S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1135–1146 (2017) УДК 519.17+512.54
DOI 10.17377/semi.2017.14.097 MSC 05C25

К ТЕОРИИ ГРАФОВ ШИЛЛА С $b_2 = c_2$

А.А. МАХНЕВ, И.Н. БЕЛОУСОВ

Abstract. In this paper by using exact formulas for multiplicities of eigenvalues it is founded new infinite serie intersection arrays of Q-polynomial Shilla graph with $b_2 = c_2$. Intersection array of Q-polynomial Shilla graph Γ with $b_2 = c_2$ is $\{2rt(2r+1),(2r-1)(2rt+t+1),r(r+t);1,r(r+t),t(4r^2-1)\}$ and for any vertex $u \in \Gamma$ the subgraph $\Gamma_3(u)$ is an antipodal distance-regular graph with the intersection array $\{t(2r+1),(2r-1)(t+1),1;1,t+1,t(2r+1)\}$. In case $t = 2r^2-1$ the intersection array is feasible and in case $t = r(2lr-(l+1))$ the intersection array is feasible only if $(l,r) \in \{(1,2),(2,1),(4,1),(6,1)\}$.
Keywords: distance-regular graph, Shilla graph.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0,...,b_{d-1};c_1,...,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависит от выбора вершин u, w на расстоянии i. Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u [1]).

Для дистанционно регулярного графа диаметра 3 второе собственное значение θ_1 не меньше $\max\{a_3,(a_1+\sqrt{4k+a_1^2})/2\}$, причем в случае $\theta_1 = a_3$ по [2,

Makhnev, A.A., Belousov, I.N., To the theory of Shilla graphs with $b_2 = c_2$.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061-П (теоремы 1-2).
Поступила 6 октября 2017 г., опубликована 14 ноября 2017 г.

теорема 7] имеем $\theta_1 = (a_1 + \sqrt{4k + a_1^2})/2$. Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3. Для графа Шилла Γ число $a = a_3$ делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$.

Если $u_0 = 1, u_1 = \theta_1/k, ..., u_d$ – стандартная последовательность графа Шилла, отвечающая θ_1, (т.е. $c_i u_{i-1} + a_i u_i + b_i u_{i+1} = \theta_1 u_i$), то по [2, теорема 7] имеем $u_2 = 0$.

Известные графы Шилла – это граф Хэмминга $H(3,3)$ с массивом пересечений $\{6,4,2;1,2,3\}$, нечетный граф $O(4)$ с массивом пересечений $\{4,3,3;1,1,2\}$, обобщенный шестиугольник $GH(2,2)$ с массивом пересечений $\{6,4,4;1,1,3\}$, граф Тервиллигера с массивом пересечений $\{10,6,4;1,2,5\}$, граф Доро с массивом пересечений $\{12,10,3;1,3,8\}$, унитарный граф на множестве неизотропных векторов с массивом пересечений $\{12,10,5;1,1,8\}$ или граф Джонсона $J(9,3)$ с массивом пересечений $\{18,10,4;1,4,9\}$.

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e-кодом, если минимальное расстояний между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le p^d_{dd} + 2$. В случае равенства код называется максимальным. Для максимального e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $c_d \ge a_d p^d_{dd}$. В случае равенства код называется локально регулярным. Наконец, для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \le k_d / \sum_{i=0}^{e} p^d_{id} + 1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности.

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то по [3, предложение 5] Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$. В первом случае Γ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$ и граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$. Во втором случае Γ имеет собственное значение a и является графом Шилла с $b_2 = c_2$. Обратно, граф Шилла с $b_2 = c_2$ имеет массив пересечений $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $p = b-1$.

Пусть Γ является графом Шилла. Тогда $a_1 = a - b$, Γ имеет собственные значения θ_2, θ_3, являющиеся корнями уравнения $x^2 - (a_2 + a - b - ab)x + (b-1)b_2 - a_2 = 0$. Если θ_2, θ_3 – целые числа, то $(a_2 + a - b - ab)^2 - 4((b-1)b_2 - a_2)$ является квадратом натурального числа, в противном случае кратности θ_2 и θ_3 совпадают. В последнем случае при $b_2 = c_2$ по [2] Γ имеет массив пересечений $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$, b сравнимо с 0 или 1 по модулю 4 и кратности неглавных собственных значений равны $m_1 = b^3 - b^2 + b$, $m_2 = m_3 = (b^4 - 2b^3 + 3b^2 - 2b)/2$.

В данной работе найдены точные формулы для кратностей собственных значений графа Шилла с $b_2 = c_2$.

Предложение 1. *Пусть Γ является графом Шилла с массивом пересечений $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$. Тогда кратности неглавных собственных значений графа Γ равны:*

$(p+1)(p(p+1)(a^2+a) + (2a(p+1)+p+2)c)/((2a+p+2)c)$,

$1/2 \cdot ((2a^3+3a^2+a)p^4 + 4a^4c - 4(4c^2-3c)a^3 + (4a^4+12a^3+a^2(4c+11)+a(4c+3))p^3 + 4(4c^3-8c^2+3c)a^2 + (2a^5 - a^4(8c-11) + (8c^2-12c+19)a^3 + (12c^2+4c+13)a^2 + (4c^2+8c+3)a)p^2 + 4(4c^3-4c^2+c)a + (2a^5 - a^4(4c-7) - (8c^2-9)a^3 +$

$(16c^3-20c^2+12c+5)a^2+(16c^3-12c^2+8c+1)a)p-((a^2+a)p^3-4a^3c+8(c^2-c)a^2-(2a^4-a^3(4c-3)-a^2(6c+1)-2a(c+1))p^2+4(2c^2-c)a-(2a^4-2(4c^2-c)a^2+3a^3-(8c^2-2c+1)a)p)\sqrt{a^2+2(a+1)p+p^2-2a(2c-1)+4c^2-4c+1})/(2a^3c+p^3c-2(4c^2-3c)a^2+4(ac+c)p^2+8c^3+2(4c^3-8c^2+3c)a+(5a^2c+4c^3-2(2c^2-5c)a-4c^2+5c)p-8c^2+2c)$,

$1/2\cdot((2a^3+3a^2+a)p^4+4a^4c-4(4c^2-3c)a^3+(4a^4+12a^3+a^2(4c+11)+a(4c+3))p^3+4(4c^3-8c^2+3c)a^2+(2a^5-a^4(8c-11)+(8c^2-12c+19)a^3+(12c^2+4c+13)a^2+(4c^2+8c+3)a)p^2+4(4c^3-4c^2+c)a+(2a^5-a^4(4c-7)-(8c^2-9)a^3+(16c^3-20c^2+12c+5)a^2+(16c^3-12c^2+8c+1)a)p+((a^2+a)p^3-4a^3c+8(c^2-c)a^2-(2a^4-a^3(4c-3)-a^2(6c+1)-2a(c+1))p^2+4(2c^2-c)a-(2a^4-2(4c^2-c)a^2+3a^3-(8c^2-2c+1)a)p)\sqrt{a^2+2(a+1)p+p^2-2a(2c-1)+4c^2-4c+1})/(2a^3c+p^3c-2(4c^2-3c)a^2+4(ac+c)p^2+8c^3+2(4c^3-8c^2+3c)a+(5a^2c+4c^3-2(2c^2-5c)a-4c^2+5c)p-8c^2+2c)$.

Выражение, стоящее под знаком радикала преобразуется к виду $n^2=(a+1+p)^2+(a+1-2c)^2-(a+1)^2$.

По [2, следствие 17] граф Шилла является Q-полиномиальным тогда и только тогда, когда $\theta_3=-b(bb_2+c_2)/(b_2+c_2)$. В частности, при $b_2=c_2$ имеем $\theta_3=-b(b+1)/2$.

Предложение 2. *Пусть* Γ *– граф Шилла с* $b_2=c_2$ *и* $\theta_3=-b(b+1)/2$. *Тогда* $b=2r$, $c_2=r(t+r)$ *граф* Γ *имеет массив пересечений* $\{2rt(2r+1),(2r-1)(2rt+t+1),r(r+t);1,r(r+t),t(4r^2-1)\}$ *и для любой вершины* u *из* Γ *подграф* $\Gamma_3(u)$ *является антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{t(2r+1),(2r-1)(t+1),1;1,t+1,t(2r+1)\}$, $t\le 2r(r+1)(2r-1)-r$. *В случае* $t=r$ *имеем* $r=1$.

Граница $t\le 2r(r+1)(2r-1)-r$ получена в лемме 2.2 (В [4] получена оценка $t=O(r^4)$). Остальные утверждения следуют из [4, раздел 4.4, теорема 4.5.6, теорема 4.6.3]. Единственное замечание по доказательству теоремы 4.5.6: вместо равенства $a/(p+2)=(2r+1)(4t-1)/4r$ должно быть $a/(p+2)=(2r+1)(4t-1)/(4r+2)$. К счастью, последнее число не является целым.

В теореме 1 перечислены некоторые допустимые массивы пересечений Q-полиномиальных графов Шилла с $b_2=c_2$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *является* Q*-полиномиальным графом Шилла относительно* θ_1 *с* $b_2=c_2$. *Тогда* $\theta_3=-r(2r+1)$, $\theta_2=t-r$, *кратности неглавных собственных значений графа* Γ *равны* $2(4r^2t+2rt+r-t)r/(r+t)$, $2(4r^2t+2rt+r-t)(2rt+t+1)t/((2r^2+t)(r+t))$, $2(2rt+t+1)(2r+1)^2(2r-1)rt/((2r^2+t)(r+t))$ *и в следующих случаях приведены все допустимые массивы пересечений:*

(1) $r=1$: $\{6,4,2;1,2,6\}$, $\{18,10,4;1,4,9\}$, $\{30,16,6;1,6,15\}$;

(2) $r=2$: $\{20t,3(5t+1),2(t+2);1,2(t+2),15t$ *и* $t=4,7$;

(3) $r=3$: $\{42t,5(7t+1),3(t+3);1,3(t+3),35t\}$ *и* $t=5,7,9,17,21$;

(4) $t=r^2$: $\{2r^3(2r+1),(2r-1)(2r^3+r^2+1),r^2(r+1);1,r^2(r+1),r^2(4r^2-1)\}$ *и* $r=1,2,5,11$;

(5) $t=2r^2-1$: $\{2r(2r^2-1)(2r+1),(2r-1)(2r(2r^2-1)+2r^2),r(2r^2+r-1);1,r(2r^2+r-1),(2r^2-1)(4r^2-1)\}$.

В случае $t=r(2lr-(l+1))$ имеем следующие кратности неглавных собственных значений: $2r(l(4r^2+2r-1)-2(r+1))/l$, $2(l(4r^2+2r-1)-2(r+1))(2lr^2+lr-r-1)(2lr-l-1)/((l+1)l)$, $2(2lr^2+lr-r-1)(2lr-l-1)(2r+1)^2/((l+1)l)$.

Отсюда l делит $2(r+1)$ и $l+1$ делит $2(2lr^2+lr-r-1)(2lr-l-1)(l(4r^2+2r-1)-2(r+1),(2r+1)^2)$. Для данного l, для $2(r+1)$, делящегося на l, и для $4r(2r^2+2r+1)(2r+1)^2$, делящегося на $l+1$, получим допустимый массив пересечений графа Шилла $\{2r^2(2r+1)(2lr-(l+1)),(2r-1)(2r^2(2lr-(l+1))+r(2lr-(l+1))+1),r^2l(2r-1);1,r^2l(2r-1),r(2lr-(l+1))(4r^2-1)\}$.

Следующий результат показывает, что для данного двупараметрического семейства массивов пересечений существует лишь конечное число графов.

Теорема 2. *Пусть* Γ *является* Q*-полиномиальным графом Шилла. Если* Γ *имеет массив пересечений* $\{2r^2(2r+1)(2lr-(l+1)),(2r-1)(2r^2(2lr-(l+1))+r(2lr-(l+1))+1),r^2l(2r-1);1,r^2l(2r-1),r(2lr-(l+1))(4r^2-1)\}$*, то* $(l,r)\in\{(1,2),(2,1),(4,1),(6,1)\}$.

В данной работе исследуются также графы Шилла с $b_2=c_2$, имеющие $\theta_2=0$.

Теорема 3. *Пусть* Γ *является графом Шилла с* $b_2=c_2$ *и* $\theta_2=0$*. Тогда* $b_2=bs$, $a=(b+1)s$, $\theta_3=s-b-bs$*, либо* $2s+1\le b-2$*, либо* $2s+1=b$*,* Γ *имеет массив пересечений* $\{2s(s+1)(2s+1),2s(2s^2+2s+1),s(2s+1);1,s(2s+1),4s^2(s+1)\}$*, либо* $2s+1=b+1=3$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{6,4,2;1,2,3\}$.

Компьютерные вычисления, проведенные в третьем параграфе, позволяют выдвинуть следующее предположение.

Гипотеза. *Пусть* Γ *является графом Шилла с* $b_2=c_2$ *и* $\theta_2=0$*. Тогда, за исключением конечного числа массивов,* Γ *имеет массив пересечений* $\{2s(s+1)(2s+1),2s(2s^2+2s+1),s(2s+1);1,s(2s+1),4s^2(s+1)\}$.

Следующий результат касается графов Шилла с $b_2=c_2$ и $a_1=1$.

Предложение 3. *Пусть* Γ *является графом Шилла с* $b_2=c_2$ *и* $a_1=1$*. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $\theta_2+\theta_3=1-2c_2$, $\theta_2\theta_3=(b+1)(c_2-b)$ *и* $(\theta_2+1)(\theta_3+1)=(b-1)(c_2-b-2)$*;*

(2) *если* $|\theta_2|\le 1$*, то* Γ *имеет массив пересечений* $\{6,4,2;1,2,3\}$, $\{12,10,2;1,2,8\}$, $\{12,10,3;1,3,8\}$ *или* $\{72,70,8;1,8,63\}$*;*

(3) *если* $\theta_2=a/2$*, то* $4c_2=(3b+1)/2$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{182,180,5;1,5,168\}$*;*

(4) *если* $\theta_2=a/3$*, то* Γ *имеет массив пересечений* $\{702,700,14;1,14,675\}$*;*

(5) *если* $\theta_2=b-c_2$*, то* Γ *имеет массив пересечений* $\{b(b+1),(b-1)(b+2),2;1,2,b^2-1\}$, $b=2,3,5,8,23$*;*

(6) *если* $\theta_2=(b-c_2)/t$, $t>1$*, то* $c_2=(t+1)(l(t-1)+1)$, $b=(2t-1)l+1$ *и* $\theta_2=l(2-t)-1$, $l>1$, $t>2$.

1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{k,(s-1)c_2,1;1,c_2,k\}$*. Тогда* Γ *имеет спектр* $k^1,n^f,-1^k,-m^g$*, где* $n,-m$ *— корни квадратного уравнения* $x^2-(\lambda-\mu)x-k=0$, $f=m(s-1)(k+1)/(m+n)$ *и* $g=n(s-1)(k+1)/(m+n)$*. Целочисленность кратностей дает условие делимости:* $m+n$ *делит* $(s-1)m(m^2-1)$*, а условие Крейна* $q^3_{33}\ge 0$ *влечет* $m\le n^2$ *в случае* $s>2$.

Доказательство. См. [1, стр. 431]. □

По лемме 1.1 граф с массивом пересечений $\{t(2r+1),(2r-1)(t+1),1;1,t+1,t(2r+1)\}$ имеет спектр $k^1, t^f, -1^k, -(2r+1)^g$, где $f = (2r+1)(2r-1)(2tr+t+1)/(t+2r+1)$, $g = t(2r-1)(2tr+t+1)/(t+2r+1)$ и $2r+t+1$ делит $(2r-1)(2r,t+1)(2r+2,t-1)(t,2r+1)$.

Лемма 1.2. *Пусть* Γ *является графом Шилла с массивом пересечений* $\{a(p+1),(a+1)p,c;1,c,ap\}$. *Тогда кратности неглавных собственных значений графа* Γ *равны:*

$(p+1)(p(p+1)(a^2+a)+(2a(p+1)+p+2)c)/((2a+p+2)c)$,

$1/2\cdot((2a^3+3a^2+a)p^4+4a^4c-4(4c^2-3c)a^3+(4a^4+12a^3+a^2(4c+11)+a(4c+3))p^3+4(4c^3-8c^2+3c)a^2+(2a^5-a^4(8c-11)+(8c^2-12c+19)a^3+(12c^2+4c+13)a^2+(4c^2+8c+3)a)p^2+4(4c^3-4c^2+c)a+(2a^5-a^4(4c-7)-(8c^2-9)a^3+(16c^3-20c^2+12c+5)a^2+(16c^3-12c^2+8c+1)a)p-((a^2+a)p^3-4a^3c+8(c^2-c)a^2-(2a^4-a^3(4c-3)-a^2(6c+1)-2a(c+1))p^2+4(2c^2-c)a-(2a^4-2(4c^2-c)a^2+3a^3-(8c^2-2c+1)a)p)\sqrt{a^2+2(a+1)p+p^2-2a(2c-1)+4c^2-4c+1})/(2a^3c+p^3c-2(4c^2-3c)a^2+4(ac+c)p^2+8c^3+2(4c^3-8c^2+3c)a+(5a^2c+4c^3-2(2c^2-5c)a-4c^2+5c)p-8c^2+2c)$,

$1/2\cdot((2a^3+3a^2+a)p^4+4a^4c-4(4c^2-3c)a^3+(4a^4+12a^3+a^2(4c+11)+a(4c+3))p^3+4(4c^3-8c^2+3c)a^2+(2a^5-a^4(8c-11)+(8c^2-12c+19)a^3+(12c^2+4c+13)a^2+(4c^2+8c+3)a)p^2+4(4c^3-4c^2+c)a+(2a^5-a^4(4c-7)-(8c^2-9)a^3+(16c^3-20c^2+12c+5)a^2+(16c^3-12c^2+8c+1)a)p+((a^2+a)p^3-4a^3c+8(c^2-c)a^2-(2a^4-a^3(4c-3)-a^2(6c+1)-2a(c+1))p^2+4(2c^2-c)a-(2a^4-2(4c^2-c)a^2+3a^3-(8c^2-2c+1)a)p)\sqrt{a^2+2(a+1)p+p^2-2a(2c-1)+4c^2-4c+1})/(2a^3c+p^3c-2(4c^2-3c)a^2+4(ac+c)p^2+8c^3+2(4c^3-8c^2+3c)a+(5a^2c+4c^3-2(2c^2-5c)a-4c^2+5c)p-8c^2+2c)$.

Доказательство. Результат получен с помощью компьютерного упрощения формул из [1, лемма 2.2.6]. □

Лемма 1.3. *Пусть* Γ *является* Q*-полиномиальным графом Шилла относительно* θ_1 *с* $b_2 = c_2$. *Тогда* $\theta_3 = -2r(4r+1)$, $\theta_2 = t-r$, $(r+t)$ *делит* $(2t-1,2r+1)(2t+1,2r-1)(2r^2+r-1)$ *и кратности неглавных собственных значений графа* Γ *равны* $2(4r^2t+2rt+r-t)r/(r+t)$, $2(4r^2t+2rt+r-t)(2rt+t+1)t/((2r^2+t)(r+t))$, $2(2rt+t+1)(2r+1)^2(2r-1)rt/((2r^2+t)(r+t))$.

Доказательство. По [2, следствие 17] граф Шилла является Q-полиномиальным относительно θ_1 тогда и только тогда, когда $\theta_3 = -b(bb_2+c_2)/(b_2+c_2)$. В случае $b_2 = c_2$ имеем $\theta_3 = -b(b+1)/2$. По предложению 1 граф Γ имеет массив пересечений $\{2rt(2r+1),(2r-1)(2rt+t+1),r(r+t);1,r(r+t),t(4r^2-1)\}$, $\theta_3 = -r(2r+1)$ и $\theta_2 = t-r$. Отсюда $(r+t)$ делит $2t(2r+1)(2r-1)(2rt+t+1)$. Так как $(r+t,2r+1) = (2t-1,2r+1)$, $(r+t,2r-1) = -(2t+1,2r-1)$, $(r+t,2rt+t+1) = (r+t,-2r^2-r+1)$, то $(r+t)$ делит $2(r,t)(2t-1,2r+1)(2t+1,2r-1)(2r^2+r-1)$.

Ввиду леммы 1.2 кратности неглавных собственных значений графа Γ равны $2(4r^2t+2rt+r-t)r/(r+t)$, $2(4r^2t+2rt+r-t)(2rt+t+1)t/((2r^2+t)(r+t))$, $2(2rt+t+1)(2r+1)^2(2r-1)rt/((2r^2+t)(r+t))$. □

Лемма 1.4. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* 3 *с собственными значениями* $k = \theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. *Тогда* $\theta_1+\theta_2+\theta_3 = a_1+a_2+a_3-k$, $\theta_1\theta_2\theta_3 = k(b_2-a_3)+a_3c_2$ *и* $(\theta_1+1)(\theta_2+1)(\theta_3+1) = b_1(b_2-a_3-1)$.

Доказательство. Матрица T порядка 3, собственные значения которой совпадают с собственными значениями $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$ графа Γ имеет вид ([1, стр.

130])

$$T = \begin{pmatrix} -1 & b_1 & 0 \\ 1 & k-b_1-c_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3-b_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\theta_1+\theta_2+\theta_3 = Tr(T) = a_1+a_2+a_3-k$ и $\theta_1\theta_2\theta_3 = det(T) = k(b_2-a_3)+a_3c_2$. Наконец, $(\theta_1+1)(\theta_2+1)(\theta_3+1) = det(T+I) = b_1(b_2-a_3-1)$. □

Для графа Шилла с $b_2 = c_2$ имеем $\theta_2+\theta_3 = a_1-2c_2$, $\theta_2\theta_3 = b(c_2-a)+c_2$ и $(\theta_2+1)(\theta_3+1) = (b-1)(c_2-a-1)$.

Лемма 1.5. *Если в графе Шилла $\theta_2 = 0$, то $\theta_3 = b(b_2-a-1)+a-b_2$, $a_2 = (b-1)b_2$, $c_2 = b(a-b_2)$ и $b_2 < a < b_2+b$. В случае $b_2 = c_2$ имеем $b_2 = bs$, $a = (b+1)s$, $s \le b/2$, $\theta_3 = s-b-bs$, Γ имеет массив пересечений $\{b(b+1)s, (bs+s+1)(b-1), bs; 1, bs, (b^2-1)s\}$ и $2s+1$ делит $b(b^2-1)$.*

Доказательство. Для графа Шилла имеем $\theta_2+\theta_3 = a_1+a_2-k$, $\theta_2\theta_3 = (b-1)b_2-a_2$ и $(\theta_2+1)(\theta_3+1) = (b_2-a-1)(b-1)$. Если $\theta_2 = 0$, то $a_2 = (b-1)b_2$ и $\theta_3 = (b_2-a-1)(b-1)-1 = a-b-b_2-c_2$. Поэтому $c_2 = a-b-b_2+1+(a+1-b_2)(b-1)$ и $c_2 = b(a-b_2)$.

Если $a = b_2+b$, то $\theta_3 = -(b+1)(b-1)-1 = -b^2$. По [2, следствие 16] имеем $\theta_3 > -b^2$ и $b_2 < a < b_2+b$.

В случае $b_2 = c_2$ имеем $b_2(1+b) = ab$, $b_2 = bs$, $a = (b+1)s < bs+b$ и $s < b$. Далее, $\theta_3 = a-b-2b_2 = s-b-bs$ и по [2, предложение 15] имеем $\theta_3 \ge -b(b+1)/2$, поэтому $s \le b/2$. В любом случае Γ имеет массив пересечений $\{b(b+1)s, (bs+s+1)(b-1), bs; 1, bs, (b^2-1)s\}$.

Теперь число $m_1 = b(2ab+b+ab^2+b^2-a)/(2a+b+1) = b^2+ab(b^2-1)/(2a+b+1) = b^2+sb(b^2-1)/(2s+1)$ и $2s+1$ делит $b(b^2-1)$. □

2. Q-полиномиальные графы Шилла с $b_2 = c_2$

В этом параграфе предполагается, что Γ является Q-полиномиальным графом Шилла относительно θ_1 с $b_2 = c_2$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{2rt(2r+1), (2r-1)(2rt+t+1), r(r+t); 1, r(r+t), t(4r^2-1)\}$. В случае $t = r$ имеем $r = 1$. Пусть $t > r$.

По лемме 1.1 выполняется сравнение (1):

$(2r-1)(2r,t+1)(2r+2,t-1)(t,2r+1) \equiv\ 0 \pmod{2r+t+1}$.

Лемма 2.1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $r = 1$, то Γ имеет массив пересечений $\{6t, 3t+1, t+1; 1, t+1, 3t\}$, для вершины $u \in \Gamma$ граф $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{3t, t+1, 1; 1, t+1, 3t$ и $t = 3, 5$;*

(2) *если $r = 2$, то Γ имеет массив пересечений $\{20t, 3(5t+1), 2(t+2); 1, 2(t+2), 15t\}$, для вершины $u \in \Gamma$ граф $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{5t, 3(t+1), 1; 1, t+1, 5t\}$ и $t = 4, 7$;*

(3) *если $r = 3$, то Γ имеет массив пересечений $\{42t, 5(7t+1), 3(t+3); 1, 3(t+3), 35t\}$, для вершины $u \in \Gamma$ граф $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{7t, 5(t+1), 1; 1, t+1, 7t\}$ и $t = 3, 4, 7, 10, 13$;*

(4) *если $t = r^2$, то Γ имеет массив пересечений $\{2r^3(2r+1), (2r-1)(2r^3+r^2+1), r^2(r+1); 1, r^2(r+1), r^2(4r^2-1)\}$, для вершины $u \in \Gamma$ граф $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{r^2(2r+1), (2r-1)(r^2+1), 1; 1, r^2+1, r^2(2r+1)\}$ и $r = 5, 11$.*

Доказательство. Пусть $r = 1$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{6t, 3t+1, t+1; 1, t+1, 3t\}$, $t+1$ делит $6t(3t+1)$ и $t = 2, 3, 5, 11$м массивы пересечений.

Для вершины $u \in \Gamma$ граф $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{3t, t+1, 1; 1, t+1, 3t$ и по лемме 1.2 число $2r+t+1$ делит $(2r-1)(t^2-1)(t, 2r+1)$. Отсюда $t+3$ делит $(t^2-1)(t, 3)$ и $t = 3, 5$.

Пусть $r = 2$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{20t, 3(5t+1), 2(t+2); 1, 2(t+2), 15t$, $t+2$ делит $10(t, 2)(9, t+2)$ и $t = 4, 7, 16, 22, 70$.

Для вершины $u \in \Gamma$ граф $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{5t, 3(t+1), 1; 1, t+1, 5t$ и по лемме 1.2 число $2r+t+1$ делит $(2r-1)(t^2-1)(t, 2r+1)$. Отсюда $t+5$ делит $3(t^2-1)(t, 5)$ и $t = 3, 4, 7, 10, 13$. Итак, $t = 4, 7$.

Если $r = 3$, то Γ имеет массив пересечений $\{42t, 5(7t+1), 3(t+3); 1, 3(t+3), 35t\}$, $(t+3)$ делит $2(3, t)(t-1, 4)(2t+1, 5)$ и $(t+3)$ делит 120.

Для вершины $u \in \Gamma$ граф $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{7t, 5(t+1), 1; 1, t+1, 7t\}$ и по лемме 1.2 число $2r+t+1$ делит $(2r-1)(t^2-1)(t, 2r+1)$. Отсюда $t+7$ делит $5(t, 7) \cdot 48$. Итак, $t = 5, 7, 9, 17, 21$.

Пусть $t = r^2$, $r > 2$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{2r^3(2r+1), (2r-1)(2r^3+r^2+1), r^2(r+1); 1, r^2(r+1), r^2(4r^2-1)\}$ и r не делится на 3.

Для вершины $u \in \Gamma$ граф $\Gamma_3(u)$ имеет массив пересечений $\{r^2(2r+1), (2r-1)(r^2+1), 1; 1, r^2+1, r^2(2r+1)\}$ и по лемме 1.2 число $2r+t+1 = (r+1)^2$ делит $(2r-1)(r^4-1)(r^2, 2r+1)$. Отсюда $r+1$ делит 12 и $r = 5, 11$. □

Лемма 2.2. *Число* $r+t$ *делит* $2(r, t)(t-1, r+1)(2t+1, 2r-1)$, *в частности,* $r+t \le 2r(r+1)(2r-1)$.

Доказательство. Из целочисленности кратности $2(4r^2t+2rt+r-t)r/(r+t)$ следует, что $(r+t)$ делит $2(r, t)(4r^2t+2rt+r-t)$, причем $(r+t, 4r^2t+2rt+r-t) = (r+t, -4r^3-2r^2+2r)$. Далее, $4r^2+2r-2 = 2(r+1)(2r-1)$, $(r+t, r+1) = (t-1, r+1)$, $(r+t, 2r-1) = -(2r-1, 2t+1)$, поэтому $(r+t)$ делит $4(r, t)^2(t-1, r+1)(2r-1, 2t+1)$.

По лемме 1.3 число $r+t$ делит $2(r, t)(2t-1, 2r+1)(2t+1, 2r-1)(2r^2+r-1)$, следовательно, $r+t$ делит $2(2, r-1)(r, t)(t-1, r+1)(2t+1, 2r-1)$.

Сложим вторую и третью кратности, получим $2(4r^2+2r-1)(2rt+t+1)t/(r+t)$. Вычитая из этого числа $2t$ первых кратностей, получим, что $r+t$ делит $2t((8r^3t+8r^2t+4r^2+2r-t-1)-(8r^3t+4r^2t+2r^2-2rt)) = 2t(4r^2t+2r^2+2rt+2r-t-1)$ и $r+t$ делит $2(r, t)(r+t, (r+1)(2r-1)^2$. Таким образом, $r+t$ делит $2(r, t)(r+1, t-1)(2t+1, 2r-1)$. □

По лемме 2.2 выполняется сравнение (2):

$2(r, t)(t-1, r+1)(2t+1, 2r-1) \equiv\ 0 \pmod{r+t}$.

Лемма 2.3. *Число* $2r^2+t$ *делит* $2(2r^2, t)(t, r)(2r+1, 2t+1)(4r^2-1, 2t+1)(4r^3+2r^2-1, 2r^2+t)$.

Доказательство. Имеем $(2r^2+t, t) = (2r^2, t)$. Так как $(2r^2+t, 4r^2t+2rt+r-t) = (2r^2+t, (t-r)(2t+1))$, $(2r^2+t, t-r) = (2r^2+r, t-r)$, $(2r+1, t-r) = (2r+1, 2t+1)$, то $(2r^2+t, t-r)$ делит $(t, r)(2r+1, 2t+1)$. Далее, $(2r^2+t, 2t+1) = (4r^2-1, 2t+1)$ и $(2r^2+t, 4r^2t+2rt+r-t)$ делит $(t, r)(2r+1, 2t+1)(4r^2-1, 2t+1)$. Наконец, $(2r^2+t, 2rt+t+1) = (4r^3+2r^2-1, 2r^2+t)$ и из целочисленности второй кратности число $2r^2+t$ делит $2(2r^2, t)(t, r)(2r+1, 2t+1)(4r^2-1, 2t+1)(4r^3+2r^2-1, 2r^2+t)$. □

По лемме 2.3 выполняется сравнение (3):

$$2(2r^2,t)(t,r)(2r+1,2t+1)(4r^2-1,2t+1)(4r^3+2r^2-1,2r^2+t) \equiv 0 \pmod{2r^2+t}.$$

Лемма 2.4. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{2r^2(2r+1)(2lr-(l+1)),(2r-1)(2r^2(2lr-(l+1))+r(2lr-(l+1))+1),r^2l(2r-1);1,r^2l(2r-1),r(2lr-(l+1))(4r^2-1)\}$, Тогда либо $r=1$ и $l\in\{2,4,6\}$, либо $r=2$ и $l=1$.*

Доказательство. По лемме 1.1 в случае $t=r(2lr-(l+1))$ имеем $f=(2r+1)(2r-1)(2r^2(2lr-(l+1))+r(2lr-(l+1))+1)/(r(2lr-(l+1))+2r+1)$ и $f=(2r+1)(2r-1)(4lr^3-2r^2-lr-r+1)/(2lr^2-lr+r+1)$. Так как $(2r+1,2lr^2-lr+r+1)=(2r+1,l+r+1)=(2r+1,2l+1)$, $(2r-1,2lr^2-lr+r+1)=(2r-1,r+1)$ делит 3, $(4lr^3-2r^2-lr-r+1,2lr^2-lr+r+1)=(2lr^2-4r^2-lr-3r+1,2lr^2-lr+r+1)=-(4r^2+4r,2lr^2-lr+r+1)$, $(r+1,2lr^2-lr+r+1)=-(r+1,3l)$, $(r+1)(2l+1)-l(2r+1)=l+r+1$, то $2lr^2-lr+r+1$ делит $36(l+r+1)$.

Если $r\geq 5$, то $2lr^2-lr+r+1>36(l+r+1)$. Если $r=4$, то $28l+5$ делит $9(l+5)$, противоречие. Если $r=1$, то $t=l-1$ и $l\in\{2,4,6\}$. Если $r=2$, то $t=2(3l-1)$ и $l=1$. Если $r=3$, то $t=3(5l-1)$, по теореме 1 имеем $t\in\{5,7,9,17,21\}$, противоречие. □

Из леммы 2.4 следует теорема 2.

Лемма 2.5. *Если $t=\alpha r+\beta$, то*

(1) $2r+t+1=(\alpha+2)r+(\beta+1)$ *делит* $4(2r-1)(r,\beta+1)(r+1,\alpha+1-\beta)(2r+1,\alpha-2\beta)$*, случае* $\beta=-1$ *число* $2r+t+1=(\alpha+2)r$ *делит* $4(2r-1)r(r+1,\alpha+2)(2r+1,\alpha+2)$*;*

(2) $r+t=(\alpha+1)r+\beta$ *делит* $(r,\beta)(r+1,\alpha-\beta+1)(2r-1,\alpha+2\beta+1)$*, в случае* $\beta=-1$ *число* $r+t=(\alpha+1)r-1$ *делит* $(r+1,\alpha+2)(2r-1,\alpha-1)$*;*

(3) $2r^2+t=2r^2+\alpha r+\beta$ *делит* $4(r,\beta)^3(2r+1,\alpha-2\beta-1)^2(2r+1,\alpha+2\beta+1)(4r^3+2r^2-1,2r^2+\alpha r+\beta)$*, в случае* $\beta=-1$ *число* $2r^2+t=2r^2+\alpha r-1$ *делит* $4(2r+1,\alpha+1)^2(2r+1,\alpha-1)(4r^3+2r^2-1,2r^2+\alpha r-1)$.

Доказательство. Пусть $t=\alpha r+\beta$. Тогда $2r+t+1=(\alpha+2)r+(\beta+1)$ делит $(2r-1)(2r,\alpha r+\beta+1)(2r+2,\alpha r+\beta)(\alpha r+\beta,2r+1)$. Так как $((\alpha+2)r+(\beta+1),r)=(r,\beta+1)$, $(2(\alpha+2)r+2(\beta+1),2r+1)=(2r+1,\alpha-2\beta)$, $((\alpha+2)r+(\beta+1),r+1)=(r+1,\alpha+1-\beta)$, то $2r+t+1=(\alpha+2)r+(\beta+1)$ делит $4(2r-1)(r,\beta+1)(r+1,\alpha+1-\beta)(2r+1,\alpha-2\beta)$. В случае $\beta=-1$ число $2r+t+1=(\alpha+2)r$ делит $4(2r-1)r(r+1,\alpha+2)(2r+1,\alpha+2)$. В случае $\alpha=2\beta$ число $2r+t+1=(\beta+1)(2r+1)$ делит $4(2r-1)(r,\beta+1)(r+1,\beta+1)(2r+1)$ и $\beta+1$ делит $4(2r-1)r(r+1)$.

Далее, $r+t=(\alpha+1)r+\beta$ делит $2(r,\alpha r+\beta)(\alpha r+\beta-1,r+1)(2\alpha r+2\beta+1,2r-1)$. Так как $(r,\alpha r+\beta)=(r,\beta)$, $(\alpha r+\beta-1,r+1)=(r+1,\alpha-\beta+1)$, $(2r-1,2\alpha r+2\beta+1)=(2r-1,\alpha+2\beta+1)$, то $r+t=(\alpha+1)r+\beta$ делит $(r,\beta)(r+1,\alpha-\beta+1)(2r-1,\alpha+2\beta+1)$. В случае $\beta=-1$ число $r+t=(\alpha+1)r-1$ делит $(r+1,\alpha+2)(2r-1,\alpha-1)$. В случае $\alpha=2\beta$ число $r+t=(2\beta+1)r+\beta$ делит $(r,\beta)(r+1,\beta+1)(2r-1,4\beta+1)$.

Теперь $2r^2+t=2r^2+\alpha r+\beta$ делит $2(2r^2,\alpha r+\beta)(\alpha r+\beta,r)(2r+1,2alphar+2\beta+1)(4r^2-1,2\alpha r+2\beta+1)(4r^3+2r^2-1,2r^2+\alpha r+\beta)$. Так как $(r,\alpha r+\beta)=(r,\beta)$, $(2r+1,2\alpha r+2\beta+1)=(2r+1,\alpha-2\beta-1)$, $(2r-1,2\alpha r+2\beta+1)=(2r+1,\alpha+2\beta+1)$, то $2r^2+t=2r^2+\alpha r+\beta$ делит $4(r,\beta)^3(2r+1,\alpha-2\beta-1)^2(2r+1,\alpha+2\beta+1)(4r^3+2r^2-1,2r^2+\alpha r+\beta)$. В случае $\beta=-1$ число $2r^2+t=2r^2+\alpha r-1$ делит

$4(2r+1,\alpha+1)^2(2r+1,\alpha-1)(4r^3+2r^2-1,2r^2+\alpha r-1)$. В случае $\alpha=2\beta$ число $2r^2+t=2r^2+2\beta r+\beta$ делит $4(r,\beta)^3(2r+1,4\beta+1)(4r^3+2r^2-1,2r^2+2\beta r+\beta)$. $\square$

При $\beta=-1$, $\alpha=2r$ выполняются все сравнения $(1-3)$. При $\beta=-1$, $\alpha=4r$ выполняется сравнение (1), при $\beta=-1$, $\alpha=4r^2$ выполняется сравнение (3) и $r+t=4r^3+r-1$ делится на $(2r-1,\alpha-1)$.

Лемма 2.6. *Если $t=2r^2-1$, то Γ имеет массив пересечений $\{2r(2r^2-1)(2r+1),(2r-1)(2r(2r^2-1)+2r^2),r(2r^2+r-1);1,r(2r^2+r-1),(2r^2-1)(4r^2-1)\}$ и спектр $(2r(2r^2-1)(2r+1))^1,(2r(2r^2-1))^{2(4r^2-1)r},(2r^2-r-1)^{4(2r^2-1)(2r-1)(r+1)r},(-r(2r+1))^{4(2r^2-1)(2r+1)r^2}$, для вершины u из Γ подграф $\Gamma_3(u)$ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{(2r^2-1)(2r+1),2r^2(2r-1),1;1,2r^2,(2r^2-1)(2r+1)\}$ и спектром $((2r^2-1)(2r+1))^1,(2r^2-1)^{(2r+1)(2r-1)^3},-1^{(2r^2-1)(2r+1)},-(2r+1)^{(2r^2-1)(2r-1)^3}$.*

Доказательство. Пусть $t=2r^2-1$. Тогда $2r+t+1=2r(r+1)$ делит $(2r-1,2r^2+1)(2r,2r^2)(2r+2,2r^2-2)(2r^2-1,2r+1)$ $(2r^2+t)=4r^2-1$ делит $2(2r^2,2r^2-1)(r,t)(4r^2-1,2r-1)(4r^2-1,2r+1)^2(4r^3+2r^2-1,4r^2-1)$ $r+t=2r^2+r-1=(r+1)(2r-1)$ делит $2(r,2r^2-1)(4r^2-3,2r+1)(4r^2-1,2r-1)(2r^2+r-1)$.

Таким образом, все кратности собственных значений графов Γ и $\Gamma_3(u)$ являются целыми. $\square$

Из лемм 2.1, 2.6 следует теорема 1.

3. Графы Шилла с $b_2=c_2$ и $\theta_2=0$

В этом параграфе предполагается, что Γ является графом Шилла с $b_2=c_2$ и $\theta_2=0$. По лемме 1.5 имеем $b_2=bs$, $a=(b+1)s$, $s\le b/2$, Γ имеет массив пересечений $\{b(b+1)s,(bs+s+1)(b-1),bs;1,bs,(b^2-1)s\}$ и $2s+1$ делит $b(b^2-1)$.

Лемма 3.1. *Если $2s+1>b-2$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $2s+1=b$, *Γ имеет массив пересечений $\{2s(s+1)(2s+1),2s(2s^2+2s+1),s(2s+1);1,s(2s+1),4s^2(s+1)\}$;*

(2) $2s+1=b+1$, *Γ имеет массив пересечений $\{2s^2(2s+1),(2s-1)(2s^2+s+1),2s^2;1,2s^2,s(4s^2-1)\}$ и не существует при $s>1$.*

Доказательство. Подставляя соответствующие значения $2s+1$ в общее выражение, получим массивы пересечений.

В случае $2s+1=b+1$ по [3] граф не существует при $s>1$.

В случае $2s+1=b$ по [3, таблица 1] получим спектр графа: $(2s(s+1)(2s+1))^1,(2s(s+1))^{4s(s+1)^2+1},0^{2s(4s(s+1)^2+1)},-(2s^2+2s+1)^{4s(s+1)^2}$.

В случае $2s+1=b-1$ по лемме 1.5 получим $\theta_3=a-b-2c_2=s(2s+3)-(2s+2)-4s(s+1)=-(2s^2+3s+2)$. $\square$

В случае $2s+1=b-1$ с помощью компьютерных вычислений получим кратности неглавных собственных значений: $4s^3+14s^2+14s+4$, $2(4s^5+20s^4+37s^3+30s^2+9s)/(2s^2+3s+2)$, $(16s^6+80s^5+152s^4+144s^3+73s^2+19s+2)/(2s^2+3s+2)$. Вычитая из третьей кратности $2s$ вторую, получим, что $(2s^2+3s+2)$ делит $4s^4+24s^3+37s^2+19s+2$. Далее, $4s^4+24s^3+37s^2+19s+2\equiv 18s^3+33s^2+19s+2\equiv 6s^2+s+2$ $(rmmod\ 2s^2+3s+2)$, поэтому $(2s^2+3s+2)$ делит $4(2s+1)$. Так как $(2s^2+3s+2,2s+1)=(2s+2,2s+1)$, то $2s^2+3s+2$ делит 4, противоречие.

Итак, среди массивов пересечений $\{2s(s+1)(2s+3),(2s^2+3s+1)(2s+1),2s(s+1);1,2s(s+1),s(2s+1)(2s+3)\}$ нет допустимых.

Лемма 3.2. *Если $s=1$, то Γ имеет массив пересечений $\{b(b+1),(b+2)(b-1),b;1,b,b^2-1\}$ и $b=2,3,8$. В последнем случае $v=783=1+72+630+80$ и Γ имеет спектр $72^1,9^{232},0^{406}-15^{144}$.*

Доказательство. С помощью компьютерных вычислений получим кратности неглавных собственных значений: $(b^3+3b^2-b)/3$, $1/3\cdot(b^4+4b^3+5b^2+2b)/(2b-1)$, $(b^4+4b^3-7b+2)/(2b-1)$. Отсюда $2b-1$ делит $5b^2+9b-2$. Так как $(2b-1,10b^2+18b-4)=(2b-1,23b-4)$, то $2b-1$ делит 15 и $b=2,3,8$. □

Лемма 3.3. *Если $s=2$, то Γ имеет массив пересечений $\{2b(b+1),(2b+3)(b-1),2b;1,2b,2(b^2-1)\}$ и $b=4,5,44$.*

Доказательство. С помощью компьютерных вычислений получим кратности неглавных собственных значений: $(4b^4+12b^3-5b^2-17b+6)/(3b-2)$, $(2b^3+5b^2-2b)/5$, $2/5\cdot(2b^4+7b^3+8b^2+3b)/(3b-2)$. Отсюда 5 делит $b(b^2-1)$. Далее, $3b-2$ делит $2b^3+21b^2+23b-6$ и $(b,3b-2)$ делит 2. Имеем сравнения $6b^2+63b+42\equiv 67b+42\equiv 55b+50 \pmod{3b+2}$, $33b+30\equiv 52 \pmod{3b+2}$, поэтому $3b-2$ делит $20\cdot 13$ и $b=4,5,18,44$. При $b=18$ кратность $2/5\cdot(2b^4+7b^3+8b^2+3b)/(3b-2)$ равна $9747/5$, противоречие. □

Лемма 3.4. *Если $s=3$, то Γ имеет массив пересечений $\{3b(b+1),(3b+4)(b-1),3b;1,3b,3(b^2-1)\}$ и $b=6,7,27,57,132$.*

Доказательство. С помощью компьютерных вычислений получим кратности неглавных собственных значений: $9b^4+24b^3-14b^2-31b+12)/(4b-3)$, $(3b^3+7b^2-3b)/7$, $3/7\cdot(3b^4+10b^3+11b^2+4b)/(4b-3)$. Отсюда 7 делит $(b(b^2-1)$. Далее, $4b-3$ делит $6b^3+47b^2+27b$ и $(b,4b-3)$ делит 3. Имеем сравнения $12b^2+94b+54\equiv 103b+54\equiv 95b+60 \pmod{4b-3}$, $76b+48\equiv 105 \pmod{4b-3}$, поэтому $4b-3$ делит $35\cdot 45$ и $b=6,7,27,57,132$. □

4. Графы Шилла с $b_2=c_2$ и $a_1=1$

В этом параграфе предполагается, что Γ является графом Шилла с $b_2=c_2$ и $a_1=1$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{b(b+1),(b-1)(b+2),c_2;1,c_2,b^2-1\}$, целые собственные значения и не является Q-полиномиальным. Из целочисленности собственных значений следует, что c_2 делит $(b-1)b^2(b+2)$, поэтому c_2 делит $b(b-1)(b+2)$. Далее, $4(b-1)^2-4(b-1)(c_2-3)+4c_2^2-12c_2+9=(2b+1)^2+(b+2-2c)^2-(b+2)^2$ является квадратом.

Лемма 4.1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $\theta_2+\theta_3=1-2c_2$, $\theta_2\theta_3=(b+1)(c_2-b)$ *и* $(\theta_2+1)(\theta_3+1)=(b-1)(c_2-b-2)$;

(2) *если* $|\theta_2|\le 1$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{6,4,2;1,2,3\}$, $\{12,10,2;1,2,8\}$, $\{12,10,3;1,3,8\}$ *или* $\{72,70,8;1,8,63\}$;

(3) *если* $\theta_2=a/2$, *то* $4c_2=(3b+1)/2$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{182,180,5;1,5,168\}$.

Доказательство. По лемме 1.1 имеем $\theta_2+\theta_3=1-2c_2$, $\theta_2\theta_3=b(c_2-a)+c_2=(b+1)(c_2-b)$ и $(\theta_2+1)(\theta_3+1)=(b-1)(c_2-b-2)$.

Граф с $\theta_2=-1$ имеет массив пересечений $\{35,32,8;1,8,28\}$ и $a_1=2$. Если $\theta_2=0$, то по лемме 2.2 имеем $c_2=b$ и $b=2,3,8$.

Если $\theta_2 = 1$, то по лемме 1.4 имеем $c_2 = b(b+1)/(b+3)$. Отсюда $b = 3$ и Γ имеет массив пересечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$.

Пусть $|\theta_2| \geq 2$. Тогда $|\theta_3| \leq (b+1)|c_2 - b|/2$.

Если $\theta_2 = a/2$, то $\theta_3 = 2(c_2-b)$ и $\theta_2+\theta_3 = 1-2c_2 = (b+1)/2+2(c_2-b)$. Отсюда $4c_2 = (3b+1)/2$. Так как $(3b+1, b-1)$ делит 4, $(3b+1, b+1)$ делит 2 и $(3b+1, b+2)$ делит 5, то $3b+1$ делит 40, $c_2 = 5$, $b = 13$ и Γ имеет массив пересечений $\{182, 180, 5; 1, 5, 168\}$. Противоречие с тем, что некоторое собственное значение графа имеет нецелую кратность. □

Лемма 4.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $\theta_2 = a/3$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{702, 700, 14; 1, 14, 675\}$.

(2) *если* $\theta_2 = b - c_2$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{b(b+1), (b-1)(b+2), 2; 1, 2, b^2-1\}$, $b = 2, 3, 5, 8, 23$;

(3) *если* $\theta_2 = (b-c_2)/t$, $t > 1$, *то* $c_2 = (t+1)(l(t-1)+1)$, $b = (2t-1)l+1$ *и* $\theta_2 = l(2-t)-1$, $l > 1$, $t > 2$.

Доказательство. Если $\theta_2 = a/3$, то $\theta_3 = 3(c_2 - b)$ и $\theta_2 + \theta_3 = 1 - 2c_2 = (b+1)/3 + 3(c_2 - b)$. Отсюда $5c_2 = (8b+2)/3$.

Так как $(4b+1, b-1)$ делит 5, $(4b+1, b+1)$ делит 3 и $(4b+1, b+2)$ делит 7, то $4b+1$ делит 105, $c_2 = 14$ и $b = 26$

Если $\theta_2 = b - c_2$, то $\theta_3 = -a$ и $\theta_2 + \theta_3 = 1 - 2c_2 = -1 - c_2$. Отсюда $c_2 = 2$ и Γ имеет массив пересечений $\{b(b+1), (b-1)(b+2), 2; 1, 2, b^2-1\}$. С помощью компьютерных вычислений получим кратности неглавных собственных значений: $(b^4 + b^3 + 2b^2 + 2b)/6$, $1/2 \cdot (b^5 + b^4 + 2b^2 - 4b)/(2b-1)$, $1/6 \cdot (b^5+5b^4+9b^3+7b^2+2b)/(2b-1)$. Отсюда $2b-1$ делит $4b^4+9b^3+5b^2+6b$). Ввиду сравнений $4b^4+9b^3+5b^2+6b \equiv 11b^3+5b^2+6b \equiv 21b^2+12b \equiv 45b$ $(rmmod\ 2b-1)$, число $2b-1$ делит 45 и $b = 2, 3, 5, 8, 23$.

Если $\theta_2 = (b-c_2)/t$, то $\theta_3 = -ta$ и $\theta_2 + \theta_3 = 1 - 2c_2 = (b-c_2)/t - t(b+1) = -((t^2-1)b+t^2+c_2)/t$. Отсюда $(2t-1)c_2 = (t^2-1)b+(t^2+t) = (t+1)((t-1)b+t)$, поэтому $c_2 = (t+1)s$ и $(2t-1)s = (t-1)b+t$. Таким образом, $(t-1)b = (2t-1)s-t$, $s-1 = l(t-1)$, $c_2 = (t+1)(l(t-1)+1)$, $b = (2t-1)l+1$ и $s = l(t-1)+1$ делит $(b-1)b(b+2)$. Имеем $(s, b-1) = (l(t-1)+1, (2t-1)l) = (l-2, 2t-2)$ делит $2(l-2, t-1)$, $(s, b) = (l(t-1)+1, (2t-1)l+1) = (l(t-1)+1, tl) = (l-1, t)$, $(s, b+2) = (l(t-1)+1, (2t-1)l+3) = (l(t-1)+1, l+1) = (l+1, t+2)$. Так как $(\theta_2+1)(\theta_3+1) = (b-1)(c_2-b-2)$, то $t(b-1)(c_2-b-2) = (b-c_2+t)(1-t(b-1))$. Далее, $c_2 = 2tb+b-t$ и $b-1$ делятся на $t+1$, поэтому $3l$ делится на $t+1$.

В случае $l = 1$ имеем $b = 2t$, $c_2 = t(t+1)$, $\theta_3 = -b(b+1)/2$ и Γ является Q-полиномиальным графом. По лемме 1.6 получим $q = t+1, r = 1$ и $k = 6t, b_1 = 3(3t+1)$, противоречие.

В случае $t = 2$ имеем $c_2 = b+2$, $\theta_2 = -1$ и Γ имеет массив пересечений $\{b(b+1), (b-1)(b+2), b+2; 1, b+2, b^2-1\}$. Теперь граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{b^2-1}(b^2+b, b-1)$ и $2b+1$ делит $b^2(b^2+b+1)$, противоречие. □

Из лемм 4.1–4.2 следует предложение 3.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989. MR1002568

[2] J.H. Koolen, J. Park, *Shilla distance-regular graphs*, Europ. J. Comb., **31**:8 (2010), 2064–2073. MR2718281

[3] A. Jurisic, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr, **65**:1–2 (2012), 29–47. MR2943642

[4] J. Vidali, *Kode v razdaljno regularnih grafih*, Doctorska Dissertacija, Ljubljana, Univerza v Ljubljani, 2013.

Alexander Alekseevich Makhnev
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S.Kovalevskaya Str.
620990, Yekaterinburg, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Ivan Nikolaevich Belousov
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S.Kovalevskaya Str.
620990, Yekaterinburg, Russia
E-mail address: i_belousov@mail.ru