

# СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 14, стр. 112–124 (2017)

УДК 519.178

DOI 10.17377/semi.2017.14.012

MSC 05A17

## О МАКСИМАЛЬНЫХ ГРАФИЧЕСКИХ РАЗБИЕНИЯХ

В.А. БАРАНСКИЙ, Т.А. СЕНЬЧОНОК

**ABSTRACT.** A partition of an integer  $m$  is a sequence of nonnegative integers in nonincreasing order whose sum is equal to  $m$ . The length of a partition is the number of its nonzero parts. The set of all graphical partitions of  $2m$ , for a given  $m$ , is an order ideal of the lattice of all partitions of  $2m$ . We find new characterization of maximal graphical partitions and the number of maximal graphical partitions of length  $n$ . For each graphical partition  $\lambda$  of integer  $2m$  we construct maximal graphical partition  $\mu$  of integer  $2m$  with the same rank, which is dominate  $\lambda$ ; also we find an algorithm that builds a sequence of elementary transformations from  $\mu$  to  $\lambda$ .

**Keywords:** graph, lattice, integer partition, graphical partition, Ferrer's diagram.

В данной работе под графами мы понимаем обыкновенные графы, т. е. графы без петель и кратных рёбер. Мы будем придерживаться для графов терминологии и обозначений, принятых в [1].

*Разбиением* [2] называется последовательность  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  целых неотрицательных чисел такая, что  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ ,  $\lambda$  содержит лишь конечное число ненулевых компонент и  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = m$ , где  $m$  — натуральное число. Говорят также, что  $\lambda$  является разбиением натурального числа  $m$  и пишут  $m = \text{sum}(\lambda)$ ;  $m$  называют *весом* разбиения  $\lambda$ . Натуральное число  $l$  такое, что  $\lambda_l > 0$  и  $\lambda_{l+1} = \lambda_{l+2} = \dots = 0$ , называют *длиной* разбиения  $\lambda$  и обозначают через  $l(\lambda)$ . Для удобства разбиение  $\lambda$  будем записывать в любом из следующих видов:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l+2}) = \dots$$

Через  $NPL$  обозначим множество всех разбиений всех натуральных чисел, а через  $NPL(m)$ , где  $m \in \mathbb{N}$ , — множество всех разбиений натурального числа

BARANSKY, V.A., SENCHONOK, T.A., ON MAXIMAL GRAPHICAL PARTITIONS.

© 2017 БАРАНСКИЙ В.А., СЕНЬЧОНОК Т.А..

Поступила 1 сентября 2016 г., опубликована 10 февраля 2017 г.

$m$ . На множествах  $NPL$  и  $NPL(m)$  рассмотрим отношение доминирования  $\leq$  [3], полагая  $\lambda \leq \mu$ , если

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \mu_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &\leq \mu_1 + \mu_2 \\ &\dots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i &\leq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i \\ &\dots \end{aligned}$$

Разбиение удобно изображать в виде *диаграммы Ферре*, которую можно представлять себе в виде конечного набора квадратных блоков одинакового размера. Пример такой диаграммы см. на рис. 1.

На рис. 1 представлено разбиение  $(6,5,4,4,3,2,1,1)$  числа 26, длина этого разбиения равна 8.

Определим *элементарные преобразования* разбиения  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  числа  $m = \text{sum}(\lambda)$  (см. [4]–[6]), где  $\lambda_n$  может быть равно 0.

Пусть существуют натуральные числа  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  такие, что  $i < j$  и выполняется

- (1)  $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$  и  $\lambda_{j-1} \geq \lambda_j + 1$ ;
- (2)  $\lambda_i = \lambda_j + \delta$ , где  $\delta \geq 2$ .

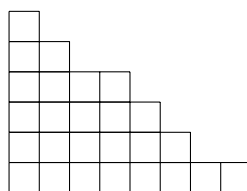


Рис. 1

Будем говорить, что разбиение  $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_n)$  получено из разбиения  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n)$  *элементарным преобразованием первого типа* (или *перекидыванием блока*). Отметим, что  $\mu$  отличается от  $\lambda$  точно на двух компонентах с номерами  $i$  и  $j$ . Для диаграммы Ферре такое преобразование означает перемещение верхнего блока из  $i$ -го столбца вправо на верх  $j$ -го столбца. Условия 1) и 2) гарантируют, что после такого перемещения снова получится разбиение. Тот факт, что  $\mu$  получено из  $\lambda$  с помощью перекидывания блока, будем кратко записывать в виде  $\lambda \rightarrow \mu$ , а также — в виде

$$\left[ \begin{array}{cc} i & j \\ \lambda_i - 1 & \lambda_j + 1 \end{array} \right].$$

Отметим, что элементарное преобразование первого типа сохраняет вес разбиения  $\lambda$ .

Элементарное преобразование разбиения  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ , имеющее вид

$$\left[ \begin{array}{cc} i & i + 1 \\ \lambda_i - 1 & \lambda_{i+1} + 1 \end{array} \right],$$

будем называть *падением блока* (см. рис. 2(а)), а элементарное преобразование вида

$$\begin{bmatrix} i & j \\ \lambda_i - 1 & \lambda_j + 1 \end{bmatrix}.$$

— *сдвигом блока* (см. рис. 2(б)), если  $i + 1 < j$ ,  $\lambda_i = \lambda_{i+1} + 1$ ,  $\lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \dots = \lambda_{j-1}$  и  $\lambda_{j-1} = \lambda_j + 1$ . Падение блока при  $\delta = 2$  для удобства будем также называть сдвигом блока (см. рис. 2(в)).

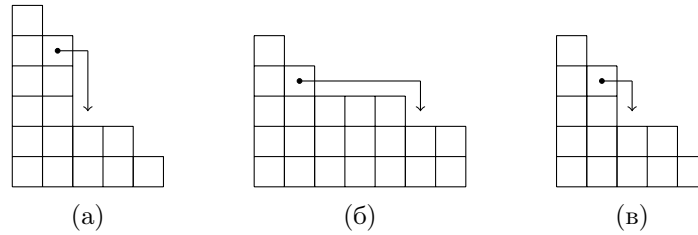


Рис. 2

Если разбиение  $\mu$  получено из разбиения  $\lambda$  с помощью падения или сдвига блока, то будем кратко писать  $\lambda \Rightarrow \mu$ .

Определим теперь *элементарные преобразования второго типа* разбиений из  $NPL$ . Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in NPL$  и  $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$ . Преобразование, заменяющее  $\lambda$  на  $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots)$  будем называть элементарным преобразованием второго типа (или *удалением блока*). Как и в предыдущем случае, будем кратко писать  $\lambda \rightarrow \mu$ , т.е. запись  $\lambda \rightarrow \mu$  означает, что  $\mu$  получено из  $\lambda$  элементарным преобразованием первого или второго типа. Отметим, что удаление блока уменьшает вес разбиения ровно на 1.

Если  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}, 1, 0, 0, \dots)$  и  $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}, 0, 0, \dots)$ , то такое удаление блока будем называть *отбрасыванием блока* и будем писать  $\lambda \Rightarrow \mu$  (как и в случае падений и сдвигов).

На множестве  $NPL$  и множествах  $NPL(m)$ , где  $m \in \mathbb{N}$ , определим отношение  $\geq$ , полагая  $\lambda \geq \mu$ , если  $\mu$  можно получить из  $\lambda$  с помощью последовательного применения конечного числа (возможно нулевого) элементарных преобразований указанных типов. Конечно, в случае  $NPL(m)$  мы вынуждены использовать только элементарные преобразования первого типа, которые не меняют веса разбиений. В [5] и [6] показано, что отношение  $\leq$  на каждом из рассматриваемых множеств совпадает с отношением доминирования  $\trianglelefteq$ . Важно отметить, что использование элементарных преобразований часто бывает удобнее использования неравенств, фигурирующих в определении  $\trianglelefteq$ .

Кроме того,  $NPL$  и  $NPL(m)$ , где  $m \in \mathbb{N}$ , являются решётками относительно  $\leq$ , причём решётка  $NPL$  является дизъюнктивным объединением решёток  $NPL(m)$ , где  $m$  пробегает  $\mathbb{N}$ , отвечающим некоторой естественной транзитивной системе вложений (см. [6]).

Заметим, что отношение покрытия в рассматриваемых решётках совпадает с отношением  $\Rightarrow$  [6].

Зафиксируем натуральное число  $n$ . Невозрастающую конечную последовательность целых неотрицательных чисел  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  будем называть

$n$ -последовательностью;  $n$ -последовательность  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  называется *графической*, если существует граф  $G = (V, E)$  на  $n$  вершинах такой, что  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  и  $\deg(v_1) = \lambda_1, \deg(v_2) = \lambda_2, \dots, \deg(v_n) = \lambda_n$ . Такой граф  $G$  называют *реализацией*  $n$ -последовательности  $\lambda$  и говорят, что  $\lambda$  *реализуется* графом  $G$ . Разбиение  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  называется *графическим*, если графической является  $l$ -последовательность  $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ , где  $l = l(\lambda)$ . Очевидно, разбиение  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  является графическим тогда и только тогда, когда графической является любая из  $n$ -последовательностей  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , где  $n \geq l(\lambda)$ .

Отметим, что в [7] нами указан алгоритм порождения всех графических  $n$ -последовательностей для заданного  $n$ , который при своей работе не использует неграфических  $n$ -последовательностей. Этот алгоритм последовательно порождает все графические  $n$ -последовательности с помощью специальных элементарных преобразований второго типа, начиная с  $n$ -последовательности  $(n-1, n-1, \dots, n-1)$ .

*Правильной  $n$ -последовательностью* [8] называют  $n$ -последовательность  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  такую, что

- (1)  $n-1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ ;
- (2) число  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{sum}(\lambda)$  чётно.

Очевидно, любая графическая  $n$ -последовательность является правильной.

Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  — разбиение. Определим *ранг*  $r(\lambda)$  разбиения  $\lambda$ , полагая  $r(\lambda) = \max\{i \mid \lambda_i \geq i\}$ . Очевидно, ранг  $r = r(\lambda)$  разбиения  $\lambda$  равен числу блоков на главной диагонали диаграммы Ферре этого разбиения. Максимальный квадрат, составленный из блоков и симметричный относительно главной диагонали, называют *квадратом Дёрфи* разбиения  $\lambda$  (см. рис. 3).

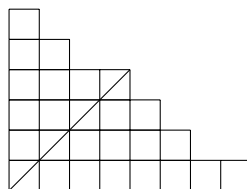


Рис. 3

На рис. 3 представлено разбиение  $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ . Здесь  $r(\lambda) = 4$  и квадрат Дёрфи состоит из  $16 = 4 \cdot 4$  блоков. Любая строка и любой столбец квадрата Дёрфи состоит из  $r = r(\lambda)$  блоков.

Для каждого разбиения  $\lambda$  мы будем рассматривать сопряжённое разбиение  $\lambda^*$ , компоненты которого равны числу блоков в соответствующих строках диаграммы Ферре разбиения  $\lambda$ . Ясно, что диаграмму Ферре разбиения  $\lambda^*$  можно получить из диаграммы Ферре разбиения  $\lambda$  с помощью зеркальной симметрии относительно главной диагонали. Для рис. 3 выполняется  $\lambda^* = (8, 6, 5, 4, 2, 1)$ . Конечно, всегда справедливо равенство  $r(\lambda^*) = r(\lambda)$ .

Заметим (см. [5]), что для любого  $m \in \mathbb{N}$  отображение  $\lambda \rightarrow \lambda^*$  является антиизоморфизмом решётки  $NPL(m)$  таким, что  $(\lambda^*)^* = \lambda$ .

Определим теперь *голову* и *хвост* разбиения  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , ранг которого равен  $r$ .

В качестве *головы*  $\text{hd}(\lambda)$  возьмём разбиение, которое получается из разбиения  $\lambda$  уменьшением первых  $r$  компонент на одно и то же число  $r - 1$  и обнулением всех компонент с номерами  $r + 1, r + 2, \dots$  (для примера см. диаграмму на рис. 4).

В качестве *хвоста*  $\text{tl}(\lambda)$  возьмём разбиение, для которого диаграмма Ферре сопряжённого разбиения получается из диаграммы Ферре разбиения  $\lambda$  удалением первых  $r$  столбцов, т.е. диаграмма Ферре разбиения  $\text{tl}(\lambda)^*$  расположена справа от квадрата Дёрфи (см. рис. 4).

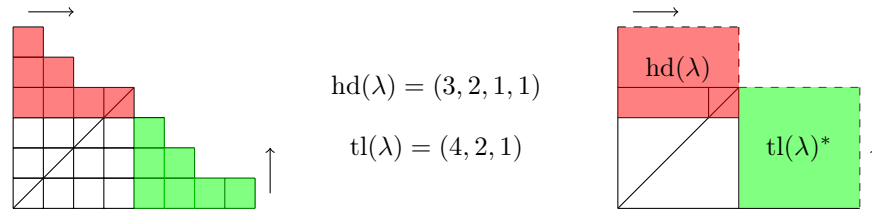


Рис. 4

На рис. 4 стрелки указывают направления, в которых считываются компоненты разбиений  $\text{hd}(\lambda)$  и  $\text{tl}(\lambda)$ .

Ясно, что верхняя строка квадрата Дёрфи входит в диаграмму Ферре разбиения  $\text{hd}(\lambda)$ , разбиение  $\text{hd}(\lambda)$  “считывается” по столбцам слева направо, а длина разбиения  $\text{hd}(\lambda)$  равна  $r$ . Разбиение  $\text{tl}(\lambda)$  “считывается” по строкам снизу вверх, а длина разбиения  $\text{tl}(\lambda)^*$  равна  $l(\lambda) - r(\lambda)$ .

Справедлива следующая теорема Кёнерта [10]:

*Правильная  $n$ -последовательность  $\lambda$  является графической тогда и только тогда, когда  $\text{hd}(\lambda) \leq \text{tl}(\lambda)$ .*

Отметим, что теорему Кёнерта легко доказать, используя известный критерий Эрдёша–Галлаи графичности правильной  $n$ -последовательности [11].

Например, на рис. 3 представлена правильная 8-последовательность  $\lambda = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ . В силу теоремы Кёнерта эта последовательность является графической, поскольку  $(4, 2, 1) \rightarrow (3, 2, 1, 1)$ . Здесь  $\text{hd}(\lambda)$  получается из  $\text{tl}(\lambda)$  с помощью одного элементарного преобразования первого типа.

**Лемма 1.** Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n)$  — графическое разбиение,  $i < j$  и разбиение  $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_n)$  получено из  $\lambda$  с помощью одного элементарного преобразования первого типа. Тогда  $\mu$  также является графическим разбиением.

*Доказательство.* По определению элементарного преобразования первого типа выполняется  $\delta = \lambda_i - \lambda_j \geq 2$ , поэтому  $\lambda_i > \lambda_j$ . Пусть  $G = (V, E)$  — реализация разбиения  $\lambda$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  и  $\deg(v_1) = \lambda_1, \dots, \deg(v_n) = \lambda_n$ . Поскольку  $\lambda_i > \lambda_j$ , в графе  $G$  существует вершина  $v$ , отличная от  $v_i$  и  $v_j$ , которая смежна с  $v_i$  и несмежна с  $v_j$  (см. рис. 5).

Произведём *вращение* ребра  $v_i v$  графа  $G$ , заменяющее его на ребро  $vv_j$ , т.е. удалим из графа  $G$  ребро  $v_i v$  и добавим новое ребро  $vv_j$ . Мы получим граф  $G'$ , который очевидно является реализацией разбиения  $\mu$ .  $\square$

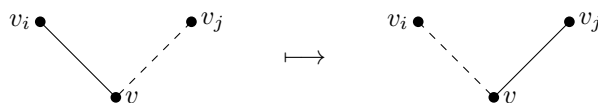


Рис. 5

Отметим, что любое графическое разбиение имеет чётный вес  $2m$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ . В силу леммы 1 множество всех графических разбиений фиксированного веса  $2m$  является порядковым идеалом решётки  $NPL(2m)$ , т.е. оно замкнуто относительно взятия меньших разбиений. Графическое разбиение  $\lambda$  веса  $2m$  будем называть *максимальным графическим разбиением*, если оно максимально в множестве всех графических разбиений веса  $2m$ .

Цель данной работы состоит в следующем:

- (1) для каждого графического разбиения  $\lambda$  построить максимальное графическое разбиение  $\mu$  такое, что  $\mu \geq \lambda$  и  $r(\mu) = r(\lambda)$ ; указать метод построения последовательности элементарных преобразований первого типа, переводящих  $\mu$  в  $\lambda$ ;
- (2) найти новый, удобный для применения, критерий максимальности для графических разбиений (другие критерии максимальности смотри в [9]);
- (3) найти число максимальных графических разбиений заданной длины.

Поскольку любое графическое разбиение имеет чётный вес, в решётке  $NPL$  графические разбиения содержатся в подрешётках вида  $NPL(2m)$ , где  $m$  пробегает  $\mathbb{N}$  (см. рис. 6).

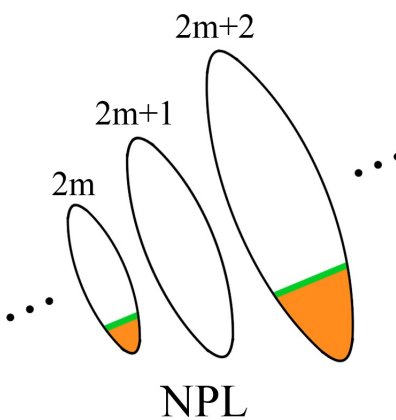


Рис. 6

Через  $GPL$  обозначим множество всех графических разбиений. Пусть  $\lambda, \mu \in GPL$  и выполняется  $\text{sum}(\lambda) \leq \text{sum}(\mu)$ . Алгоритм нахождения пересечения  $\lambda \wedge \mu$  в решётке  $NPL$ , указанный в [6], гарантирует, что  $\text{sum}(\lambda \wedge \mu) = \text{sum}(\lambda)$ . Поскольку  $\lambda \wedge \mu \leq \lambda$ , в силу леммы 1 получаем  $\lambda \wedge \mu \in GPL$ .

Таким образом,  $GPL$  является нижней подполурешёткой решётки  $NPL$  (по отношению доминирования). В следующей работе мы покажем, что  $GPL$  является решёткой по отношению доминирования, но не является подрешёткой решётки  $NPL$ . Мы также укажем ряд интересных подрешёток решётки  $GPL$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\lambda$  — графическое разбиение такое, что  $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$ . Тогда  $\lambda$  является максимальным графическим разбиением.

*Доказательство.* Пусть  $\text{sum}(\lambda) = 2m$ , где  $m \in \mathbb{N}$ . Нужно установить, что любое разбиение веса  $2m$  такое, что  $\mu > \lambda$ , не является графическим разбиением. В силу леммы 1 достаточно рассмотреть случай, когда  $\mu \rightarrow \lambda$ , т. е.  $\lambda$  получается из  $\mu$  с помощью одного элементарного преобразования первого типа.

Рассмотрим диаграмму Ферре для  $\mu$  и все возможные способы выполнения элементарного преобразования для получения разбиения  $\lambda$ .

**1 случай.** Рассмотрим все случаи, когда  $r(\mu) = r(\lambda)$  (см. рис. 7). На рис. 7 указаны три возможных случая для перекидывания блока.

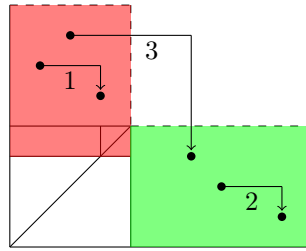


Рис. 7

**1.1.** В этом случае  $\text{hd}(\mu) > \text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda) = \text{tl}(\mu)$ . В силу критерия Кёнерта  $\mu$  не является графическим разбиением.

**1.2.** В этом случае  $\text{tl}(\mu) < \text{tl}(\lambda)$ , поскольку  $\text{tl}(\mu)^* > \text{tl}(\lambda)^*$ . Поэтому  $\text{tl}(\mu) < \text{tl}(\lambda) = \text{hd}(\lambda) = \text{hd}(\mu)$  и в силу критерия Кёнерта  $\mu$  не является графическим разбиением.

**1.3.** Здесь  $\text{hd}(\mu) > \text{hd}(\lambda)$ , так как  $\text{hd}(\lambda)$  получается из  $\text{hd}(\mu)$  удалением одного блока. Кроме того,  $\text{tl}(\lambda) > \text{tl}(\mu)$ , так как  $\text{tl}(\mu)$  получается из  $\text{tl}(\lambda)$  удалением одного блока. Таким образом,  $\text{hd}(\mu) > \text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda) > \text{tl}(\mu)$ , т. е. опять  $\mu$  не является графическим разбиением.

**2 случай.** Рассмотрим все случаи, когда  $r(\mu) \neq r(\lambda)$ .

**2.1.** Пусть ранг разбиения уменьшается при выполнении преобразования  $\mu \rightarrow \lambda$  (см. рис. 8).

Здесь выполняется  $r(\lambda) = r(\mu) - 1$  и

$$\begin{aligned} \text{sum}(\text{hd}(\mu)) &= \text{sum}(\text{hd}(\lambda)) - r(\lambda) + 1, \\ \text{sum}(\text{tl}(\mu)) &= \text{sum}(\text{tl}(\lambda)) - r(\lambda) - 1. \end{aligned}$$

Поскольку в силу условия леммы выполняется  $\text{sum}(\text{hd}(\lambda)) = \text{sum}(\text{tl}(\lambda))$ , отсюда вытекает  $\text{sum}(\text{hd}(\mu)) > \text{sum}(\text{tl}(\mu))$ . Следовательно,  $\text{hd}(\mu) \not\leq \text{tl}(\mu)$  так как из  $\text{hd}(\mu) \leq \text{tl}(\mu)$  вытекает  $\text{sum}(\text{hd}(\mu)) \leq \text{sum}(\text{tl}(\mu))$ . Поэтому  $\mu$  не является графическим разбиением в силу критерия Кёнерта.

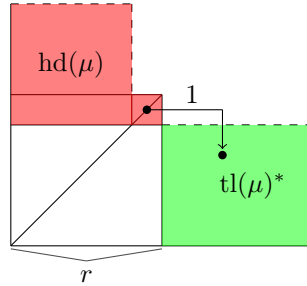


Рис. 8

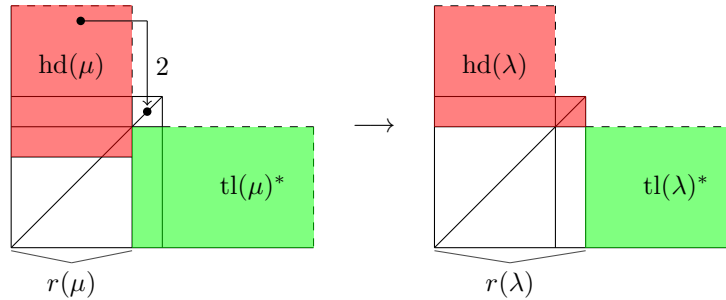


Рис. 9

**2.2.** Пусть ранг разбиения увеличивается при выполнении преобразования  $\mu \rightarrow \lambda$  (см. рис. 9).

Здесь  $r(\lambda) = r(\mu) + 1$ . Заметим, что в этом случае нижняя строка у  $\text{hd}(\lambda)$  содержит  $r(\lambda)$  блоков, а первый столбец у  $\text{tl}(\lambda)^*$  содержит не более  $r(\lambda) - 1$  блоков, что противоречит условию  $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$ . Таким образом, случай 2.2 невозможен.  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $\lambda$  — графическое разбиение и  $\text{hd}(\lambda) < \text{tl}(\lambda)$ . Тогда существует графическое разбиение  $\mu$  такое, что

$$\mu \geq \lambda, \quad \text{sum}(\mu) = \text{sum}(\lambda), \quad r(\mu) = r(\lambda), \quad \text{hd}(\mu) = \text{tl}(\mu).$$

*Доказательство.* По условию леммы разбиение  $\text{hd}(\lambda)$  можно получить из разбиения  $\text{tl}(\lambda)$  с помощью конечной последовательности элементарных преобразований двух возможных типов — перекидывания блоков и удаления блоков:

$$(1) \quad \text{tl}(\lambda) = \eta_1 \rightarrow \eta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \eta_{t-1} \rightarrow \eta_t = \text{hd}(\lambda).$$

Переходя к сопряжённым разбиениям, мы получаем последовательность, составленную из двух возможных типов преобразований — перекидываний блоков и вставок блоков:

$$(2) \quad \text{hd}(\lambda)^* = \eta_t^* \rightarrow \eta_{t-1}^* \rightarrow \dots \rightarrow \eta_2^* \rightarrow \eta_1^* = \text{tl}(\lambda)^*.$$

Рассмотрим диаграмму Ферре разбиения  $\lambda$ , и пусть  $r = r(\lambda)$  (см. рис. 10).



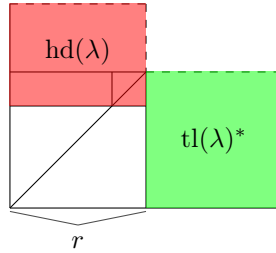


Рис. 10

Поскольку  $\lambda$  — графическое разбиение, число  $\text{sum}(\lambda) = \text{sum}(\text{hd}(\lambda)) + (r - 1)r + \text{sum}(\text{tl}(\lambda))$  чётно. Поэтому чётно и число  $\text{sum}(\text{hd}(\lambda)) + \text{sum}(\text{tl}(\lambda))$ , откуда следует, что будет чётно число  $\text{sum}(\text{tl}(\lambda)) - \text{sum}(\text{hd}(\lambda))$ .

Обозначим это число через  $2s$ . Ясно, что  $2s$  равно числу отбрасываемых блоков в (1). Конечно, число  $2s$  равно и числу блоков, вставляемых в (2).

Окрасим блоки диаграммы Ферре разбиения  $\text{hd}(\lambda)$  в чёрный цвет и добавим к ним  $s$  блоков серого цвета. Отметим, что  $(r - 1)r$  блоков квадрата Дёрфи, не входящих в  $\text{hd}(\lambda)$ , мы не будем раскрашивать — они будут бесцветными. Серыми блоками будем наращивать  $\text{hd}(\lambda)$ , двигаясь по очереди с нижней строки вверх по строкам. При этом будем дополнять очередную строку слева направо серыми блоками до длины  $r$ , пока не израсходуем все  $s$  серых блоков. Ясно, что могут возникнуть и строки, целиком состоящие из серых блоков. Верхняя из строк, содержащих серые блоки, может иметь длину меньше  $r$  (для её заполнения может не хватить серых блоков). Очевидно, если в какой-либо строке будет находиться серый блок, то все строки ниже будут иметь длину  $r$ , т.е. будут заполнены “полностью”. Указанный тип заполнения строк диаграммы Ферре разбиения  $\text{hd}(\lambda)$  серыми блоками будем называть *правильным*.

Пример.  $r = 5$ ,  $s = 6$ ,  $\text{hd}(\lambda) = (4, 3, 3, 2, 1)$  (см. рис. 11).

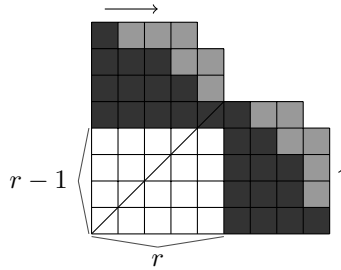


Рис. 11

Здесь в  $\text{hd}(\lambda)$  имеется 13 чёрных блоков. К ним добавлено 6 серых блоков. Положим  $\text{HD}(\lambda) = (4, 4, 4, 4, 3)$ . Разбиение  $\text{HD}(\lambda)$  содержит  $19 = 13 + 6$  блоков.

Отметим, что добавление серых блоков к  $\text{hd}(\lambda)$  всегда начинается не раньше чем со второй строки, так как первая строка целиком состоит из чёрных блоков — она является верхней строкой квадрата Дёрфи.

Для любого разбиения  $\lambda$  разбиение, полученное из  $\text{hd}(\lambda)$  правильным добавлением  $s$  серых блоков, будем обозначать через  $\text{HD}(\lambda)$ . Ясно, что  $\text{sum}(\text{HD}(\lambda)) = \text{sum}(\text{hd}(\lambda)) + s$ . Искомое разбиение  $\mu$  определим следующим образом. Положим  $r(\mu) = r = r(\lambda)$ ,  $\text{hd}(\mu) = \text{HD}(\lambda) = \text{tl}(\mu)$ . В  $\text{hd}(\mu)$  и  $\text{tl}(\mu)$  сохраним раскраску в чёрные и серые блоки, присутствующую в  $\text{HD}(\lambda)$  (см. рис. 12). В силу теоремы Кёнерта и леммы 2 разбиение  $\mu$  является максимальным графическим разбиением.

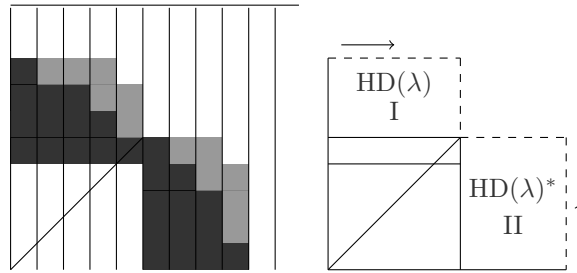


Рис. 12

Очевидно,

$$\begin{aligned} \text{sum}(\mu) &= 2\text{sum}(\text{HD}(\lambda)) + (r - 1)r = \\ &= \text{sum}(\text{hd}(\lambda)) + (r - 1)r + \text{sum}(\text{hd}(\lambda)) + 2s = \\ &= \text{sum}(\text{hd}(\lambda)) + (r - 1)r + \text{sum}(\text{tl}(\lambda)) = \text{sum}(\lambda). \end{aligned}$$

Заметим, что в зоне I находится диаграмма Ферре для  $\text{hd}(\mu) = \text{HD}(\lambda)$ , а в зоне II — диаграмма Ферре для  $\text{tl}(\mu)^* = \text{HD}(\lambda)^*$ . Чёрные блоки в зоне I составляют  $\text{hd}(\lambda)$ , а чёрные блоки в зоне II составляют  $\text{hd}(\lambda)^*$ .

Теперь, начиная с разбиения  $\mu$  и продвигаясь вдоль цепи (2), будем строить цепь элементарных преобразований первого типа (перекидывание блоков) или тождественных преобразований для получения разбиения  $\lambda$ . Длина строящейся цепи будет равна длине цепи (2), и чёрная часть диаграммы Ферре, получаемой на очередном этапе, будет в зоне II равна диаграмме Ферре соответствующего разбиения из (2). Чёрная же часть диаграммы Ферре в зоне I не будет меняться. Серые блоки из зон I и II при преобразованиях, отвечающих вставкам блоков из (2), будут по одному заменяться на чёрные (вставляемые) блоки. Кроме того, в зоне I и двойственным образом в зоне II расположение серых блоков всегда будет правильным. Необходимую нам цепь будем строить, продвигаясь вдоль цепи (2), а корректность построений будем доказывать индукцией по пройденной части цепи (2).

В начале чёрная часть разбиения  $\text{HD}(\lambda)^*$  в зоне II в точности совпадает с разбиением  $\text{hd}(\lambda)^*$ .

Рассмотрим теперь шаг индукции. Возьмём очередное преобразование  $\eta_i^* \rightarrow \eta_{i-1}^*$  из цепи (2).

**1 случай.** Пусть  $\eta_i^* \rightarrow \eta_{i-1}^*$  — вставка блока. Будем считать, что правый верхний квадрант плоскости покрыт прямоугольной сеткой, размер клеток которой равен размеру блоков диаграммы Ферре (см. рис. 12). Будем считать,

что по предположению индукции диаграмма Ферре разбиения  $\eta_i^*$  представлена всеми чёрными блоками зоны II и в неё надо вставить чёрный блок. Через  $x$  обозначим ту клетку прямоугольной сетки, в которую надо вставить блок. Ясно, что если ниже клетки  $x$  стоит блок, то он обязательно чёрный, а слева от  $x$  обязательно стоит чёрный блок.

Если в клетке  $x$  стоит серый блок, то окрасим его в чёрный цвет и получим окраску блоков в зонах I и II, удовлетворяющую нужным нам свойствам.

Предположим, что в клетке  $x$  нет серого блока. Тогда клетка  $x$  не содержит блока. Дальнейшие рассуждения разобьём на два случая.

**1.1.** Пусть в зоне II имеется хотя бы один серый блок. В силу предположения индукции все серые блоки в зоне II стоят в столбцах левее столбца, проходящего через клетку  $x$ . Возьмём самый правый из столбцов, содержащих серые блоки. Верхний серый блок этого столбца перекинем в клетку  $x$  и окрасим его в чёрный цвет. Очевидно, мы получим необходимую нам конфигурацию блоков и их раскрасок.

**1.2.** Пусть в зоне II нет серых блоков. Тогда по предположению индукции в зоне I имеется хотя бы один серый блок. Возьмём самую верхнюю строку в зоне I, содержащую серый блок. Крайний правый серый блок этой строки перекинем в клетку  $x$  и окрасим его в чёрный цвет. Ясно, что мы опять получим необходимую нам конфигурацию блоков и их раскрасок.

**2 случай.** Пусть преобразование  $\eta_i^* \rightarrow \eta_{i-1}^*$  является перекидыванием блока. Пусть  $x$  — клетка, в которую перекидывается блок, а  $y$  — клетка, из которой перекидывается блок.

**2.1.** Пусть в клетке  $x$  расположен серый блок. Если в клетке ниже  $x$  расположен блок, то он обязательно является чёрным. В клетке  $y$  обязательно стоит чёрный блок.

Тогда левее столбца, содержащего клетку  $x$ , во всех столбцах  $r$  первых клеток заняты чёрными и серыми блоками, что следует из предположения индукции. Перекрасим блок в клетке  $y$  в серый цвет, а блок в клетке  $x$  — в чёрный цвет. Количество серых и чёрных блоков не изменится, и мы получим необходимую нам конфигурацию блоков и их раскрасок. Отметим, что серые блоки будут снова иметь правильное расположение. Полученное преобразование является тождественным — поменялась лишь окраска двух блоков.

**2.2.** Пусть в клетке  $x$  не имеется блока. Если в клетке ниже клетки  $x$  стоит блок, то он обязательно является чёрным. Отметим, что в столбце клеток над  $x$  нет блоков и в клетке  $y$  содержится чёрный блок.

**2.2.1.** Пусть в столбцах, начиная от столбца, содержащего клетку  $y$ , до столбца, предшествующего столбцу, содержащему клетку  $x$ , имеется хотя бы один серый блок. Возьмём ближайший слева от клетки  $x$  столбец, содержащий серый блок. Верхний серый блок этого столбца перекинем в клетку  $x$  и окрасим его в чёрный цвет, а блок в клетке  $y$  окрасим в серый цвет. В результате мы получим нужную конфигурацию блоков и их раскрасок.

**2.2.2.** Теперь мы можем считать, что в столбце клеток над блоком  $y$  нет блоков и нет серых блоков в столбцах, начиная от столбца, содержащего клетку  $y$ , до столбца, содержащего клетку  $x$ . Блок из клетки  $y$  перекидываем в клетку  $x$ , оставляя его чёрным. Ясно что мы снова получим нужную нам конфигурацию блоков и их раскрасок.

Шаг индукции доказан. На последнем шаге выполнения преобразований мы получим конфигурацию блоков, в которой нет серых блоков, а чёрные блоки дадут нам разбиения  $\text{hd}(\lambda)$  и  $\text{tl}(\lambda)$ , т. е. мы получим разбиение  $\lambda$ .  $\square$

Из лемм 2, 3 и теоремы Кёнерта вытекает следующая

**Теорема 1.** *Разбиение  $\lambda$  является максимальным графическим разбиением тогда и только тогда, когда  $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$ .*

Отметим, что если выполняется условие  $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$ , то  $l(\lambda)$ -последовательность  $\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)}$  является правильной.

**Следствие 1.** *Число максимальных графических разбиений длины  $n \geq 2$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , равно  $2^{n-2}$ .*

*Доказательство.* Сначала подсчитаем число  $g(n, r)$  максимальных графических разбиений  $\lambda$  длины  $n$  и ранга  $r$  для каждого  $r = 1, 2, \dots, n - 1$ . Поскольку для любого такого разбиения  $\lambda$  выполняется  $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$ , первая компонента разбиения  $\text{hd}(\lambda)$  равна  $n - r$ , где  $r = r(\lambda)$ , а первая компонента разбиения  $\lambda$  равна  $n - 1$  (см. рис. 13). На рис. 13 для каждого из разбиений  $\text{hd}(\lambda)$  и  $\text{tl}(\lambda)$

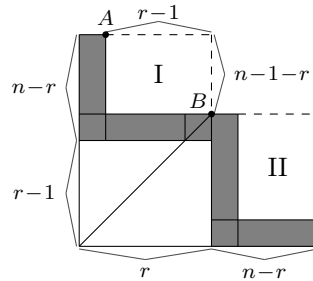


Рис. 13

тёмным цветом отмечены лишь первый столбец и первая строка их диаграмм Ферре.

Пусть  $A$  — верхняя правая точка первого столбца диаграммы Ферре для  $\text{hd}(\lambda)$ , а  $B$  — верхняя правая точка квадрата Дёрфи диаграммы Ферре разбиения  $\lambda$ . Для фиксированного  $r \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  число  $g(n, r)$  равно числу ломаных линий от  $A$  до  $B$ , идущих по линиям прямоугольной сетки, причём в узлах сетки допустимы лишь сдвиги вправо на одно деление (тип  $\alpha$ ) и сдвиги вниз на одно деление (тип  $\beta$ ). Сдвигов типа  $\alpha$  должно быть совершено  $r - 1$ , а сдвигов типа  $\beta$  —  $(n - 1 - r)$ . Общее число сдвигов равно  $r - 1 + n - 1 - r = n - 2$ . Поэтому число интересующих нас ломаных равно

$$g(n, r) = \frac{(n - 2)!}{(r - 1)!(n - 1 - r)!} = C_{n-2}^{r-1}$$

Следовательно, число максимальных графических последовательностей длины  $n \geq 2$ , равно

$$\sum_{r=1}^{n-1} C_{n-2}^{r-1} = C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + \dots + C_{n-2}^{n-2} = 2^{n-2}.$$

□

В качестве иллюстрации к следствию 1 см. рис. 11 [7], где для  $n = 5$  выделены 8 максимальных графических разбиений длины 5 среди всех 20 графических разбиений длины 5.

## REFERENCES

- [1] M.O. Asanov, V.A. Baransky, V.V. Rasin, *Discretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy*, Lan', Sankt-Peterburg, 2010.
- [2] G.E. Andrews, *The theory of partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976. MR0557013
- [3] T. Brylawski, *The lattice of integer partitions*, Discrete Mathematics, **6** (1973), 210–219. MR0325405
- [4] Baransky V.A., Koroleva T.A., *Reshetka razbieniy naturalnogo chisla*, Doklady RAN, **418:4** (2008), 439–442. Zbl 1170.11035
- [5] Baransky V.A., Koroleva T.A., Senchonok T.A., *O reshetke razbieniy naturalnogo chisla*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **21:3** (2015), 30–36. Zbl 1341.05029
- [6] V.A. Baransky, T.A. Koroleva, T.A. Senchonok, *On the partition lattice of all integers*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 744–753.
- [7] V.A. Baransky, T.I. Nadymova, T.A. Senchonok, *A new algorithm generating graphical sequences*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 269–279. Zbl 1341.05029
- [8] V.A. Emelichev, O.I. Melnikov, V.I. Sarvanov, R.I. Tyshkevich, *Lekcii po teorii grafov*, Nauka, Moskva, 1990. MR1158046
- [9] N.V.R. Mahadev, U.N. Peled, *Threshold Graphs and Related Topics*, Annals of Discrete Mathematics, Elsevier Science, 1995. MR1417258
- [10] A. Kohnert, *Dominance order and graphical partitions*, Electronic Journal of Combinatorics, **11:4** (2004), 1–17. MR2035320
- [11] P. Erdős, T. Gallai, *Graphs with given degree of vertices*, Matematikai Lapok, **11** (1960), 264–274.

VITALY ANATOLIEVICH BARANSKY  
 URAL FEDERAL UNIVERSITY,  
 PR. LENINA, 51,  
 620083, EKATERINBURG, RUSSIA  
*E-mail address:* vitaly.baransky@urfu.ru

TATYANA ALEXANDROVNA SENCHONOK  
 URAL FEDERAL UNIVERSITY,  
 PR. LENINA, 51,  
 620083, EKATERINBURG, RUSSIA  
*E-mail address:* tatiana.senchonok@urfu.ru