S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1108–1119 (2017) УДК 517.958

DOI 10.17377/semi.2017.17.094 MSC 35L20,35R30,35Q99

ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОВОГО РАСШИРЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Ж.Д. ТОТИЕВА

Abstract. We consider the problem of finding the thermal expansion coefficient $\alpha(z),\ z \in [0, Z]$, occurring in the system of integro-differential termoviscoelasticity equations. The medium density and the Lame parameters are assumed to be function of one variable. The integrand $h(t),\ t \in [0; T]$ is known. The inverse problem is replaced by the equivalent integral equation for unknown functions. The theorem of unique solvability is proved and the stability estimate of solving the inverse problem is obtained.

Keywords: inverse problem, integro-differential equations, stability, thermal expansion coefficient, kernel.

1. Введение. Постановка задачи

Более точное исследование с помощью математических методов процессов распространения электромагнитных, акустических и упругих волн требует учета предыстории процесса. Для акустических и упругих волн это явление связано с наличием вязкости среды. В математических моделях эти свойства среды учитываются интегральным слагаемым типа оператора свертки с ядром, которое описывает явление «предыстории среды» или «памяти среды».

Исследуемая задача относится к классу коэффициентных обратных задач для гиперболических интегро–дифференциальных уравнений (случай термоупругой среды с «памятью»). Без учета предыстории термоупругой среды задача представлена в работе [1]. Доказана теорема о необходимых и достаточных

Totieva, Zh.D., The multidimensional problem of determining the density function for the system of viscoelasticity.

Поступила 7 июля 2017 г., опубликована 9 ноября 2017 г.

условиях однозначной разрешимости обратной задачи определения коэффициента теплового расширения (как функции температуры) и теорема об устойчивости решения.

В работах [2,3] рассмотрены прямые и обратные одномерные задачи связной термоупругости. Обратные задачи связаны с определением параметров Ламэ и коэффициента теплового расширения. С помощью линеаризации задачи сводятся к известным задачам упругости, а также к задаче несвязной термоупругости. Доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости.

Коэффициентные обратные задачи связной термоупругости для функционально - градиентных материалов рассмотрены в [4]. На основе обобщенного соотношения взаимности получены интегральные уравнения, позволяющие построить итерационный процесс реконструкции термомеханических характеристик неоднородных тел. Рассмотрена процедура реконструкции термомеханических характеристик неоднородного слоя и полого цилиндра.

Множество работ посвящено исследованию обратных задач определения ядра $h(t)$ (функции «памяти») интегрального оператора в гиперболических интегро - дифференциальных уравнениях. Здесь можно отметить [5]–[13]. В этих работах определяются ядра, зависящие от временной переменной для случая распределенных [5]–[8] и сосредоточенных источников возбуждения волн [9]–[12]. В работе [13], из наиболее близких к данной, рассматривалась одна модельная обратная задача определения ядра для системы уравнений термоупругости, основными результатами являются теорема локальной однозначной разрешимости и теорема об устойчивости.

При математических моделированиях прикладных задач, связанных с распространением упругих волн в так называемых средах «с памятью» интегральный оператор, отвечающий за предысторию среды, входит в систему (1.1) через тензор напряжений посредством формулы (1.7). Помимо коэффициентов Ламэ и плотности, ядро $h(t),\ t \in [0, T]$, где $T > 0$ — некоторое число, является важной характеристикой рассматриваемой среды. В настоящей работе изучается вопрос однозначного определения и устойчивости коэффициента теплового расширения среды для произвольного фиксированного числа T.

Рассмотрим при $x = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,\ x_3 > 0$ систему интегро–дифференциальных уравнений несвязной динамической термовязкоупругости

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j},\ i = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = k \Delta H, \tag{1.2}$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$u_i \mid_{t=+0} = 0,\ \frac{\partial u_i}{\partial t} \mid_{t=+0} = 0,\ i = 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

$$H \mid_{t=+0} = 0, \tag{1.4}$$

$$T_{3j}|_{x_3=+0} = 0,\ j = 1, 2, 3, \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x_3} - \gamma H \right) \mid_{x_3=+0} = -\gamma(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0), \tag{1.6}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ — вектор смещений, $H(x,t)$ — приращение температуры, Δ — оператор Лапласа по переменным x_1, x_2, x_3; $\tilde{T}_1,\ \tilde{T}_0,\ \gamma$ — постоянные, $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0$, $\gamma > 0$, T_{ij} — тензор напряжений:

$$T_{ij}(x,t) = \sigma_{ij}[u](x,t) + \int_0^t h(t-\tau)\sigma_{ij}[u](x,\tau)d\tau, \tag{1.7}$$

σ_{ij} — напряжения, для которых согласно закону Гука имеет место представление [17]:

$$\sigma_{ij}[u](x,t) = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\big[\lambda divu - (3\lambda+2\mu)\int_0^{H(x,t)} \alpha(z)dz\big]. \tag{1.8}$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера.

В систему уравнений (1.1), (1.2) входят k — коэффициент температуропроводности, ρ — плотность среды, λ, μ — параметры Ламе, α — коэффициент теплового расширения среды. Далее считаем $k > 0$ постоянной; $\rho = \rho(x_3),\ \mu = \mu(x_3),\ \lambda = \lambda(x_3)$ являются функциями одной переменной, удовлетворяющими условиям $\rho(x_3) > 0,\ \mu(x_3) > 0,\ \lambda(x_3) + 2\mu(x_3) > 0$.

Граничное условие (1.6) моделирует тепловой удар на поверхность полупространства $x_3 > 0$. При этом температура на границе повышается от начальной температуры $\tilde{T}_0$ до значения $\tilde{T}_1$. Между поверхностью $x_3 = 0$ и средой, заполняющей полупространство $x_3 > 0$, в дальнейшем происходит конвективный теплообмен. Задачу определения вектора смещения $u(x,t)$ и приращения температуры $H(x,t)$, удовлетворяющих (в обобщенном смысле) равенствам (1.1)–(1.6), при заданных функциях $\alpha(z),\ h(t),\ \rho(x_3),\ \mu(x_3),\ \lambda(x_3)$ и заданных постоянных $k,\ \gamma,\ \tilde{T}_0,\ \tilde{T}_1$ будем называть прямой задачей.

Далее мы увидим, что решение начально-краевой задачи (1.2), (1.4), (1.6) будет зависеть только от переменных x_3, t. Таким образом, все коэффициенты, входящие в систему уравнений (1.1), (1.7), (1.8), зависят только от этих переменных. Отсюда в силу сделанных предположений относительно плотности среды и коэффициентов Ламе на основе условий (1.3), (1.5) заключаем, что [14]: $u_3(x,t) \equiv u_3(x_3,t) \neq 0$, $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$. Обратная задача заключается в определении коэффициента теплового расширения $\alpha(z),\ z \in [0, Z],\ Z = H(0,T)$, входящего в (1.1) посредством формулы (1.8), если относительно решения задачи (1.1)–(1.6) известна дополнительная информация

$$u_3(x_3,t)|_{x_3=+0} = g(t),\ t > 0, \tag{1.9}$$

$g(t)$ — заданная функция.

2. Предварительные построения

Задача (1.2), (1.4), (1.6) может быть рассмотрена как самостоятельная начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Она имеет следующее решение [15]:

$$H(x_3,t) = (\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)\times$$
$$\times\left[erfc\left(\frac{x_3}{2\sqrt{kt}}\right) - \exp(\gamma x_3 + \gamma^2 kt) erfc\left(\frac{x_3}{2\sqrt{kt}} + \gamma\sqrt{kt}\right)\right],$$

где

$$erfc(x_3) = 1 - erf(x_3),\ erf(x_3) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^{x_3} \exp(-\xi^2)d\xi.$$

Поэтому для функции $H(x_3,t)$ равенства (1.1), (1.3), (1.5) эквивалентны соотношениям

$$\rho(x_3)\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left[(\lambda(x_3)+2\mu(x_3))\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - (3\lambda(x_3)+2\mu(x_3))R(H(x_3,t))\right]$$
$$+\int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial}{\partial x_3}\left[(\lambda(x_3)+2\mu(x_3))\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - (3\lambda(x_3)+2\mu(x_3))R(H(x_3,\tau))\right]d\tau, \tag{2.1}$$

$$u_3\,|_{t=+0}=0,\ \frac{\partial u_3}{\partial t}\,|_{t=+0}=0, \tag{2.2}$$

$$\left[\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \int_0^t h(t-\tau)\frac{\partial u_3(x_3,\tau)}{\partial x_3}d\tau\right]_{x_3=+0} = \frac{3\lambda(0)+2\mu(0)}{\lambda(0)+2\mu(0)}$$
$$\times\left[R(H(0,t)) + \int_0^t h(t-\tau)R(H(0,\tau))d\tau\right], \tag{2.3}$$

где $R(s)=\int_0^s \alpha(z)dz$.

Пусть

$$\rho(x_3),\ \mu(x_3),\ \lambda(x_3)\in\Lambda_1 = \{\rho(x_3),\ \mu(x_3),\ \lambda(x_3)\in C^2[0,+\infty)|$$
$$\rho(x_3)>0,\ \mu(x_3)>0,\ \lambda(x_3)+2\mu(x_3)>0, \rho'(+0)=\mu'(+0)=\lambda'(+0)=0\},$$
$$h(t)\in\Lambda_2=\{h(t)\in C^2[0,T]|\ h(+0)=0,\ h'(+0)=0\}.$$

Введем в рассмотрение новую переменную y по формуле

$$y=\psi(x_3) := \int_0^{x_3}\frac{d\xi}{\nu(\xi)},\ \nu(x_3) := \sqrt{\frac{\lambda(x_3)+2\mu(x_3)}{\rho(x_3)}}.$$

Через $\psi^{-1}(y)$ обозначим функцию, обратную к $\psi(x_3)$.

Определим биллинейный интегральный оператор L по формуле:

$$L[h(t),u(x,t)] = u(x,t) + \int_0^t h(t-\tau)u(x,\tau)d\tau.$$

Пусть

$$v(y,t) := \frac{u_3\left(\psi^{-1}(y),t\right)}{s(y)},\ s(y) := \sqrt{\frac{a(y)}{a(0)}},$$
$$a(y) := \frac{1}{\sqrt{[\lambda(\psi^{-1}(y))+2\mu(\psi^{-1}(y))]\rho(\psi^{-1}(y))}}.$$

Тогда обратная задача (2.1)–(2.3), (1.9) в терминах вновь введенных функций и переменной y принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = L\left[h, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + q(y)v\right] - \sqrt{a(y)a(0)}\frac{\partial}{\partial y}Q[h](y,t),\ y>0,\ t\in\mathbb{R}, \tag{2.4}$$

$$v|_{t=+0}=0,\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=+0}=0 \tag{2.5}$$

$$L[h, \frac{\partial v(y,t)}{\partial y}]\Big|_{y=+0} = a(0)Q[h](0,t), \qquad (2.6)$$

$$v(y,t)|_{y=+0} = g(t), t > 0, \qquad (2.7)$$

где введены обозначения

$$q(y) := \frac{s''(y)}{s(y)} - 2\left[\frac{s'(y)}{s(y)}\right]^2, \ \tilde\lambda(y) := \lambda(\psi^{-1}(y)),$$

$$\tilde\mu(y) := \mu(\psi^{-1}(y)), \ \tilde H(y,t) := H(\psi^{-1}(y),t),$$

$$Q[h](y,t) := (3\tilde\lambda(y) + 2\tilde\mu(y))\Big[R(\tilde H(y,t)) + \int_0^t h(\tau)R(\tilde H(y,t-\tau))d\tau\Big].$$

Пусть $L[h, v(y,t)] = w(y,t)$. Тогда $v(y,t) = L[r, w(y,t)]$, где

$$r(t) = -h(t) - \int_0^t h(t-\tau)r(\tau)d\tau. \qquad (2.8)$$

Относительно новых функций $w(y,t)$ и $r(t)$ уравнения (2.4) – (2.7) принимают вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q(y)w - \sqrt{a(y)a(0)}\frac{\partial}{\partial y}Q[h](y,t) - \int_0^t r''(t-\tau)w(y,\tau)d\tau, \ y > 0, \ t \in \mathbb{R}, \qquad (2.9)$$

$$w|_{t=+0} = 0, \ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=+0} = 0, \qquad (2.10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=+0} = a(0)Q[h](0,t), \qquad (2.11)$$

$$w|_{y=+0} = g(t) + \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)d\tau. \qquad (2.12)$$

Запишем равенства (2.9)–(2.12) в терминах функции $V(y,t) = \frac{\partial w}{\partial t}(y,t)$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + q(y)V - \sqrt{a(y)a(0)}\frac{\partial}{\partial y}Q_t[h](y,t) - \int_0^t r''(\tau)V(y,t-\tau)d\tau, \ y > 0, \ t \in \mathbb{R}, \qquad (2.13)$$

$$V|_{t=+0} = 0, \ \frac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=+0} = 0, \qquad (2.14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}\Big|_{y=+0} = a(0)Q_t[h](0,t), \qquad (2.15)$$

$$V|_{y=+0} = g'(t) + \int_0^t h(\tau)g'(t-\tau)d\tau, \qquad (2.16)$$

где

$$Q_t[h](y,t) = (3\tilde\lambda(y) + 2\tilde\mu(y))\Big[\alpha(\tilde H(y,t))\frac{\partial \tilde H}{\partial t} + \int_0^t h(\tau)\alpha(\tilde H(y,t-\tau))\frac{\partial \tilde H}{\partial t}(y,t-\tau)d\tau\Big].$$

В (2.11) использовано равенство $h(0) = -r(0)$, вытекающее из (2.8).

3. Сведение обратной задачи к эквивалентному интегральному уравнению

Рассмотрим область

$$\triangle(y,t) = \{(\xi,\tau)|\ 0 \le \tau \le t-y,\ 0 \le \xi \le t+y-\tau\} \cup$$
$$\{(\xi,\tau)|\ t-y \le \tau \le t,\ t-y+\tau \le \xi \le t+y-\tau\},\ 0 \le y \le t$$

и

$$\triangle(y,t) = \{(\xi,\tau)|\ 0 \le \tau \le t,\ t-y+\tau \le \xi \le t+y-\tau\},\ 0 \le t < y.$$

Применяя формулу Грина в области $\triangle(y,t)$ и условия (2.14) – (2.16), получим

$$V(y,t) = \frac{1}{2}\Bigg\{ g'(t-y) + \int_0^{t-y} h(\tau)g'(t-y-\tau)d\tau$$
$$+ \iint\limits_{\triangle(y,t)} \Big[q(\xi)V(\xi,\tau) - \int\limits_0^{\tau} r''(\eta)V(\xi,\tau-\eta)d\eta\Big]d\xi d\tau$$
$$- \int\limits_0^{t} \sqrt{a(\xi)}b(\xi)L\Big[h, \alpha(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau)\Big]\Big|_{\xi=t+y-\tau} d\tau$$
$$+ \iint\limits_{\triangle(y,t)} \frac{\partial}{\partial \xi}(\sqrt{a(\xi)})b(\xi)L\Big[h, \alpha(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau)\Big]d\xi d\tau$$
$$+ \int\limits_{t-y}^{t} \sqrt{a(\xi)}b(\xi)L\Big[h, \alpha(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau)\Big]\Big|_{\xi=t-y+\tau} d\tau\Bigg\},\quad 0 \le y \le t, \tag{3.1}$$

$$V(y,t) = \frac{1}{2}\Bigg\{ \iint\limits_{\triangle(y,t)} \Big[q(\xi)V(\xi,\tau) - \int\limits_0^{\tau} r''(\eta)V(\xi,\tau-\eta)d\eta\Big]d\xi d\tau$$
$$- \int\limits_0^{t} \sqrt{a(\xi)}b(\xi)L\Big[h, \alpha(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau)\Big]\Big|_{\xi=t+y-\tau} d\tau$$
$$+ \int\limits_0^{t} \sqrt{a(\xi)}b(\xi)L\Big[h, \alpha(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau)\Big]\Big|_{\xi=y-t+\tau} d\tau$$
$$+ \iint\limits_{\triangle(y,t)} \frac{\partial}{\partial \xi}(\sqrt{a(\xi)})b(\xi)L\Big[h, \alpha(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau)\Big]d\xi d\tau\Bigg\},\quad 0 \le t < y, \tag{3.2}$$

где $b(\xi) := \sqrt{a(0)}(3\tilde{\lambda}(\xi) + 2\tilde{\mu}(\xi))$.

Заметим, что в уравнении (3.1)

$$\iint\limits_{\triangle(y,t)} d\xi d\tau = \int\limits_0^{t-y} \int_0^{t+y-\tau} d\xi d\tau + \int\limits_{t-y}^{t} \int_{t-y+\tau}^{t+y-\tau} d\xi d\tau,$$

а в уравнении (3.2)

$$\iint\limits_{\triangle(y,t)} d\xi d\tau = \int\limits_0^t \int_{t-y+\tau}^{t+y-\tau} d\xi d\tau.$$

При $y = 0$ из (3.1) получаем уравнение:

$$V(0,t) = \frac{1}{2}\Bigg\{g'(t) + \int\limits_0^t h(\tau)g'(t-\tau)d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-\tau} \Big[q(\xi)V(\xi,\tau) - \int\limits_0^\tau r''(\eta)V(\xi,\tau-\eta)d\eta\Big]d\xi d\tau$$

$$- \int\limits_0^t \sqrt{a(t-\tau)}b(t-\tau)L\Big[h, \alpha(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau)\Big]\Big|_{\xi=t-\tau} d\tau$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-\tau} \frac{\partial}{\partial \xi}(\sqrt{a(\xi)})b(\xi)L\Big[h, \alpha(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau)\Big]d\xi d\tau\Bigg\}. \qquad (3.3)$$

Перепишем четвертый интеграл равенства (3.3), сделав замену переменной интегрирования τ на s по правилу $s = G(\tau,t) := \tilde{H}(t-\tau,\tau)$. Тогда

$$\int\limits_0^t \sqrt{a(t-\tau)}b(t-\tau)\Big[\alpha(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau) + \int\limits_0^\tau h(\tau-\eta)\alpha(\tilde{H}(\xi,\eta))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \eta}(\xi,\eta)d\eta\Big]\Big|_{\xi=t-\tau} d\tau =$$

$$\int\limits_0^{H(0,t)} A(s,t)\Bigg[\alpha(s) + \int\limits_0^\tau h(\tau-\eta)\alpha(\tilde{H}(\xi,\eta))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \eta}(\xi,\eta)d\eta\Bigg]_{\xi=t-\tau,\tau=G^{-1}(s,t)} ds, \qquad (3.4)$$

где

$$A(s,t) = \sqrt{a(t-\tau)}b(t-\tau)\left[\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau)\frac{1}{\frac{\partial}{\partial \tau}G(\tau,t)}\right]_{\xi=t-\tau,\tau=G^{-1}(s,t)},$$

$G^{-1}(s,t)$ – функция, обратная к $s = G(\tau,t)$ при фиксированном t.

Используя результаты леммы 4.1 ([1], гл.4, параграф 4.2), отметим, что $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau) > 0$, $\frac{\partial}{\partial \tau}G(\tau,t) > 0$, $\xi > 0$, $\tau > 0$.

Совершая замену переменной $p = \tilde{H}(t-\tau,\eta)\|_{\tau=G^{-1}(s,t)} := \phi(s,\eta,t)$ в интеграле свертки равенства (3.4), получаем

$$\int\limits_0^{H(0,t)} A(s,t)\Bigg[\alpha(s) + \int\limits_0^s B(s,p,t)\alpha(p)dp\Bigg]ds,$$

где

$$B(s,p,t) = h(\tau-\eta)\Big|_{\tau=G^{-1}(s,t),\eta=\phi^{-1}(s,p,t)}.$$

Для $V(0,t)$ с учетом (2.16) и (3.4) имеем

$$V(0,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-\tau} \Big[q(\xi)V(\xi,\tau) - \int\limits_0^\tau r''(\eta)V(\xi,\tau-\eta)d\eta\Big]d\xi d\tau$$

$$- \int\limits_0^{H(0,t)} A(s,t)\Bigg[\alpha(s) + \int\limits_0^s B(s,p,t)\alpha(p)dp\Bigg]ds$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\partial}{\partial\xi}(\sqrt{a(\xi)})b(\xi)L\Big[h,\alpha(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tau}(\xi,\tau)\Big]d\xi d\tau. \qquad (3.5)$$

Дифференцируя (3.5) по переменной t, а затем, совершая аналогичную замену переменной (как это было сделано в равенстве (3.4)) в пятом интеграле, выводим:

$$V'(0,t)=\int\limits_0^t\Big[q(t-\tau)V(t-\tau,\tau)-\int\limits_0^\tau r''(\eta)V(t-\tau,\tau-\eta)d\eta\Big]d\tau-A(H(0,t),t)\alpha(H(0,t))$$

$$-\int\limits_0^{H(0,t)}B(H(0,t),s,t)\alpha(s)ds-\int\limits_0^{H(0,t)}\frac{\partial A}{\partial t}(s,t)\Big[\alpha(s)+\int\limits_0^s\frac{\partial B}{\partial t}(s,p,t)\alpha(p)dp\Big]ds+$$

$$\int\limits_0^{H(0,t)}A_1(s,t)\Big[\alpha(s)+\int\limits_0^s B(s,p,t)\alpha(p)dp\Big]ds,$$

где

$$A_1(s,t)=\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\sqrt{a(\xi)})b(\xi)\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tau}(\xi,\tau)\frac{1}{\frac{\partial}{\partial\tau}G(\tau,t)}\right]_{\xi=t-\tau,\tau=G^{-1}(s,t)},$$

$$A(H(0,t),t)=a(0)(3\lambda(0)+2\mu(0))\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tau}(0,\tau)\frac{1}{\frac{\partial}{\partial\tau}G(\tau,t)|_{\tau-t}}>0.$$

Отсюда получаем уравнение для α:

$$\alpha(H(0,t))=\tilde{\alpha}(t)+\int\limits_0^t\Big[\tilde{q}(t-\tau)V(t-\tau,\tau)-\int\limits_0^\tau\tilde{r}''(\eta)V(t-\tau,\tau-\eta)d\eta\Big]d\tau$$

$$+\int\limits_0^{H(0,t)}\Big[K_1(H(0,t),s,t)\alpha(s)+\int_0^s K_2(H(0,t),s,p,t)\alpha(p)dp\Big]ds, \qquad (3.6)$$

где

$$\tilde{\alpha}(t)=-\frac{g''(t)+\int\limits_0^t h(\tau)g''(t-\tau)d\tau}{A(H(0,t),t)},\ \tilde{q}(t-\tau)=\frac{q(t-\tau)}{A(H(0,t),t)},\ \tilde{r}''(\eta)=\frac{r''(\eta)}{A(H(0,t),t)},$$

$$K_1(H(0,t),s,t)=-\frac{B(H(0,t),s,t)+\frac{\partial A}{\partial t}(s,t)-A_1(s,t)}{A(H(0,t),t)},$$

$$K_2(H(0,t),s,p,t)=-\frac{\frac{\partial A}{\partial t}(s,t)\frac{\partial B}{\partial t}(s,p,t)-A_1(s,t)B(s,p,t)}{A(H(0,t),t)}.$$

Из вышеприведенных рассуждений вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $g(t)\in C^2[0,T]$, $g(+0)=0$, $g'(+0)=0$, $T>0$. Функции $(\rho,\lambda,\mu)\in\Lambda_1$, $h(t)\in\Lambda_2$. Тогда решение обратной задачи (2.13)–(2.16) в классе функций $\alpha(z)\in C[0,Z]$, $Z=H(0,T)$ эквивалентно решению уравнения (3.6).*

4. Основные результаты

Основные результаты этой статьи составляют следующие теоремы однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы и* $T,\ \tilde{T}_0,\ \tilde{T}_1,\ k,\ \gamma$ *- фиксированные положительные числа, причем* $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0$. *Тогда существует единственное решение обратной задачи (1.1)–(1.6)* $\alpha(z) \in C[0, Z],\ Z = H(0, T)$ *при любом фиксированном* $T > 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha(z),\ \alpha^*(z)$ *– решения обратной задачи (1.1) – (1.6) с набором данных*

$$\{h(t),\ g(t)\},\ \{h^*(t),\ g^*(t)\}$$

соответственно. Тогда найдется такое положительное число

$$C = C(\alpha_{00},\ k,\ \gamma,\ \tilde{T}_0,\ \tilde{T}_1,\ T),$$

$$\alpha_{00} = \max\Big\{ \|\rho(y)\|_{C^2[0,\ \psi^{-1}(T)]},\ \|\lambda(y)\|_{C^2[0,\ \psi^{-1}(T)]},\ \|\mu(y)\|_{C^2[0,\ \psi^{-1}(T)]},$$

$$\|h(t)\|_{C^2[0,T]},\ \|h^*(t)\|_{C^2[0,T]} \Big\},$$ *что справедлива оценка устойчивости*

$$\|\alpha - \alpha^*\|_{C[0,H(0,T)]} \le C\Big[\|h - h^*\|_{C[0,T]} + \|g - g^*\|_{C^2[0,T]} \Big]. \tag{4.1}$$

Доказательство. Докажем теорему 1. Пусть z=H(0,t), тогда t=f(z) – функция, обратная к z.

Определим последовательность функций $\alpha_n(z)$:

$$\alpha_n(z) = \tilde{\alpha}(f(z)))$$

$$+ \int\limits_0^{f(z)} \Big[\tilde{q}(f(z) - \tau) V_{n-1}((f(z)) - \tau, \tau) - \int\limits_0^{\tau} \tilde{r}''(\eta) V_{n-1}(f(z) - \tau, \tau - \eta) d\xi \Big] d\tau$$

$$+ \int\limits_0^{z} \Big[K_1(z, s, f(z)) \alpha_{n-1}(s) + \int_0^s K_2(z, s, p, f(z)) \alpha_{n-1}(p) dp \Big] ds,\ n \ge 1, \tag{4.2}$$

$$\alpha_0(z) = \tilde{\alpha}(f(z)),$$

где V_{n-1} определяется интегральными уравнениями (3.1)–(3.2), в которых функция $\alpha(\tilde{H}(\xi, \tau))$ заменена на $\alpha_{n-1}(\tilde{H}(\xi, \tau))$.

Построим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{n+1}(z) - \alpha_n(z)]. \tag{4.3}$$

Докажем равномерную сходимсоть ряда (4.3). Для этого заметим, что из уравнений (3.1)–(3.2) для разности $V_n(y, t) - V_{n-1}(y, t)$ справедлива оценка, основанная на использовании леммы Гроноулла:

$$|V_n(y, t) - V_{n-1}(y, t)| \le C_1 \int_0^{H(y,t)} |\alpha_n(s) - \alpha_{n-1}(s)|\, ds,\ n \ge 1,$$

$C_1 = C_1(\alpha_{00}, k, \gamma, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, T)$, тогда

$$|\alpha_{n+1}(z) - \alpha_n(z)| \le C_2 \int_0^z \|\alpha_n(s) - \alpha_{n-1}(s)\|\, ds, \tag{4.4}$$

$C_2 = C_2(\alpha_{00}, k, \gamma, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, T)$.

В оценке (4.4) использовалось неравенство $0 \le \tilde{H}(\xi,\tau) \le H(0,t)$ при $\xi \ge 0, \tau \ge 0$, которые следуют из леммы 4.1 ([1], гл.4, параграф 4.2].

Из (4.4) следует

$$\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\| \le \frac{(C_2 z)^n}{n!} \le \frac{(C_2 Z)^n}{n!}.$$

Ряд (4.3) мажорируется сходящимся числовым рядом, значит, сходится равномерно на отрезке [0,Z]. Отсюда следует, что последовательность $\alpha_n(z)$ равномерно сходится к непрерывной функции $\alpha(z)$. Единственность следует из существования у соответствующего однородного уравнения (3.6) только нулевого решения (доказательство с помощью леммы Гроноулла). Единственность решения также является следствием теоремы 2 об устойчивости.

Докажем теорему 2.

Пусть $\alpha(z)$, $\alpha^*(z)$ — два решения обратной задачи, отвечающие наборам данных $\{h(t),\ g(t)\}$, $\{h^*(t),\ g^*(t)\}$. Для $\alpha(z)$ справедливо уравнение (3.6), а для $\alpha^*(z)$ уравнение

$$\alpha^*(H(0,t)) = \tilde{\alpha}^*(t) + \int\limits_0^t \Big[\tilde{q}(t-\tau)V^*(t-\tau,\tau) - \int\limits_0^\tau \tilde{r}''^*(\eta)V^*(t-\tau,\tau-\eta)d\xi\Big]d\tau$$

$$+ \int\limits_0^{H(0,t)} \left[K_1^*(H(0,t),s,t)\alpha^*(s) + \int_0^s K_2^*(H(0,t),s,p,t)\alpha^*(p)dp\right]ds, \qquad (4.5)$$

где

$$K_1^*(H(0,t),s,t) = -\frac{B^*(H(0,t),s,t) + \frac{\partial A}{\partial t}(s,t) - A_1(s,t)}{A(H(0,t),t)},$$

$$K_2^*(H(0,t),s,p,t) = -\frac{\frac{\partial A}{\partial t}(s,t)\frac{\partial B^*}{\partial t}(s,p,t) - A_1(s,t)B^*(s,p,t)}{A(H(0,t),t)},$$

$$V^*(y,t) = \frac{1}{2}\left\{ g'^*(t-y) + \int_0^{t-y} h^*(\tau)g'^*(t-y-\tau)d\tau \right.$$

$$+ \iint\limits_{\triangle(y,t)} \Big[q(\xi)V^*(\xi,\tau) - \int\limits_0^\tau r''^*(\eta)V^*(\xi,\tau-\eta)d\eta\Big]d\xi d\tau$$

$$- \int\limits_0^t \sqrt{a(\xi)}b(\xi)L\Big[h^*, \alpha^*(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau)\Big]\Big|_{\xi=t+y-\tau} d\tau$$

$$+ \iint\limits_{\triangle(y,t)} \frac{\partial}{\partial \xi}(\sqrt{a(\xi)})b(\xi)L\Big[h^*, \alpha^*(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau)\Big]d\xi d\tau$$

$$\left. + \int\limits_{t-y}^t \sqrt{a(\xi)}b(\xi)L\Big[h^*, \alpha^*(\tilde{H}(\xi,\tau))\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau}(\xi,\tau)\Big]\Big|_{\xi=t-y+\tau} d\tau \right\}, \quad 0 \le y \le t,$$

соответствующие замены функций производятся и для уравнения (3.2).

Для $V(y,t)-V^*(y,t)$ справедлива оценка:

$$|V(y,t)-V^*(y,t)| \le C_3\Bigg[\|h-h^*\|_{C[0,T]}+\|g-g^*\|_{C^2[0,T]}$$
$$+\int_0^{H(y,t)}\|\alpha-\alpha^*\|_{C[0,s]}ds\Bigg],$$

где $C_3=C_3(\alpha_{00},k,\gamma,\tilde{T}_0,\tilde{T}_1,T)$.

Тогда составляя разность $\alpha(z)-\alpha(z)^*$ и, учитывая, что

$$\|r(t)\|_{C^2[0,T]}\le \|h(t)\|_{C^2[0,T]}\exp\left(T\|h(t)\|_{C^2[0,T]}\right),$$

получим

$$\|\alpha-\alpha^*\|_{C[0,Z]}\le C_4\left[\|h-h^*\|_{C[0,T]}+\|g-g^*\|_{C^2[0,T]}+\int_0^Z\|\alpha-\alpha^*\|_{C[0,s]}ds\right], \quad (4.5)$$

где C_4 – константа, зависящая от тех же величин, что и в формулировке теоремы 2.

Из неравенства (4.5) и леммы Гронуолла следует оценка (4.1), где $C=C_4\exp(C_4H(0,T))$. □

References

[1] V. G. Yakhno, *Inverse problems for differential equations of elasticity*, Novosibirsk: Nauka, 1988. (in Russian)

[2] R. Sh. Isanov, V. G. Yakhno, *Direct and inverse linearized problem for the system of differential equations of coherent thermoelasticity*, The materials of the Siberian conference on non-classical equations of mathematical physics, Novosibirsk, 1995, 49. (in Russian)

[3] R. Sh. Isanov, V. G. Yakhno, *Direct and inverse problems of connected thermoelasicity*, Computerized tomography. Proceeding of the Forth International symposium, Novosibirsk, Russia, 1993. UTREHT: VSP , the Netherlands, 1995, 232–234. Zbl 0842.73016

[4] A. O. Vatulyan, S. A. Nesterov, *The inverse problem of thermoelasticity for functionally graded materials*, Problems of strength and plasticity, **76**:4 (2014), 335–342. (in Russian)

[5] M. Grasselli, S. I. Kabanikhin, A. Lorenzi, *An inverse problem for integro-differential equations*, Siberian Mathematical Journal, **33**:1 (1992), 58–68. MR1178458

[6] A. Lorenzi and E. Paparoni, *Direct and inverse problems in the theory of materials with memory*, Ren. Sem. Math. Univ., **87** (1992), 105–138. MR1183905

[7] A. Lorenzi and V. I. Priimenko, *Identification problems related to electro-magneto-elastic interactions*, J. Inv. Ill-posed Problems, **4**:2 (1996), 115–143. MR1393358

[8] J. Janno and L. von Wolfersdorf, *Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity*, Math. methods in Appl. Sciences, **20**:4 (1997), 291–314.

[9] A. L. Bukhgeim, N. Kalinina, V. B. Kardakov, *Two methods to the inverse problem of determining memory*, Siberian Mathematical Journal, **41**:4 (2000), 767–776. (in Russian) MR1785601

[10] D. K. Durdiev , Zh. D. Totieva, *The problem of determining a one-dimensional kernel of viscoelasticity equation*, Siberian Journal of Industrial Mathematics, **16**:2 (2013), 72–82. (in Russian) MR3203343

[11] D. K. Durdiev, *Inverse problem for determining two coefficients in an integrodifferential wave equation*, Siberian Journal of Industrial Mathematics, **12**:3 (2009), 28–40. MR2668144

[12] D. K. Durdiev, Zh. Sh. Safarov, *Inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded domain*, Mathematical Notes, **97**:5–6 (2015), 855–867. (in Russian) MR3399143

[13] D. K. Durdiev, *Inverse problem for the system of thermoelasticity equations in vertically inhomogeneous incoherent environment with memory*, Dif. equations, **45**:9 (2009), 1229–1236. (in Russian) MR2597875

[14] Zh. D. Tuaeva, *The multidimensional mathematical model of seismic with memory*, Mathematical forum, **1**: 2 (2008), "Studies of dif. equations and math. modeling", Vladikavkaz Scientific Center, Vladikavkaz, 297–306. (in Russian)

[15] A. D. Kovalenko, *Thermoelasticity*, Kiev: Vyscha SHKOLA, 1975. (in Russian)

Zhanna Dmitrievna Totieva
Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Centre
of Russian Academy of Sciences,
ul. Markova, 93a,
362002, Vladikavkaz, Russia
North Ossetian State University,
ul. Vatutina, 46,
362025, Vladikavkaz, Russia
E-mail address: jannatuaeva@inbox.ru