathbf{V^{32}}+\\
38620345925632(b^{102}-51b^{100}a^2+1224b^{98}a^4-18360b^{96}a^6+192780b^{94}a^8-\\
1503684b^{92}a^{10}+9022104b^{90}a^{12}-42532776b^{88}a^{14}+159497910b^{86}a^{16}-\\
478493730b^{84}a^{18}+1148384952b^{82}a^{20}-2192371272b^{80}a^{22}+3288556908b^{78}a^{24}-\\
3794488740b^{76}a^{26}+3252418920b^{74}a^{28}-1951451352b^{72}a^{30}+731794257b^{70}a^{32}-\\
129140163b^{68}a^{34})\mathbf{V^{30}}+9895604649984(b^{108}-54b^{106}a^2+1377b^{104}a^4-\\
22032b^{102}a^6+247860b^{100}a^8-2082024b^{98}a^{10}+13533156b^{96}a^{12}-69599088b^{94}a^{14}+\\
287096238b^{92}a^{16}-956987460b^{90}a^{18}+2583866142b^{88}a^{20}-5637526128b^{86}a^{22}+\\
9865670724b^{84}a^{24}-13660159464b^{82}a^{26}+14635885140b^{80}a^{28}-11708708112b^{78}a^{30}+\\
6586148313b^{76}a^{32}-2324522934b^{74}a^{34}+387420489b^{72}a^{36})\mathbf{V^{28}}=0.
\end{gathered}$$

Оказалось, что этот большой многочлен можно разложить на множители и получается довольно изящное уравнение

$$V^{28}(V^2-48a^2b^4+16b^6)^2(V^2-12a^2b^4+4b^6)^{15}(V^2-108a^2b^4+36b^6)=0,$$

которое при подстановке значения $b^2 = 2a^2$ принимает утверждаемый в теореме 1 вид (1).

Более интересным оказывается случай второй триангуляции (см. рис 2a). Полученный октаэдр имеет две взаимно ортогональные плоскости симметрии (диагональные сечения куба $HDBF$ и $ACGE$), у него есть экватор с равными противоположными сторонами, и два дельтавидных экватора $ABCH$ $ADCE$, но он, однако, не является октаэдром Брикара 2-го типа (у которого дельтавидные экваторы имеют равные длины сторон при полюсах, а у нашего октаэдра равные длины при вершинах экватора). Октаэдр с такой симметрией оказался обойденным в списке кристаллографических групп из [7], а на самом деле он там должен рассматриваться как частный случай октаэдров под номерами 24b), 25a) и 25b). Во всяком случае, ввиду наличия всего двух разных длин, удается найти явное выражение его многочлена объема. Он имеет такой вид:

$$V^5(V - 12a^2b^4 + 4b^6)(V + 4b^2a^4 - 8a^2b^4 + 4b^6)^2 \equiv V^8 + a_1V^7 + a_2V^6 + a_5V^5 = 0,$$

где $V = 36v^2, v$ - объем октаэдра (компьютерные вычисления первого автора подтверждены независимыми вычислениями С.Н. Михалева, которому мы, пользуясь случаем, выражаем нашу благодарность). Учитывая, что в случае куба $b^2 = 2a^2$, для рассматриваемого по общей теории результанта получаем утверждаемое в теореме 2 выражение (2). Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. В случае триангуляции на рис. 2b, после отсечения вершин G и E получается 5-гранная пирамида, которая распадается на три тетраэдра $DAH, BACF$ и $HACF$. Объемы обоих первых двух тетраэдров равны $\dfrac{a^3}{6}$, как и объемы тех тетраэдров, что отсекают вершины E и G, а объем третьего тетраэдра равен $\dfrac{a^3}{3}$. Значит, объемы всевозможных изометричных реализаций куба с рассматриваемой триангуляцией получаются из значений суммы

$$v = \varepsilon_1V_1 + \varepsilon_2V_2 + \varepsilon_3V_3 + \varepsilon_4V_4 + \varepsilon_5V_5$$

при всевозможных значениях $\varepsilon_i = \pm 1$. Многочлен объема не должен зависеть от ε_i. Исключение ε_i из такой суммы с n слагаемыми дает для v многочлен степени $2N = 2^n$, и его структура подробно рассмотрена в работе [8], что может оказаться полезным для общих гексаэдров. Однако в нашем случае 4 слагаемых равны по модулю и одно в два раза больше каждого их остальных. Учитывая это условие, легко подсчитать, что если нет $\varepsilon_i = -1$, тогда $V = 12v = 12a^3$, т.е. в разложении многочлена должна быть скобка $(V - 12a^3)$. Если есть только один $\varepsilon_i = -1$, тогда должны быть скобки $(V - 8a^3)^4(V - 4a^3)$ и т.д. Рассматривая все возможные случаи, приходим к выводу, что многочлен должен иметь указанный в теореме 3 вид. Теорема 3 доказана.

5. Доказательство теоремы 4. Для получения многочлена, зависящего только от метрики поверхности гексаэдра, мы обязательно должны как-то триангулировать его грани. Когда триангуляция сделана, то по определению алгебраического объема, мы должны искать сумму ориентированных объемов тетраэдров, с общей вершиной в какой-нибудь вершине гексаэдра и с основаниями на гранях гексаэдра. Так как из любой вершины гексаэдра видны его три грани, сходящиеся в этой вершине, то из полученных после триангуляции 12 треугольных граней 6 граней дадут тетраэдры с нулевым объемом. Значит, остаются 6 тетраэдров, причем, если мы не отсекли заранее одну вершину, то в формуле объема будет участвовать диагональ гексаэдра, что недопустимо, так как длина диагонали не является функцией метрики поверхности. Значит, мы обязательно должны сначала отсечь одну вершину, используя диагонали граней, а тогда остаются только уже рассмотренные варианты - или сумма объемов пяти тетраэдров, как в теореме 3, или отсекается еще одна вершина и остается случай теоремы 1, что и требовалось показать.

Заметим, что такой ответ можно было ожидать с самого начала, так как известно, что любая триангуляция телесного куба содержит только 5 или 6 тетраэдров.

6. О корнях и о порядке их кратности. Для полноты исследования разъясним по возможности геометрический смысл корней и их кратностей. Алгебраический объем октаэдра Брикара равен нулю, и для 1-го типа он входит в его многочлен объема с кратностью 14 (по-видимому, порядок кратности связан с размерностью линейного пространства бесконечно малых изгибаний этого октаэдра). Когда мы к этому октаэдру "пристраиваем"два равновеликих тетраэдра так, чтобы один тетраэдр увеличивал объем, а другой его уменьшал, то для этой конструкции есть два возможных варианта, таким образом кратность нулевого объема увеличится в два раза - это нам дает его кратность 28 (множитель V^{28}). Сам куб имеет два ориентированных объема $\pm a^3$ (т.е. $V = \pm 12a^3$), этим объемам соответствуют две скобки первой степени. Далее, ориентированный объем октаэдра $EDBCFH$ равен $\pm\dfrac{2}{3}a^3$, а два тетраэдра можно "пристроить"двумя способами так, чтобы суммарный объем октаэдра с этими тетраэдрами не изменился (направить один тетраэдр внутрь, а другой – вовне октаэдра), и таким образом построенный изометричный триангулированному кубу многогранник будет иметь объем $\pm\dfrac{2}{3}a^3$, т.е. с $V = \pm 8a^3$, и так как эти и положительно, и отрицательно ориентированные объемы получаются двумя способами, то это отражено в кратности 2 соответствующим этим объемам скобок. Объемы, соответствующие значениям $V = \pm 4a^3$, встречаются 15 раз: первый раз, когда оба тетраэдра направлены внутрь октаэдра и их объемы вычитаются из объема октаэдра, образуя многогранник с объемам $v = \pm\dfrac{1}{3}a^3$, второй раз, когда они "пристраиваются"одинаковым образом к октаэдру Брикара, имеющему нулевой объем, и образуют многогранник с $V = \pm 4a^3$, а нулевой объем октаэдра Брикара имеет кратность 14, что в сумме с первым случаем дает кратность 15. Таким образом, в действительности, не очень объясненным остается факт кратности 14 нулевого объема октаэдра Брикара 1-го типа. Для триангуляции на рис. 2 нулевой объем октаэдра имеет кратность 10 (т.е квадрат корня имеет кратность 5). Но в этом случае есть комплексные корни, природа которых еще требует исследования.

Заметим, что на самом деле мы указали способ построения канонического многочлена объема для многогранников более широкого класса, чем гексаэдры. Действительно, боковые грани тетраэдров $ABED$ и $GCFH$, которые мы пристраиваем к октаэдру, вовсе не обязаны быть на одной плоскости с прилегающими гранями октаэдра, и боковые ребра этих тетраэдров могут быть произвольной длины. Конечно, коэффициенты многочлена изменятся, но способ его вычисления через результант и степень 64 останутся без изменения.

Обратим внимание, что в данном случае тетраэдры пристраиваются к противоположным парам граней октаэдра. Но предложенный метод пригоден для нахождения многочлена объема и для случая, когда тетраэдры "пристраиваются"к произвольной паре граней октаэдра, например, к соседним граням[3], так как равенство (3), от которого мы отправились, не зависит от того, к какой грани мы пристраиваем тетраэдр. При выборе разных пар могут получаться комбинаторно неизоморфные многогранники, но при некоторых значениях длин ребер многочлены объема будут одинаковые (например, если к двум равнобедренным граням октаэдра $EDBCFH$ пристраивать два одинаковых тетраэдра). Можно также убедиться, что если к октаэдру "приладить"тетраэдры с нулевым объемом (т.е. вырожденные в триангулированные треугольники), тогда объем октаэдра будет кратным корнем полученного результанта, что не удивительно, так как такой многогранник является нежестким.

В заключение хотим поблагодарить рецензента за интересные и полезные замечания, которые существенно помогли улучшить изложение.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

References

[1] Sabitov I.Kh., *The volume of a polyhedron as a function of its metric*, Fundam. and applied mathematics, **2**:4 (1996), 1235–1246 (Russian). MR1785783

[2] Sabitov I.Kh., *A generalized Heron-Tataglia formula and some its consequences*, Mathem. sbornik, **189**:10 (1998), 105–134 (Russian). (English transl. in Sb. Math., **189**:9–10 (1998), 1533–1561.) MR1691297

[3] Sabitov I.Kh., *The volume as a metric invariant of polyhedra*, Discrete and Computatioal Geometry, **20**:4 (1998), 405–425. MR1651896

[4] Sabitov I.Kh., *Algebraic methodes for solution of polyhedra*, Uspekhi math. nauk, **66**:3 (2011), 3–66 (Rusian). (English transl. in Russian Math. Surveys, **66**:3 (2011), 445–505). MR2859189

[5] Astrelin A.V., Sabitov I.Kh., *A canonical polynomial for the volume of a polyheron*, Uspekhi math. nauk, **54**:2 (1999), 165–166 (Rusian) (English transl. in Russian Math. Surveys, **54**:2 (1999), 430–431). MR1711247

[6] Astrelin A.V., Sabitov I.Kh., *A minimal-degree polynomial for detemining the volume of an octahedron from its metrice*, Uspekhi math. nauk, **50**:5 (1995), 245–246 (Rusian). (English trans. in Russian Math. Surveys, **50**:5 (1995), 1085–1087.) MR1365059

[7] Galiulin R.V., Mikhalev S.N., Sabitov I.Kh., *Some applications of the formula forthe volume of an octahedron*, Math. zametki, **76**:1 (2004), 27–43 (Russian). (English transl. in Math. Notes, **76**:1–2 (2004), 25–40. MR2099840

[8] Sabitov D.I., Sabitov I.Kh., *Volume polynomials for some polyhedra in spaces of constant curvature*, Modeling and analysis of of information systems, **19**:6 (2012), 159–167.

Denis Sabitov
Skolkovo Institute of Science and Technology,
Skolkovo Innovation Center, Nobel street, 3
143026, Moscow, Russia
E-mail address: sabitovdi@yandex.ru

Idzhad Kh. Sabitov
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory
119991, Moscow, Russia
E-mail address: isabitov@mail.ru

[3]Конечно, тетраэдры должны иметь соответствующие параметры.