S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1153–1187 (2017) УДК 512.552.4

DOI 10.17377/semi.2017.14.099 MSC 16R10

СТРОЕНИЕ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И ТОЖДЕСТВА КОНЕЧНОМЕРНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ R С УСЛОВИЕМ $dim\, R^N/R^{N+1} = 2$

Е.П. ПЕТРОВ

Abstract. In this paper we describe structure and defining relations of 2-generated nilpotent algebra R over arbitrary field with condition $dim R^N/R^{N+1} = 2$ for some natural number $N \geq 3$. It is proved that such algebra R over a field of characteristic not two satisfies the standard identity of much smaller degree than N (for large values of N).

Keywords: defining relations, identities, nilpotent algebra.

1. Введение

В работе [1] было показано, что всякая ассоциативная нильпотентная конечномерная алгебра R над произвольным полем с условием $dim\, R^2/R^3 = 2$ удовлетворяет стандартному тождеству степени четыре

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = 0.$$

Причем эта оценка является точной.

С целью обобщения указанного результата здесь мы проводим исследование ассоциативной нильпотентной конечномерной алгебры R, удовлетворяющей для некоторого натурального числа $N \geq 3$ условию: $dim\, R^N/R^{N+1} = 2$, выясняя ее строение, определяющие соотношения и тождества.

2. Предварительные замечания и определения

В данной работе мы будем предполагать, что R – нильпотентная конечномерная алгебра R над полем F с условием $dim\, R^N/R^{N+1} = 2$, $N \geq 3$.

Petrov, E.P., Structure, defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $dim\, R^N/R^{N+1} = 2$.

Поступила 13 июля 2017 г., опубликована 22 ноября 2017 г.

Причем поле F будем считать произвольным, если не оговорено иное.

Напомним также некоторые определения и обозначения из работ [1], [2].

Будем называть типом алгебры R (данное понятие введено автором в работе [2] лишь применительно к конечномерным нильпотентным алгебрам) следующую строчку натуральных чисел: $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{m-1})$, где $s_i = dim\, R^i/R^{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$, m – индекс нильпотентности алгебры R.

Типу алгебры R соответствует следующая базис-таблица:

$$\begin{array}{|c|}\hline v_1^{(1)} \\ \hline v_2^{(1)} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{s_1}^{(1)} \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{|c|}\hline v_1^{(2)} \\ \hline v_2^{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{s_2}^{(2)} \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{|c|}\hline v_1^{(3)} \\ \hline v_2^{(3)} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{s_3}^{(3)} \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{|c|}\hline \ldots \\ \hline \ldots \\ \hline \vdots \\ \hline \ldots \\ \hline \end{array}\quad \begin{array}{|c|}\hline v_1^{(m-1)} \\ \hline v_2^{(m-1)} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{s_{m-1}}^{(m-1)} \\ \hline \end{array}\ ,$$

под которой мы понимаем описание базиса алгебры R, где элементы i-го столбца – базис R^i по модулю R^{i+1}, $i = 1, \ldots, m-1$.

В работе будем рассматривать хорошо известные тождества:

$p_k^\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_1 x_2 \cdots x_k - x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0$ (перестановочное тождество),

$S_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum\limits_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} = 0$, (стандартное тождество), где подстановка σ пробегает симметрическую группу S_k.

Если S — подмножество алгебры R, то через $\langle S \rangle$ будем обозначать подалгебру, порожденную S. Если $x \in R, x \notin R^i$ то, рассматривая его образ в R/R^i, условимся вместо $x + R^i$ писать x там, где это не вызовет недоразумений.

Через $\lfloor x \rfloor$ будем обозначать округление числа x в меньшую сторону (целая часть числа, пол, функция антье), через $\lceil x \rceil$ будем обозначать округление числа x в большую сторону (потолок).

3. Строение нильпотентной конечномерной алгебры R над полем с условием $dimR^N/R^{N+1} = 2$

Лемма 1. *Пусть R – конечномерная нильпотентная алгебра над произвольным полем F с условием $dim\, R^N/R^{N+1} = 2,\ N \geq 2$. Тогда можно подобрать такой порождающий a алгебры R, что базисом R^N по* $\mathrm{mod} R^{N+1}$ *является $\{av_1, av_2\}$ или $\{w_1 a, w_2 a\}$ для некоторых $v_1, v_2, w_1, w_2 \in R^{N-1}$.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ – порождающие алгебры R, $s \geq 2$. Базис R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$ можно представить в следующем виде: $\{a_1 v_1, a_2 v_2\}$, где a_1, a_2 – порождающие, $v_1, v_2 \in R^{N-1}$ – слова от порождающих длины $(N-1)$. Заметим, что, если $v_1 = v_2$, то лемма доказана. Поэтому далее считаем, что $v_1 \neq v_2$.

Рассмотрим сравнения

$$a_2 v_1 \equiv \alpha a_1 v_1 + \beta a_2 v_2 \ (\mathrm{mod}\ R^{N+1}), \quad a_1 v_2 \equiv \gamma a_1 v_1 + \delta a_2 v_2 \ (\mathrm{mod}\ R^{N+1}),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$.

Предположим сначала, что $(\alpha, \delta) \neq (0, 0)$. Тогда, в случае $\alpha \neq 0$ базисом R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$ является $\{a_2 v_1, a_2 v_2\}$, в случае $\alpha = 0, \delta \neq 0$ базисом R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$ является $\{a_1 v_1, a_1 v_2\}$.

Предположим, что $(\alpha, \delta) = (0, 0)$, $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$. Тогда, в случае $\beta \neq 0$ базисом R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$ является $\{a_1 v_1, a_2 v_1\} = \{w_1 a_i, w_2 a_i\}$ для некоторых $a_i,\ i \in \{1, \ldots, s\},\ w_1, w_2 \in R^{N-1}$, в случае $\beta = 0, \gamma \neq 0$ базисом R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$

является $\{a_1v_2, a_1v_2\} = \{w_1'a_j, w_2'a_j\}$ для некоторых $a_j,\ j \in \{1,\ldots,s\},\ w_1', w_2' \in R^{N-1}$.

Рассмотрим последний случай, когда $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (0,0,0,0),\ \ a_1v_2,\ a_2v_1 \in R^{N+1}$.

В этом случае взамен a_1 выберем новый порождающий $a = a_1 + a_2$. Вследствие этого элементы av_1, av_2 образуют базис R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$, поскольку справедливы следующие сравнения: $av_1 = (a_1 + a_2)v_1 \equiv a_1v_1 \pmod{R^{N+1}}$,
$av_2 = (a_1 + a_2)v_2 \equiv a_2v_2 \pmod{R^{N+1}}$. Лемма доказана. □

Без ограничения общности далее в работе будем рассматривать только левый вариант базиса $\{av_1,\ av_2\}$.

Лемма 2. [2]. *Пусть R – конечномерная нильпотентная алгебра над произвольным полем F, $\ dimR^N/R^{N+1} = t,\ N \geq 2$, и пусть базис R^N по $\mathrm{mod}R^{N+1}$ имеет вид $\{av_i\},\ i = \overline{1,t}$, где a – порождающий алгебры R, $\ v_i = a_1^{(i)}\cdots a_{N-1}^{(i)}$ – слова от порождающих $a_k^{(i)}$ длины $(N-1)$, $k = \overline{1, N-1}$.*

Тогда, если $dimR^{N+1}/R^{N+2} = t$, то базис R^{N+1} по $\mathrm{mod}R^{N+2}$ имеет вид $\{a^2v_i\}$, где $i = \overline{1,t}$.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ – порождающие алгебры R. Тогда имеет место следующее равенство:

$$R^{N+1} = \sum_{l=1}^{s} F\Big(\sum_{i=1}^{t} av_i\Big)a_l + R^{N+2}.$$

Для некоторого порождающего $a_l,\ \ l \in \{1,\ldots,s\}$, имеем, что

$$av_i \cdot a_l = a(v_ia_l) \equiv a(\sum_{p=1}^{t}\alpha_p av_p) = \sum_{p=1}^{t}\alpha_p(a^2v_p) \pmod{R^{N+2}},$$

где $\alpha_p \in F,\ p = \overline{1,t}$.

Таким образом, $R^{N+1} = \sum\limits_{i=1}^{t} Fa^2v_i + R^{N+2}$. Лемма доказана. □

Замечание. Нетрудно видеть, что случай, когда $dimR^{N+1}/R^{N+2} > t$, невозможен; если $dimR^{N+1}/R^{N+2} < t$, то базис R^{N+1} по $\mathrm{mod}R^{N+2}$ выбирается из множества элементов $\{a^2v_i\},\ i = \overline{1,t}$.

Лемма 3. [3]. *Пусть R – конечномерная нильпотентная алгебра индекса m над произвольным полем и $dimR^i/R^{i+1} = 1,\ i \neq m-1$.*

Тогда для любого числа j такого, что $i < j \leq m-1$, справедливо равенство $dimR^j/R^{j+1} = 1$. Более того, существует порождающий элемент $a \in R$ такой, что $R^j = Fa^j + R^{j+1}$ для всех чисел $j,\ \ i < j \leq m-1$.

В дальнейшем нам понадобится следующее предложение из работы [2]:

Предложение 1. [2]. *Пусть R – конечномерная нильпотентная алгебра индекса m над произвольным полем и для некоторого $i \in \{1,\ldots,m-1\}$ удовлетворяет условию $dimR^i/R^{i+1} = 1$. Тогда алгебра R удовлетворяет тождествам $p_{i+1}^{\sigma}(x_1,\ldots,x_{i+1}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{i+1}$.*

Лемма 4. *Пусть R – конечномерная нильпотентная алгебра над произвольным полем F с условием $dimR^N/R^{N+1} = dimR^{N+1}/R^{N+2} = 2,\ N \geq 2$.*

Тогда найдутся такие порождающие a, b *алгебры* R, *что базисом* R^N *по* $\mathrm{mod} R^{N+1}$ *является* $\{a^N, a^{N-1}b\}$.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ – порождающие алгебры R. Согласно лемме 1 базис R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$ имеет вид $\{aa_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-1}},\ aa_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-1}}\}$, где $a, a_{i_k}, a_{j_k} \in \{a_1, a_2, \ldots, a_s\},\ k = \overline{1, N-1}$.

Тогда по лемме 2 элементы $\{a^2a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-1}},\ a^2a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-1}}\}$ составляют базис R^{N+1} по $\mathrm{mod} R^{N+2}$.

Поэтому $a^2a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-2}} \notin R^{N+1}$ и, значит, имеет место сравнение
$a^2a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-2}} \equiv \alpha\ aa_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-1}} + \beta\ aa_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-1}}\ (\mathrm{mod}\ R^{N+1})$,
где $(\alpha, \beta) \neq 0$.

Отсюда следует, что либо $\{a^2a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-2}},\ aa_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-1}}\}$, либо
$\{a^2a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-2}},\ aa_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-1}}\}$ является базисом R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$.

Не ограничивая общность, далее считаем, что базисом R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$ является $\{a^2a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-2}},\ aa_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-1}}\}$.

Тогда по лемме 2 имеем, что базисом R^{N+1} по $\mathrm{mod} R^{N+2}$ является
$\{a^3a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-2}},\ a^2a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-1}}\}$.

Следовательно, $a^3a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-3}} \notin R^{N+1}$ и, значит, имеет место сравнение
$a^3a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-3}} \equiv \gamma\ a^2a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-2}} + \delta\ aa_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-1}}\ (\mathrm{mod}\ R^{N+1})$,
где $(\gamma, \delta) \neq 0$.

Отсюда следует, что либо $\{a^3a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-3}},\ a^2a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-2}}\}$, либо
$\{a^3a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{N-3}},\ aa_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-1}}\}$ является базисом R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$.

Продолжая этот процесс, получим, что базисом R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$ является $\{a^N,\ a^ka_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-k}}\}$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, N-1\}$.

Если $k = N-1$, то все доказано.Пусть $k < N-1$.

По лемме 2 имеем, что $\{a^{N+1},\ a^{k+1}a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-k}}\}$ является базисом R^{N+1} по $\mathrm{mod} R^{N+2}$, поэтому $a^{k+1}a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-k-1}} \notin R^{N+1}$ и имеет место сравнение $a^{k+1}a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-k-1}} \equiv \mu\ a^N + \nu\ a^ka_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-k}}\ (\mathrm{mod}\ R^{N+1})$, где $(\mu, \nu) \neq 0$.

Если $\nu \neq 0$, то базисом R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$ является $\{a^N,\ a^{k+1}a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-k-1}}\}$.

Рассмотрим далее случай, когда $\nu = 0, \mu \neq 0$.

В этом случае имеет место сравнение $a^{k+1}a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-k-1}} \equiv \mu a^N\ (\mathrm{mod}\ R^{N+1})$ и, следовательно, $a^{k+1}a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-k-1}} \cdot a_{j_{N-k}} \equiv \mu a^N \cdot a_{j_{N-k}}\ (\mathrm{mod}\ R^{N+2})$.

Поэтому $a^{N-1}a_{j_{N-k}} \notin R^{N+1}$ и, значит, имеет место сравнение
$a^{N-1}a_{j_{N-k}} \equiv \mu_1\ a^N + \nu_1\ a^ka_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-k}}\ (\mathrm{mod}\ R^{N+1})$, где $(\mu_1, \nu_1) \neq 0$.

Если $\nu_1 \neq 0$, то базисом R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$ является $\{a^N,\ a^{N-1}a_{j_{N-k}}\}$ и все доказано.

Покажем далее, что случай, когда $\nu_1 = 0$, невозможен.

Действительно, если $\nu_1 = 0$, то $a^{N-1}a_{j_{N-k}} \equiv \mu_1\ a^N\ (\mathrm{mod}\ R^{N+1})$ и
$a^Na_{j_{N-k}} \equiv \mu_1\ a^{N+1} \equiv \dfrac{1}{\mu}a^{k+1}a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-k}}\ (\mathrm{mod}\ R^{N+1})$. Получили противоречие с тем, что $\{a^{N+1},\ a^{k+1}a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-k}}\}$ – базис R^{N+1} по $\mathrm{mod} R^{N+2}$.

Таким образом, базисом R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$ является либо $\{a^N,\ a^{N-1}a_{j_{N-k}}\}$, либо $\{a^N,\ a^{k+1}a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{N-k-1}}\}$.

Продолжая этот процесс, получим, что базисом R^N по $\mathrm{mod} R^{N+1}$ является $\{a^N, a^{N-1}b\}$ для некоторого $a_{j_p} = b,\ p \in \{1, \ldots, N-1\}$.

Лемма доказана. □

Исходя из утверждений лемм 1-4 мы можем получить общее представление о строении алгебры R.

Предложение 2. *Пусть R – конечномерная нильпотентная алгебра над произвольным полем F с условием $dimR^N/R^{N+1} = dimR^{N+1}/R^{N+2} = 2,\ N \geq 2$.*

Тогда алгебра R имеет тип

$$\Big(s_1+2,\ s_2+2,\ \ldots\ ,\ s_{N-1}+2,\ \underbrace{2,\ \ldots\ ,\ 2}_{k-N+2},\ \underbrace{1,\ \ldots\ ,\ 1}_{t-1}\Big)$$

и следующую базис-таблицу:

a	a^2	$\ldots$	a^{N-1}	a^N	$\ldots$	a^k	a^{k+1}	a^{k+2}	$\ldots$	a^{k+t}
b	ab	$\ldots$	$a^{N-2}b$	$a^{N-1}b$	$\ldots$	$a^{k-1}b$	$a^k b$			
c_1	$v_1^{(2)}$	$\ldots$	$v_1^{(N-1)}$							
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
c_{s_1}	$v_{s_2}^{(2)}$	$\ldots$	$v_{s_{N-1}}^{(N-1)}$							

,

где $s_i+2 = dimR^i/R^{i+1},\ i = \overline{1, N-1},\ \ k \geq N,\ \ t \geq 0,\ \ k+t+1$ – индекс нильпотентности алгебры R.

Доказательство следует из лемм 1-4.

4. Определяющие соотношения от порождающих $a,\ b$ в алгебре R

В этой части работы в каждом из утверждений мы будем предполагать, что R – нильпотентная конечномерная алгебра R над полем F с условием $dimR^N/R^{N+1} = dimR^{N+1}/R^{N+2} = 2,\ N \geq 3$, и изучать определяющие соотношения, выполняющиеся в алгебре R, только от порождающих $a,\ b$.

Очевидно, что одними из основополагающих соотношений от порождающих $a,\ b$ являются следующие равенства:

$$a^{N-2}ba = Aa^N + Ba^{N-1}b, \tag{1}$$

$$a^{N-2}b^2 = Ca^N + Da^{N-1}b, \tag{2}$$

$$a^{k+1}b = Ea^{k+2}, \tag{3}$$

где $A = \sum\limits_{p=1}^{k+t-N+1} \alpha_p a^{p-1},\ B = \sum\limits_{p=1}^{k-N+2} \beta_p a^{p-1},\ C = \sum\limits_{p=1}^{k+t-N+1} \gamma_p a^{p-1}$, $D = \sum\limits_{p=1}^{k-N+2} \delta_p a^{p-1},\ E = \sum\limits_{p=1}^{t-1} \nu_p a^{p-1},\ \alpha_p,\ \beta_p,\ \gamma_p,\ \delta_p,\ \nu_p \in F$.

Заметим, что элементы $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ принадлежат подалгебре $\langle a\rangle^1$ с присоединенной единицей, порожденной элементом a, и, поскольку a – нильпотентный элемент, обратимость какого-либо из элементов $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ равносильна наличию у него ненулевого "свободного члена".

Заметим, что если $A \neq 0$, то $A = \widetilde{A}a^{l-1}$, где $\widetilde{A}$ – обратим, a^{l-1} – самая маленькая степень с ненулевым коэффициентом, $l \in \{1, \ldots, k+t-N+1\}$.

Оказывается, что при подходящей замене порождающего b можно значительно упростить соотношения (1) – (3).

Лемма 5. *Можно подобрать порождающий элемент b' так, что в алгебре R соотношения (1), (3) принимают следующий вид:*

1) в случае $\beta_1 \neq 1$: $\quad a^{N-2}b'a = Ba^{N-1}b', \quad a^{k+1}b = Ea^{k+2}$;

2) в случае $B = 1$ $\ (\beta_1 = 1,\ \beta_2 = \dots = \beta_{k-N+2} = 0)$:

$$a^{N-2}b'a = \alpha a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b', \qquad a^{k+1}b' = 0,$$

где $\alpha \in \{0,1\}$, $\ l \in \{1,\dots,k+t-N+1\}$;

3) в случае $\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = \dots = \beta_{n-1} = 0,\ \beta_n \neq 0$ для некоторого $n \in \{2,\dots,k-N+2\}$:

3.1) при $\ l \geq n$: $\ a^{N-2}b'a = Ba^{N-1}b', \quad a^{k+1}b = Ea^{k+2}$;

3.2) при $\ l < n$:

либо $\ a^{N-2}b'a = Ba^{N-1}b', \quad a^{k+1}b = Ea^{k+2}$;

либо $\ a^{N-2}b'a = a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b', \qquad a^{k+1}b' = 0$,

где $\ l \in \{1,\dots,k+t-N+1\}$.

Доказательство. Пусть $b' = Xa + Yb$, где X, Y – неизвестные пока элементы подалгебры $\langle a\rangle^1$, Y – обратим.

Тогда с учетом соотношения (1) имеем, что

$$\begin{gathered} a^{N-2}b'a = a^{N-2}Xa + a^{N-2}Yba = Xa^N + Ya^{N-2}ba = \\ = Xa^N + Y\big(Aa^N + Ba^{N-1}b\big) = Xa^N + YAa^N + Ba^{N-1}\big(Yb\big) = \\ = Xa^N + YAa^N + Ba^{N-1}\big(b' - Xa\big) = Xa^N + YAa^N - XBa^N + Ba^{N-1}b' = \\ = \Big(X\big(1-B\big) + YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b'. \end{gathered}$$

Рассмотрим далее равенство $a^{N-2}b'a = \Big(X\big(1-B\big) + YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b'$ при различных значениях коэффициентов $\beta_p \in F$ элемента B.

Случай 1. $\ \beta_1 \neq 1$.

В этом случае элемент $(1-B)$ обратим, поэтому при любом Y мы сможем найти такой X, чтобы выполнялось равенство $X(1-B)+YA = 0$. Это означает, что $a^{N-2}b'a = Ba^{N-1}b'$ и первое утверждение леммы доказано.

Случай 2. $B = 1$, то есть $\beta_1 = 1,\ \ \beta_2 = \dots = \beta_{k-N+2} = 0$.

Если $A = 0$, то, для любого Y полагая $X = -YE$, получим, что

$a^{N-2}b'a = \Big(X\big(1-B\big) + YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b' = 0 + Ba^{N-1}b' = Ba^{N-1}b'$,

$a^{k+1}b' = Xa^{k+2} + Ya^{k+1}b = \big(X + YE\big)a^{k+2} = \big(-YE + YE\big)a^{k+2} = 0$.

Если $A \neq 0$, то положим $X = -\widetilde{A}^{-1}E,\ \ Y = \widetilde{A}^{-1}$. Тогда получим, что

$a^{N-2}b'a = \Big(X\big(1-B\big) + YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b' = \Big(0 + \widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}a^{l-1}\Big)a^N + Ba^{N-1}b' = = a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b'$,

$a^{k+1}b' = Xa^{k+2} + Ya^{k+1}b = \big(X + YE\big)a^{k+2} = \big(-\widetilde{A}^{-1}E + \widetilde{A}^{-1}E\big)a^{k+2} = 0$.

Второе утверждение леммы доказано.

Случай 3. $\ \beta_1 = 1,\ \ \beta_2 = \dots = \beta_{n-1} = 0,\ \beta_n \neq 0$ для некоторого $n \in \{2,\dots,k-N+2\}$.

В этом случае элемент B можно представить в виде

$$B = \sum_{p=1}^{k-N+2} \beta_p a^{p-1} = 1 + \sum_{p\geq n} \beta_p a^{p-1} = 1 + \Big(\sum_{p\geq n} \beta_p a^{p-n}\Big)a^{n-1} = 1 + B_1 a^{n-1},$$

где B_1 – обратим.

Если $A = 0$, то, полагая $X = 0$, для любого Y имеем, что $a^{N-2}b'a = Ba^{N-1}b'$.

При $A \neq 0$ возможны следующие варианты: $\ l \geq n$ или $\ l < n$.

Если $l \geq n$, то получим, что $a^{N-2}b'a = \Big(X\big(1-B\big)+YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b' = \Big(-XB_1a^{n-1}+Y\widetilde{A}a^{l-1}\Big)a^N + Ba^{N-1}b' = \Big(-XB_1+Y\widetilde{A}a^{l-n}\Big)a^{N+n-1}+Ba^{N-1}b'$.

Поскольку элемент B_1 обратим, то при любом Y мы сможем найти такой X, чтобы выполнялось равенство $\Big(-XB_1+Y\widetilde{A}a^{l-n}\Big)=0$. Это означает, что $a^{N-2}b'a = Ba^{N-1}b'$ и утверждение (3.1) леммы доказано.

Если $l < n$, то полагая $X = -\Big(B_1Ea^{n-l}+\widetilde{A}\Big)^{-1}E$, $Y = \Big(B_1Ea^{n-l}+\widetilde{A}\Big)^{-1}$, получим, что

$$a^{N-2}b'a = \Big(X\big(1-B\big)+YA\Big)a^N + Ba^{N-1}b' =$$
$$= \big(-XB_1a^{n-1}+Y\widetilde{A}a^{l-1}\big)a^N+Ba^{N-1}b' = \big(-XB_1a^{n-l}+Y\widetilde{A}\big)a^{l+N-1}+Ba^{N-1}b' =$$
$$= \Big(\big(B_1Ea^{n-l}+\widetilde{A}\big)^{-1}EB_1a^{n-l} + \big(B_1Ea^{n-l}+\widetilde{A}\big)^{-1}\widetilde{A}\Big)a^{l+N-1}+Ba^{N-1}b' =$$
$$= \big(B_1Ea^{n-l}+\widetilde{A}\big)^{-1}\big(EB_1a^{n-l}+\widetilde{A}\big)a^{l+N-1}+Ba^{N-1}b' = a^{l+N-1}+Ba^{N-1}b',$$

$$a^{k+1}b' = Xa^{k+2}+Ya^{k+1}b = \big(X+YE\big)a^{k+2} =$$
$$= \Big(-\big(B_1Ea^{n-l}+\widetilde{A}\big)^{-1}E + \big(B_1Ea^{n-l}+\widetilde{A}\big)^{-1}E\Big)a^{k+2} = 0.$$

Лемма доказана. □

Далее в тексте мы для удобства будем использовать запись b вместо b' и вместо соотношения (1) будем рассматривать следующее соотношение:

$$a^{N-2}ba = \alpha a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b, \tag{4}$$

где $l \in \{1,\ldots,k+t-N+1\}$, $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ в соответствии с утверждением леммы 5.

Лемма 6. *Если* $\beta_1 \neq 1$, *то в алгебре* R *выполняются соотношения*

$$a^{k+2}b = 0, \quad a^{k+1}b \equiv ba^{k+1} \equiv a^kb^2 \equiv ba^kb \equiv 0 \pmod{R^{k+t}}.$$

Доказательство. Если $t \leq 3$, то лемма доказана. Пусть далее $t > 3$.

Поскольку по предложению 1 алгебра R удовлетворяет перестановочным тождествам $p^{\sigma}_{k+3}(x_1,\ldots,x_{k+3}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{k+3}$, то в R выполняется следующее равенство:

$a^{k+2}b = a^{k+1}ba = a^{k-N+3}(a^{N-2}ba) = a^{k-N+3}(Ba^{N-1}b) = Ba^{k+2}b.$

Отсюда имеем, что $(1-B)a^{k+2}b = 0$, а так как $\beta_1 \neq 1$, то элемент $(1-B)$ обратим и поэтому $a^{k+2}b = 0$.

Рассмотрим равенство $a^{k+1}b = \varepsilon_{k+2}a^{k+2} + \ \ldots\ + \varepsilon_{k+t}a^{k+t}$, $\varepsilon_i \in F$.

Домножая слева на a, получим $a^{k+2}b = \varepsilon_{k+2}a^{k+3} + \ \ldots\ + \varepsilon_{k+t-1}a^{k+t} = 0$,

Откуда следует, что $\varepsilon_{k+2} = \ \ldots\ = \varepsilon_{k+t-1} = 0$, и, следовательно, $a^{k+1}b \equiv 0 \pmod{R^{k+t}}$.

Сравнения $ba^{k+1} \equiv a^kb^2 \equiv ba^kb \equiv 0 \pmod{R^{k+t}}$ доказываются аналогично. Лемма доказана. □

При последующем исследовании алгебры R нам придется довольно часто использовать следующие две вспомогательные леммы:

Лемма 7. *Для любого* $u \in R^N$ *справедливо следующее утверждение:*

$$au \equiv 0 \pmod{R^{k+2}} \ \text{ тогда, и только тогда, когда } \ u \equiv 0 \pmod{R^{k+1}}.$$

Доказательство. Очевидно $u \in R^N$ можно представить в следующем виде:
$u \equiv \varepsilon_1 a^N + \ \dots\ + \varepsilon_{k-N+2} a^{k+1} + \xi_1 a^{N-1} b + \ \dots\ + \xi_{k-N+2} a^k b \pmod{R^{k+2}}$, $\varepsilon_i, \xi_i \in F$.

Предположим, что $au \equiv 0 \pmod{R^{k+2}}$, то есть

$$au \equiv \varepsilon_1 a^{N+1} + \ \dots\ + \varepsilon_{k-N+1} a^{k+1} + \\ + \xi_1 a^{N-1} b + \ \dots\ + \xi_{k-N+1} a^k b \equiv 0 \pmod{R^{k+2}},$$

и, значит, $\varepsilon_1 = \ \dots\ = \varepsilon_{k-N+1} = \xi_1 = \ \dots\ = \xi_{k-N+1} = 0$.

Получим, что $u \equiv 0 \pmod{R^{k+1}}$.

В обратную сторону утверждение очевидно. Лемма доказана. □

Лемма 8. *Если $\beta_1 \neq 1$ или $B = 1$, $t \geq 3$, то для любого $u \in R^N$ справедливо следующее утверждение:*

$$au \equiv 0 \pmod{R^{k+t}} \ \ \textit{тогда, и только тогда, когда} \ \ u \equiv \nu a^k b \pmod{R^{k+t-1}}$$

для некоторого $\nu \in F$.

Доказательство. Элемент $u \in R^N$ можно представить в следующем виде:
$u = \mu_1 a^N + \ \dots\ + \mu_{k+t-N+1} a^{k+t} + \nu_1 a^{N-1} b + \ \dots\ + \nu_{k-N+2} a^k b$, $\mu_i, \nu_i \in F$.

Тогда получим равенство $au = \mu_1 a^{N+1} + \ \dots\ + \mu_{k+t-N} a^{k+t} + \nu_1 a^{N-1} b + \ \dots$ $\dots\ + \nu_{k-N+1} a^k b + \nu_{k-N+2} a^{k+1} b$.

Предположим, что $au \equiv 0 \pmod{R^{k+t}}$.

Поскольку по утверждению (2) леммы 5 и лемме 6 в алгебре R выполняются соотношение $a^{k+1} b = 0$ или, соответственно, $a^{k+1} b \equiv 0 \pmod{R^{k+t}}$, то имеем следующее сравнение:

$$au \equiv \mu_1 a^{N+1} + \ \dots\ + \mu_{k+t-N-1} a^{k+t-1} + \nu_1 a^{N-1} b + \ \dots \\ \dots\ + \nu_{k-N+1} a^k b \equiv 0 \pmod{R^{k+t}},$$

и, значит, $\mu_1 = \ \dots\ = \mu_{k+t-N-1} = \nu_1 = \ \dots\ = \nu_{k-N+1} = 0$.

Получим, что $u \equiv \nu a^k b \pmod{R^{k+t-1}}$ для некоторого $\nu \in F$.

В обратную сторону утверждение очевидно. Лемма доказана. □

Лемма 9. *В алгебре R выполняются по* mod R^{k+1} *следующие соотношения:*

$$a^{N-j} b a^{j-1} \equiv \alpha\bigl(1 + B + \ \dots\ + B^{j-2}\bigr) a^{l+N-1} + B^{j-1} a^{N-1} b, \quad j = \overline{2, N}; \tag{5}$$

$$b a^{N-2} b \equiv B^{N-2} C a^N + \alpha\bigl(1 + B + \ \dots\ + B^{N-3}\bigr) a^{l+N-2} b + B^{N-2} D a^{N-1} b, \tag{6}$$

где $l \in \{1, \dots, k - N + 1\}$, B, C, D из соотношений (2), (4), $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ (в соответствии с утверждением леммы 5).

Доказательство. В соответствии с утверждением леммы 5 в алгебре R выполняется соотношение $a^{N-2} b a = \alpha a^{l+N-1} + B a^{N-1} b$, где $l \in \{1, \dots, k + t - N + 1\}$, $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ в зависимости от конкретных значений коэффициентов $\beta_p \in F$ элемента B.

Домножая указанное равенство справа на a, получим, что $a^{N-2} b a \cdot a = \alpha a^{l+N} + B a^{N-1} b a = \alpha a^{l+N} + B a\bigl(\alpha a^{l+N-1} + B a^{N-1} b\bigr) = \alpha\bigl(1 + B\bigr) a^{l+N} + B^2 a^N b$.

Рассматривая последнее равенство по mod R^{k+2}, с учетом леммы 7 получим следующее сравнение: $a^{N-3} b a^2 \equiv \alpha\bigl(1 + B\bigr) a^{l+N-1} + B^2 a^{N-1} b \pmod{R^{k+1}}$.

Проводя доказательство индукцией по $j > 2$, предположим, что имеет место сравнение
$a^{N-(j-1)} b a^{(j-1)-1} \equiv \alpha\bigl(1 + B + \ \dots\ + B^{j-3}\bigr) a^{l+N-1} + B^{j-2} a^{N-1} b \pmod{R^{k+1}}$.

Тогда, домножая это сравнение справа на a, получим, что

$$a^{N-j+1}ba^{j-1} \equiv \alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{j-3}\big)a^{l+N}+B^{j-2}a^{N-1}b \equiv$$
$$\equiv \alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{j-3}\big)a^{l+N}+B^{j-2}a\big(\alpha a^{l+N-1}+Ba^{N-1}b\big) \equiv$$
$$\equiv \alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{j-2}\big)a^{l+N}+B^{j-1}a^{N}b \pmod{R^{k+2}}.$$

Откуда с учетом леммы 7 имеем, что
$a^{N-j}ba^{j-1} \equiv \alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{j-2}\big)a^{l+N-1}+B^{j-1}a^{N-1}b \pmod{R^{k+1}}$.

Соотношение (4) доказано.

Используя (5), рассмотрим далее следующее сравнение:

$$aba^{N-2}\cdot b \equiv \alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{N-3}\big)a^{l+N-1}b+B^{N-2}a\cdot a^{N-2}b^2 \equiv$$
$$\equiv \alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{N-3}\big)a^{l+N-1}b+B^{N-2}a\big(Ca^{N}+Da^{N-1}b\big) \equiv$$
$$\equiv B^{N-2}Ca^{N+1}+\alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{N-3}\big)a^{l+N-1}b+B^{N-2}Da^{N}b \pmod{R^{k+2}}.$$

Откуда с учетом леммы 7 имеем, что
$ba^{N-2}b \equiv B^{N-2}Ca^{N}+\alpha\big(1+B+\dots+B^{N-3}\big)a^{l+N-2}b+B^{N-2}Da^{N-1}b \pmod{R^{k+1}}$.

Лемма доказана. □

Следствие. *В алгебре R выполняются соотношения*

$$ba^{N+p-2} \equiv \alpha\big(1+\dots+B^{N+p-3}\big)a^{l+N+p-2}+B^{N+p-2}a^{N+p-2}b \pmod{R^{k+2}}, \tag{7}$$

$$ba^{l+N-1} \equiv \alpha\big(1+\dots+B^{l+N-2}\big)a^{2l+N-1}+B^{l+N-1}a^{l+N-1}b \pmod{R^{k+2}}, \tag{8}$$

где $p>1$, $l\in\{1,\dots,k-N+1\}$, $\alpha=0$ *или* $\alpha=1$ *(в соответствии с утверждением леммы 5).*

Доказательство. Из соотношения (5) при $j=N$ имеет место сравнение
$ba^{N-1} \equiv \alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{N-2}\big)a^{l+N-1}+B^{N-1}a^{N-1}b \pmod{R^{k+1}}$.

Тогда, домножая это сравнение справа на a^{p-1}, $p>1$, получим, что

$$ba^{N-1}\cdot a^{p-1} \equiv \alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{N-2}\big)a^{l+N+p-2}+B^{N-1}\cdot a^{p-1}\cdot a^{N-p}ba^{p-1} \equiv$$
$$\equiv \alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{N-2}\big)a^{l+N+p-2}+$$
$$+B^{N-1}a^{p-1}\Big(\alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{p-2}\big)a^{l+N-1}+B^{p-1}a^{N-1}b\Big) \equiv$$
$$\equiv \alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{N-2}\big)a^{l+N+p-2}+$$
$$+\alpha B^{N-1}\big(1+B+\ \dots\ +B^{p-2}\big)a^{l+N+p-2}+B^{N+p-2}a^{N+p-2}b \equiv$$
$$\equiv \alpha\big(1+B+\ \dots\ +B^{N+p-3}\big)a^{l+N+p-2}+B^{N+p-2}a^{N+p-2}b \pmod{R^{k+2}}.$$

Соотношение (7) доказано, соотношение (8) доказывается аналогично. □

Лемма 10. *В алгебре R выполняются следующие соотношения:*

$$B^{N-2}Ca^{N+1}+\alpha B^{N-2}Da^{l+N} \equiv \alpha^2\big(B^{N-2}+\ \dots \tag{9}$$
$$\dots\ +B^{l+N-2}\big)a^{2l+N-1}+\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j B^{N+j-2}Ca^{N+j} \pmod{R^{k+2}},$$

$$B^{N-1}Da^{N}b \equiv \alpha\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j\big(B^{N-2}+\ \dots\ +B^{N+j-3}\big)a^{l+N+j-2}b+ \tag{10}$$
$$+\alpha B^{l+N-1}a^{l+N-1}b+\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j B^{N+j-2}Da^{N+j-1}b \pmod{R^{k+2}},$$

где $l \in \{1, \ldots, k-N+1\}$, $\alpha = 0$ *или* $\alpha = 1$ *(в соответствии с утверждением леммы 5).*

Доказательство. При доказательстве леммы используем очевидное равенство $ba^{N-2}b \cdot a = b \cdot a^{N-2}ba$.

Тогда с учетом соотношений (4), (6) получим, что

$$ba^{N-2}b \cdot a \equiv B^{N-2}Ca^{N+1} + \alpha\big(1 + B + \ \ldots \ + B^{N-3}\big)a^{l+N-2}ba + B^{N-2}Da \cdot a^{N-2}ba \equiv$$
$$\equiv B^{N-2}Ca^{N+1} + \Big(\alpha\big(1 + B + \ \ldots \ + B^{N-3}\big)a^{l} + B^{N-2}Da\Big)\big(\alpha a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b\big) \equiv$$
$$\equiv B^{N-2}Ca^{N+1} + \alpha B^{N-2}Da^{l+N} + \alpha^2\big(1 + B + \ \ldots \ + B^{N-3}\big)a^{2l+N-1} +$$
$$+ \alpha B\big(1 + B + \ \ldots \ + B^{N-3}\big)a^{l+N-1}b + B^{N-1}Da^{N}b \pmod{R^{k+2}}.$$

С другой стороны, используя соотношения (4), (5), (7), (8), получим, что

$$b \cdot a^{N-2}ba = b\big(\alpha a^{l+N-1} + Ba^{N-1}b\big) = \alpha ba^{l+N-1} + bBa^{N-1}b \equiv$$
$$\equiv \alpha\Big(\alpha\big(1 + \cdots + B^{l+N-2}\big)a^{2l+N-1} + B^{l+N-1}a^{l+N-1}b\Big) + b\Big(\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j a^{j-1}\Big)a^{N-1}b \equiv$$
$$\equiv \alpha^2\big(1 + \cdots + B^{l+N-2}\big)a^{2l+N-1} + \alpha B^{l+N-1}a^{l+N-1}b + \sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j\big(ba^{N+j-2}\big)b \equiv$$
$$\equiv \alpha^2\big(1 + \cdots + B^{l+N-2}\big)a^{2l+N-1} + \alpha B^{l+N-1}a^{l+N-1}b +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j\Big(\alpha\big(1 + \cdots + B^{N+j-3}\big)a^{l+N+j-2} + B^{N+j-2}a^{N+j-2}b\Big)b \equiv$$
$$\equiv \alpha^2\big(1 + \cdots + B^{l+N-2}\big)a^{2l+N-1} + \alpha B^{l+N-1}a^{l+N-1}b +$$
$$+ \alpha\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j\big(1 + \cdots + B^{N+j-3}\big)a^{l+N+j-2}b + \sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j B^{N+j-2}a^{N+j-2}b^2 \equiv$$
$$\equiv \alpha^2\big(1 + \cdots + B^{l+N-2}\big)a^{2l+N-1} + \alpha B^{l+N-1}a^{l+N-1}b +$$
$$+ \alpha\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j\big(1 + \cdots + B^{N+j-3}\big)a^{l+N+j-2}b + \sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j B^{N+j-2}a^{j}\big(Ca^{N} + Da^{N-1}b\big) \equiv$$
$$\equiv \sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j B^{N+j-2}Ca^{N+j} + \alpha^2\big(1 + \cdots + B^{l+N-2}\big)a^{2l+N-1} +$$
$$+ \alpha\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j\big(1 + \cdots + B^{N+j-3}\big)a^{l+N+j-2}b + \alpha B^{l+N-1}a^{l+N-1}b +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j B^{N+j-2}Da^{N+j-1}b \pmod{R^{k+2}}.$$

Поскольку элементы вида a^p, $a^{p-1}b$, $p \in \{N, \ldots, k+1\}$, линейно независимы, то, исходя из равенства $ba^{N-2}b \cdot a = b \cdot a^{N-2}ba$, получим следующие сравнения:

$$B^{N-2}Ca^{N+1} + \alpha B^{N-2}Da^{l+N} + \alpha^2\big(1 + B + \ \ldots \ + B^{N-3}\big)a^{2l+N-1} \equiv$$
$$\equiv \sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j B^{N+j-2}Ca^{N+j} + \alpha^2\big(1 + \cdots + B^{l+N-2}\big)a^{2l+N-1} \pmod{R^{k+2}},$$

$$\alpha B\big(1 + B + \ \ldots \ + B^{N-3}\big)a^{l+N-1}b + B^{N-1}Da^{N}b \equiv$$
$$\equiv \alpha\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j\big(1 + \cdots + B^{N+j-3}\big)a^{l+N+j-2}b + \alpha B^{l+N-1}a^{l+N-1}b +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j B^{N+j-2}Da^{N+j-1}b \pmod{R^{k+2}}.$$

После очевидных преобразований в первом сравнении получим, что

$$B^{N-2}Ca^{N+1}+\alpha B^{N-2}Da^{l+N}\equiv\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_jB^{N+j-2}Ca^{N+j}+$$
$$+\alpha^2\big(1+\dots+B^{l+N-2}\big)a^{2l+N-1}-\alpha^2\big(1+B+\ \dots\ +B^{N-3}\big)a^{2l+N-1}\equiv$$
$$\equiv\alpha^2\big(B^{N-2}+\ \dots\ +B^{l+N-2}\big)a^{2l+N-1}+\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_jB^{N+j-2}Ca^{N+j}\ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}).$$

Соотношение (9) доказано.

После преобразований во втором сравнении получим, что

$$B^{N-1}Da^Nb\equiv\alpha\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j\big(1+\dots+B^{N+j-3}\big)a^{l+N+j-2}b-$$
$$-\alpha B\big(1+B+\ \dots\ +B^{N-3}\big)a^{l+N-1}b+\alpha B^{l+N-1}a^{l+N-1}b+$$
$$+\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_jB^{N+j-2}Da^{N+j-1}b\equiv\alpha\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j\big(1+\dots+B^{N+j-3}\big)a^{l+N+j-2}b-$$
$$-\alpha\Big(\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_ja^{j-1}\Big)\big(1+B+\ \dots\ +B^{N-3}\big)a^{l+N-1}b+\alpha B^{l+N-1}a^{l+N-1}b+$$
$$+\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_jB^{N+j-2}Da^{N+j-1}b\equiv\alpha\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j\big(B^{N-2}+\ \dots\ +B^{N+j-3}\big)a^{l+N+j-2}b+$$
$$+\alpha B^{l+N-1}a^{l+N-1}b+\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_jB^{N+j-2}Da^{N+j-1}b\ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}).$$

Соотношение (10) доказано. □

Оказывается, что в случае, когда характеристика поля $charF\neq 2$, можно избавиться по mod R^{k+1} от варианта $\alpha=1$ в формуле (4), то есть в этом случае будет справедлива следующая формула: $a^{N-2}ba\equiv Ba^{N-1}b$ (mod R^{k+1}). Этому факту посвящена следующая лемма.

Лемма 11. *Если* $\beta_1=1$ *и* $charF\neq 2$, *то в алгебре* R *выполняется соотношение* $a^{N-2}ba\equiv Ba^{N-1}b$ (mod R^{k+1}).

Доказательство. Так как $\beta_1=1$, то элемент B обратим и, поэтому, соотношение (10) можно сократить на B^{N-2}. В итоге получим, что

$$BDa^Nb\equiv\alpha\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_j\big(1+B+\ \dots\ +B^{j-1}\big)a^{l+N+j-2}b+$$
$$+\alpha B^{l+1}a^{l+N-1}b+\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_jB^jDa^{N+j-1}b\ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}).$$

Рассматривая это соотношение по mod R^{l+N+1}, получим, что

$$BDa^Nb\equiv\alpha\beta_1a^{l+N-1}b+\alpha B^{l+1}a^{l+N-1}b+\sum_{j=1}^{k-N+1}\beta_jB^jDa^{N+j-1}b\ (\mathrm{mod}\ R^{l+N+1}),$$

или после преобразований:

$$\alpha\beta_1a^{l+N-1}b+\alpha B^{l+1}a^{l+N-1}b+\sum_{j=2}^{k-N+1}\beta_jB^jDa^{N+j-1}b\equiv$$
$$\equiv 2\alpha a^{l+N-1}b+\sum_{j=2}^{k-N+1}\beta_jB^jDa^{N+j-1}b\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ R^{l+N+1}).$$

Если $\beta_2 = \cdots = \beta_l = 0$, то $2\alpha a^{l+N-1}b \equiv 0 \pmod{R^{l+N+1}}$. Так как $charF \neq 2$, то либо $\alpha = 0$, либо $l > k - N + 1$, и лемма в этом случае доказана.

Если найдется такой $n \in \{2, \ldots, l\}$, что $\beta_n \neq 0$, то по утверждению (3.1) леммы 5 в алгебре R выполняется соотношение $a^{N-2}ba = Ba^{N-1}b$.

Лемма доказана. □

Далее в работе при рассмотрении варианта $\beta_1 = 1$ будем ограничиваться случаем, когда характеристика поля $charF \neq 2$.

По итогам предшествующего исследования определяющих соотношений в алгебре R необходимо сделать следующий промежуточный вывод:

Предложение 3. *Если* $\beta_1 \neq 1$ *или* $\beta_1 = 1$, $charF \neq 2$, *то в алгебре* R *выполняются следующие соотношения:*

$$a^{N-j}ba^{j-1} \equiv B^{j-1}a^{N-1}b \pmod{R^{k+1}}, \quad j = \overline{2, N}, \tag{11}$$

$$B^{N-2}Ca^{N+1} \equiv \sum_{j=1}^{k-N+1} \beta_j B^{N+j-2}Ca^{N+j} \pmod{R^{k+2}}, \tag{12}$$

$$B^{N-1}Da^{N}b \equiv \sum_{j=1}^{k-N+1} \beta_j B^{N+j-2}Da^{N+j-1}b \pmod{R^{k+2}}. \tag{13}$$

Доказательство предложения следует из лемм 5, 9, 10 и 11.

В следующих леммах для случая $\beta_1 \neq 1$ мы попытаемся получить общее представление о том, как выглядит произвольное слово от порождающих a, b длины N, в записи которого встречается не менее двух порождающих b, в разложении по базису алгебры R.

Лемма 12. *Если* $\beta_1 \neq 1$, *то для любого набора целых неотрицательных чисел* $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, *такого, что* $(i_1 + i_2 + \cdots + i_s) \leq (N - s)$, $s = \overline{2, N}$, *в алгебре* R *выполняются следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} &a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s} \equiv \\ &\equiv B^{i_1+i_3+\cdots+i_{2r+1}+\cdots}C^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor}a^{N-\frac{1-(-1)^s}{2}}b^{\frac{1-(-1)^s}{2}} + \\ &+CD\Big(H_1(i_1, \ldots, i_s)a^N + H_2(i_1, \ldots, i_s)a^{N-1}b\Big) + \\ &+B^{i_1+\cdots+i_s}D^{s-1}a^{N-1}b + \nu(i_1, \ldots, i_s)a^k b \pmod{R^{k+t-1}}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $H_1(i_1, \ldots, i_s)$, $H_2(i_1, \ldots, i_s) \in \langle a \rangle^1$, $\nu(i_1, \ldots, i_s) \in F$, $t \geq 2$.

Доказательство. Рассмотрим соотношение (11) для $(j-1) = i_1$, $i_1 = \overline{0, N-2}$: $a^{N-1-i_1}ba^{i_1} \equiv B^{i_1}a^{N-1}b \pmod{R^{k+1}}$, то есть $a^{N-1-i_1}ba^{i_1} = B^{i_1}a^{N-1}b + u$, где $u \in R^{k+1}$.

Домножая это равенство справа на b, с учетом соотношения (2) и леммы 6 получим, что

$$a^{N-1-i_1}ba^{i_1}b \equiv B^{i_1}a^{N-1}b^2 \equiv B^{i_1}\big(Ca^{N+1} + Da^N b\big) \pmod{R^{k+t}}, \quad i_1 = \overline{0, N-2}.$$

Так как $i_1 \leq N-2$, то по лемме 8 (или по лемме 7 при $t = 2$) имеем, что

$$a^{N-1-i_1-1}ba^{i_1}b \equiv B^{i_1}Ca^N + B^{i_1}Da^{N-1}b + \nu(i_1, 0)a^k b \pmod{R^{k+t-1}}, \tag{15}$$

$i_1 = \overline{0, N-2}$, $\nu(i_1, 0) \in F$.

Если $i_1 = N-2$, то имеем, что

$$ba^{N-2}b \equiv B^{N-2}Ca^N + B^{N-2}Da^{N-1}b + \nu(N-2,0)a^kb \pmod{R^{k+t-1}}.$$

Домножая сравнение (15) справа на a, с учетом леммы 6 получим, что

$$a^{N-1-i_1-1}ba^{i_1}ba \equiv B^{i_1}Ca^{N+1} + B^{i_1}Da^{N-1}ba + \nu(i_1,0)a^kba \equiv \\ \equiv B^{i_1}Ca^{N+1} + B^{i_1+1}Da^Nb \pmod{R^{k+t}}, \quad i_1 = \overline{0, N-2}.$$

Если $i_1 < N-2$, то по лемме 8 (или по лемме 7 при $t=2$) получим следующие сравнения:

$$a^{N-2-i_1-1}ba^{i_1}ba \equiv B^{i_1}Ca^N + B^{i_1+1}Da^{N-1}b + \nu(i_1,1)a^kb \pmod{R^{k+t-1}},$$

$i_1 = \overline{0, (N-2)-1}$, $\nu(i_1,1) \in F$.

Продолжая этот процесс домножения и сокращения на a, получим, что

$$a^{N-2-i_1-i_2}ba^{i_1}ba^{i_2} \equiv B^{i_1}Ca^N + B^{i_1+i_2}Da^{N-1}b + \nu(i_1,i_2)a^kb \pmod{R^{k+t-1}},$$

$i_1 = \overline{0, (N-2)-i_2}$, $\nu(i_1,i_2) \in F$, то есть для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1, i_2\}$ с условием $(i_1+i_2) \leq (N-2)$.

Имея основание индукции по s, предположим, что имеют место сравнения

$$a^{N-(s-1)-(i_1+i_2+\dots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}} \equiv \\ \equiv B^{i_1+i_3+\dots+i_{2r+1}+\dots}C^{\lfloor\frac{s-1}{2}\rfloor}a^{N-\frac{1-(-1)^{s-1}}{2}}b^{\frac{1-(-1)^{s-1}}{2}} + \\ + CD\Big(H_1(i_1,\dots,i_{s-1})a^N + H_2(i_1,\dots,i_{s-1})a^{N-1}b\Big) + \\ + B^{i_1+\dots+i_{s-1}}D^{s-2}a^{N-1}b + \nu(i_1,\dots,i_{s-1})a^kb \pmod{R^{k+t-1}},$$

для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}\}$, такого, что $(i_1+i_2+\dots+i_{s-1}) \leq N-(s-1)$.

Далее разобьем доказательство леммы на 2 случая: $(s-1)$ – четное и $(s-1)$ – нечетное число.

Случай 1. $(s-1)$ – четное число.

Домножая последнее сравнение справа на b, с учетом соотношения (2) получим, что

$$a^{N-(s-1)-(i_1+i_2+\dots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}b \equiv B^{i_1+i_3+\dots+i_{s-2}}C^{\frac{s-1}{2}}a^Nb + \\ + CD\Big(H_1(i_1,\dots,i_{s-1})a^Nb + H_2(i_1,\dots,i_{s-1})\big(Ca^{N+1} + Da^Nb\big)\Big) + \\ + B^{i_1+\dots+i_{s-1}}D^{s-2}\big(Ca^{N+1} + Da^Nb\big) \equiv B^{i_1+i_3+\dots+i_{s-2}}C^{\frac{s-1}{2}}a^Nb + \\ + CD\Big(H_1(i_1,\dots,i_{s-1})a^Nb + H_2(i_1,\dots,i_{s-1})Ca^{N+1} + H_2(i_1,\dots,i_{s-1})Da^Nb + \\ + B^{i_1+\dots+i_{s-1}}D^{s-3}a^{N+1}\Big) + B^{i_1+\dots+i_{s-1}}D^{s-1}a^Nb \equiv \\ \equiv B^{i_1+i_3+\dots+i_{s-2}}C^{\frac{s-1}{2}}a^Nb + CD\Big(H_1(i_1,\dots,i_{s-1},0)a^{N+1} + \\ + H_2(i_1,\dots,i_{s-1},0)a^Nb\Big) + B^{i_1+\dots+i_{s-1}}D^{s-1}a^Nb \pmod{R^{k+t}}.$$

Если $(i_1+i_2+\dots+i_{s-1}) < N-(s-1)$, то по лемме 8 (или по лемме 7 при $t=2$) имеем, что

$$a^{N-s-(i_1+i_2+\dots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}b \equiv B^{i_1+i_3+\dots+i_{s-2}}C^{\frac{s-1}{2}}a^{N-1}b + \\ + CD\Big(H_1(i_1,\dots,i_{s-1},0)a^N + H_2(i_1,\dots,i_{s-1},0)a^{N-1}b\Big) + \\ + B^{i_1+\dots+i_{s-1}}D^{s-1}a^{N-1}b + \nu(i_1,\dots,i_{s-1},0)a^kb \pmod{R^{k+t-1}}.$$

Домножая это сравнение справа на a, с учетом леммы 6 получим, что

$$a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}ba \equiv B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}}C^{\frac{s-1}{2}}a^{N-1}ba+$$
$$+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_{s-1},0)a^{N+1}+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1},0)a^{N-1}ba\Big)+$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-1}a^{N-1}ba+\nu(i_1,\ldots,i_{s-1},0)a^kba \equiv$$
$$\equiv B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}+1}C^{\frac{s-1}{2}}a^Nb+$$
$$+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_{s-1},0)a^{N+1}+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1},0)Ba^Nb\Big)+$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}+1}D^{s-1}a^Nb \pmod{R^{k+t}}.$$

Выбирая набор $\{i_1,i_2,\ldots,i_{s-1}\}$ так, чтобы $(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})<N-s$, по лемме 8 (или по лемме 7 при $t=2$) имеем, что

$$a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})-1}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}ba \equiv B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}+1}C^{\frac{s-1}{2}}a^{N-1}b+$$
$$+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_{s-1},1)a^N+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1},1)a^{N-1}b\Big)+$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}+1}D^{s-1}a^{N-1}b+\nu(i_1,\ldots,i_{s-1},1)a^kb \pmod{R^{k+t-1}}.$$

Продолжая этот процесс домножения и сокращения на a, с каждым разом выбирая меньшую сумму $(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})$, получим, что

$$a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})-i_s}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}ba^{i_s} \equiv B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}+i_s}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N-1}b+$$
$$+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_{s-1},i_s)a^N+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1},i_s)a^{N-1}b\Big)+$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}+i_s}D^{s-1}a^{N-1}b+\nu(i_1,\ldots,i_{s-1},i_s)a^kb \pmod{R^{k+t-1}},$$

для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1,i_2,\ldots,i_{s-1},i_s\}$, такого, что $(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1}+i_s)\le(N-s)$.

Случай 2. $(s-1)$ – нечетное число.

Домножая сравнение в индукционном предположении справа на b, получим, что

$$a^{N-(s-1)-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}b \equiv B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\frac{s-2}{2}}a^{N-1}b^2+$$
$$+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_{s-1})a^Nb+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1})a^{N-1}b^2\Big)+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-2}a^{N-1}b^2 \equiv$$
$$\equiv B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\frac{s-2}{2}}\big(Ca^{N+1}+Da^Nb\big)+$$
$$+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_{s-1})a^Nb+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1})\big(Ca^{N+1}+Da^Nb\big)\Big)+$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-2}\big(Ca^{N+1}+Da^Nb\big) \equiv$$
$$B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\frac{s-2}{2}+1}a^{N+1}+CD\Big(B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\frac{s-2}{2}-1}a^Nb+$$
$$+H_1(i_1,\ldots,i_{s-1})a^Nb+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1})Ca^{N+1}+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1})Da^Nb+$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-3}a^{N+1}\Big)+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-1}a^Nb \equiv$$
$$\equiv B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\frac{s-2}{2}+1}a^{N+1}+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_{s-1},0)a^{N+1}+$$
$$+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1},0)a^Nb\Big)+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-1}a^Nb \pmod{R^{k+t}}.$$

Считая далее, что $(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})<N-(s-1)$, по лемме 8 (или по лемме 7 при $t=2$) имеем, что

$$a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}b \equiv$$
$$\equiv B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^N+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_{s-1},0)a^N+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1},0)a^{N-1}b\Big)+$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-1}a^{N-1}b+\nu(i_1,\ldots,i_{s-1},0)a^kb \pmod{R^{k+t-1}}.$$

Домножая это сравнение справа на a, с учетом леммы 6 получим, что

$$a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}ba \equiv B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N+1}+$$
$$+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_{s-1},0)a^{N+1}+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1},0)Ba^Nb\Big)+$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}+1}D^{s-1}a^Nb \pmod{R^{k+t}}.$$

Выбирая набор $\{i_1,i_2,\ldots,i_{s-1}\}$ так, чтобы $(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})<N-s$, по лемме 8 (или по лемме 7 при $t=2$) имеем, что

$$a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})-1}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}ba \equiv B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N}+$$
$$+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_{s-1},1)a^{N}+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1},1)a^{N-1}b\Big)+$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}+1}D^{s-1}a^{N-1}b+\nu(i_1,\ldots,i_{s-1},1)a^kb \pmod{R^{k+t-1}}.$$

Продолжая этот процесс домножения и сокращения на a, получим, что

$$a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})-i_s}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}ba^{i_s} \equiv B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N}+$$
$$+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_{s-1},i_s)a^{N}+H_2(i_1,\ldots,i_{s-1},i_s)a^{N-1}b\Big)+$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}+i_s}D^{s-1}a^{N-1}b+\nu(i_1,\ldots,i_{s-1},i_s)a^kb \pmod{R^{k+t-1}}.$$

Лемма доказана. □

Замечание. Нетрудно видеть по ходу всего доказательства леммы, что в случае, когда $t<2$, утверждение леммы остается справедливым по $\bmod\ R^{k+1}$.

Лемма 13. *Если $\beta_1\neq 1$, то для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1,i_2,\ldots,i_s\}$, такого, что $(i_1+i_2+\cdots+i_s)\le(N+2-s)$, $s=\overline{2,N+2}$, в алгебре R выполняются следующие соотношения:*

$$a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s}=$$
$$=B^{i_1+i_3+\cdots+i_{2r+1}+\cdots}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N+2-\frac{1-(-1)^s}{2}}b^{\frac{1-(-1)^s}{2}}+ \tag{16}$$
$$+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_s)a^{N+2}+H_2(i_1,\ldots,i_s)a^{N+1}b\Big)+$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_s}D^{s-1}a^{N+1}b,$$

где $H_1(i_1,\ldots,i_s)$, $H_2(i_1,\ldots,i_s)\in\langle a\rangle^1$.

Доказательство. Покажем сначала, что при $i_1=\overline{0,N-1}$ выполняются следующие соотношения:

$$a^{N-1-i_1}ba^{i_1+1}b=B^{i_1+1}Ca^{N+2}+B^{i_1+1}Da^{N+1}b, \tag{17}$$

$$a^{N-1-i_1}ba^{i_1}ba=B^{i_1}Ca^{N+2}+B^{i_1+1}Da^{N+1}b, \tag{18}$$

$$a^{N-1-i_1}ba^{i_1}b^2=B^{i_1}Ca^{N+1}b+CD\ B^{i_1}a^{N+2}+B^{i_1}D^2a^{N+1}b. \tag{19}$$

Для этого рассмотрим соотношение (11) для $(j-1)=i_1$, $i_1=\overline{0,N-1}$: $a^{N-1-i_1}ba^{i_1}\equiv B^{i_1}a^{N-1}b \pmod{R^{k+1}}$, то есть $a^{N-1-i_1}ba^{i_1}=B^{i_1}a^{N-1}b+u$, где $u\in R^{k+1}$.

Домножая это сравнение справа последовательно на ab, ba, b^2, с учетом соотношения (2) и леммы 6 получим, что

$$a^{N-1-i_1}ba^{i_1+1}b=B^{i_1}a^{N-1}bab=B^{i_1+1}a^Nb^2=B^{i_1+1}Ca^{N+2}+B^{i_1+1}Da^{N+1}b,$$

$$a^{N-1-i_1}ba^{i_1}ba=B^{i_1}a^{N-1}b^2a=B^{i_1}\big(Ca^{N+1}+Da^Nb\big)a=$$
$$=B^{i_1}Ca^{N+2}+B^{i_1+1}Da^{N+1}b,$$

$$a^{N-1-i_1}ba^{i_1}b^2 = B^{i_1}a^{N-1}b^2b = B^{i_1}\big(Ca^{N+1} + Da^Nb\big)b =$$
$$= B^{i_1}Ca^{N+1}b + B^{i_1}Da^Nb^2 = B^{i_1}Ca^{N+1}b + B^{i_1}D\big(Ca^{N+2} + Da^{N+1}b\big) =$$
$$= B^{i_1}Ca^{N+1}b + CD\ B^{i_1}a^{N+2} + B^{i_1}D^2a^{N+1}b,$$

Соотношения (17), (18), (19) доказаны. Очевидно, что эти соотношения удовлетворяют утверждению леммы.

Рассмотрим теперь элемент $a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s}$ для любого набора чисел $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ с условием $(i_1 + i_2 + \cdots + i_s) \le (N+2-s)$, $s = \overline{2, N+2}$.

Ввиду соотношений (17), (18), (19) можно считать, что этот элемент может принимать один из следующих видов:

1) $\big(a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s-2}\big)a^2$;
2) $\big(a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}-1}\big)ab$, где $s > 2$;
3) $\big(a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1}+1)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}\big)ba$, где $s > 2$;
4) $\big(a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-2})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-2}}\big)b^2$, где $s > 3$.

Далее разобьем доказательство леммы на 2 случая: s – четное и s – нечетное число, рассматривая каждый из вышеприведенных видов и используя соотношение (14).

Случай 1. s – четное число.

В этом случае соотношение (16) следует из следующих равенств:

$$\big(a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s-2}\big)a^2 =$$
$$= \big(a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s-2)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s-2}\big)a^2 = \Big(B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\frac{s}{2}}a^N +$$
$$+CD\big(H_1^{(1)}a^N + H_2^{(1)}a^{N-1}b\big) + B^{i_1+\cdots+i_s-2}D^{s-1}a^{N-1}b\Big)a^2 =$$
$$= B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N+2} + CD\big(H_1^{(1)}a^{N+2} + H_2^{(2)}a^{N+1}b\big) + B^{i_1+\cdots+i_s}D^{s-1}a^{N+1}b,$$

$$\big(a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}-1}\big)ab =$$
$$= \big(a^{N-(s-1)-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1}-1)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}-1}\big)ab =$$
$$= \Big(B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}-1}C^{\lfloor\frac{s-1}{2}\rfloor}a^{N-1}b + CD\big(H_1^{(1)}a^N + H_2^{(1)}a^{N-1}b\big) +$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}-1}D^{s-2}a^{N-1}b\Big)ab = B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\lfloor\frac{s-1}{2}\rfloor}a^Nb^2 +$$
$$+CD\big(H_1^{(1)}a^{N+1}b + H_2^{(1)}Ba^Nb^2\big) + B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-2}a^Nb^2 =$$
$$= B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\lfloor\frac{s-1}{2}\rfloor+1}a^{N+2} + CD\big(H_1^{(2)}a^{N+2} + H_2^{(2)}a^{N+1}b\big) +$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-1}a^{N+1}b = B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N+2} +$$
$$+CD\big(H_1^{(2)}a^{N+2} + H_2^{(2)}a^{N+1}b\big) + B^{i_1+\cdots+i_{s-1}+0}D^{s-1}a^{N+1}b,$$

$$\big(a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1}+1)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}\big)ba =$$
$$= \big(a^{N-(s-1)-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}\big)ba =$$
$$= \Big(B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\lfloor\frac{s-1}{2}\rfloor}a^{N-1}b + CD\big(H_1^{(1)}a^N + H_2^{(1)}a^{N-1}b\big) +$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-2}a^{N-1}b\Big)ba = B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\lfloor\frac{s-1}{2}\rfloor}a^{N-1}b^2a +$$
$$+CD\big(H_1^{(1)}a^Nba + H_2^{(1)}a^{N-1}b^2a\big) + B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-2}a^{N-1}b^2a =$$
$$= B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\lfloor\frac{s-1}{2}\rfloor+1}a^{N+2} + CD\big(H_1^{(2)}a^{N+2} + H_2^{(2)}a^{N+1}b\big) +$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}+1}D^{s-1}a^{N+1}b = B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-1}}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N+2} +$$
$$+CD\big(H_1^{(2)}a^{N+2} + H_2^{(2)}a^{N+1}b\big) + B^{i_1+\cdots+i_{s-1}+1}D^{s-1}a^{N+1}b,$$

$$\begin{gathered}\bigl(a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-2})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-2}}\bigr)b^2=\\=\bigl(a^{N-(s-2)-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-2})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-2}}\bigr)b^2=\\=\Bigl(B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-3}}C^{\lfloor\frac{s-2}{2}\rfloor}a^N+CD\bigl(H_1^{(1)}a^N+H_2^{(1)}a^{N-1}b\bigr)+\\+B^{i_1+\cdots+i_{s-2}}D^{s-3}a^{N-1}b\Bigr)b^2=B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-3}}C^{\lfloor\frac{s-2}{2}\rfloor}a^Nb^2+\\+CD\bigl(H_1^{(1)}a^Nb^2+H_2^{(1)}a^{N-1}b^2b\bigr)+B^{i_1+\cdots+i_{s-2}}D^{s-3}a^{N-1}b^2b=\\=B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-3}}C^{\lfloor\frac{s-2}{2}\rfloor+1}a^{N+2}+CD\bigl(H_1^{(2)}a^{N+2}+H_2^{(2)}a^{N+1}b\bigr)+\\+B^{i_1+\cdots+i_{s-2}}D^{s-1}a^{N+1}b=B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-3}}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N+2}+\\+CD\bigl(H_1^{(2)}a^{N+2}+H_2^{(2)}a^{N+1}b\bigr)+B^{i_1+\cdots+i_{s-2}+0+0}D^{s-1}a^{N+1}b.\end{gathered}$$

Случай 2. s – нечетное число.

В этом случае соотношение (16) следует из следующих равенств:

$$\begin{gathered}\bigl(a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s-2}\bigr)a^2=\\=\bigl(a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s-2)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s-2}\bigr)a^2=\Bigl(B^{i_1+i_3+\cdots+i_s-2}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N-1}b+\\+CD\bigl(H_1^{(1)}a^N+H_2^{(1)}a^{N-1}b\bigr)+B^{i_1+\cdots+i_s-2}D^{s-1}a^{N-1}b\Bigr)a^2=\\=B^{i_1+i_3+\cdots+i_s}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N+1}b+CD\bigl(H_1^{(1)}a^{N+2}+H_2^{(2)}a^{N+1}b\bigr)+B^{i_1+\cdots+i_s}D^{s-1}a^{N+1}b,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\bigl(a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}-1}\bigr)ab=\\=\bigl(a^{N-(s-1)-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1}-1)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}-1}\bigr)ab=\\=\Bigl(B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}}C^{\lfloor\frac{s-1}{2}\rfloor}a^N+CD\bigl(H_1^{(1)}a^N+H_2^{(1)}a^{N-1}b\bigr)+\\+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}-1}D^{s-2}a^{N-1}b\Bigr)ab=B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}}C^{\frac{s-1}{2}}a^{N+1}b+\\+CD\bigl(H_1^{(1)}a^{N+1}b+H_2^{(1)}Ba^Nb^2\bigr)+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-2}a^Nb^2=\\=B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N+1}b+CD\bigl(H_1^{(2)}a^{N+2}+H_2^{(2)}a^{N+1}b\bigr)+\\+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}+0}D^{s-1}a^{N+1}b,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\bigl(a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1}+1)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}\bigr)ba=\\=\bigl(a^{N-(s-1)-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}\bigr)ba=\\=\Bigl(B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}}C^{\lfloor\frac{s-1}{2}\rfloor}a^N+CD\bigl(H_1^{(1)}a^N+H_2^{(1)}a^{N-1}b\bigr)+\\+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-2}a^{N-1}b\Bigr)ba=B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}}C^{\frac{s-1}{2}}a^Nba+\\+CD\bigl(H_1^{(1)}a^Nba+H_2^{(1)}a^{N-1}b^2a\bigr)+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}}D^{s-2}a^{N-1}b^2a=\\=B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}+1}C^{\frac{s-1}{2}}a^{N+1}b+CD\bigl(H_1^{(2)}a^{N+2}+H_2^{(2)}a^{N+1}b\bigr)+\\+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}+1}D^{s-1}a^{N+1}b=B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}+1}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N+1}b+\\+CD\bigl(H_1^{(2)}a^{N+2}+H_2^{(2)}a^{N+1}b\bigr)+B^{i_1+\cdots+i_{s-1}+1}D^{s-1}a^{N+1}b,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\bigl(a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-2})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-2}}\bigr)b^2=\\=\bigl(a^{N-(s-2)-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-2})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-2}}\bigr)b^2=\\=\Bigl(B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}}C^{\lfloor\frac{s-2}{2}\rfloor}a^{N-1}b+CD\bigl(H_1^{(1)}a^N+H_2^{(1)}a^{N-1}b\bigr)+\\+B^{i_1+\cdots+i_{s-2}}D^{s-3}a^{N-1}b\Bigr)b^2=B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}}C^{\lfloor\frac{s-2}{2}\rfloor}a^Nb^2b+\\+CD\bigl(H_1^{(1)}a^Nb^2+H_2^{(1)}a^{N-1}b^2b\bigr)+B^{i_1+\cdots+i_{s-2}}D^{s-3}a^{N-1}b^2b=\\=B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}}C^{\lfloor\frac{s-2}{2}\rfloor+1}a^{N+1}b+CD\bigl(H_1^{(2)}a^{N+2}+H_2^{(2)}a^{N+1}b\bigr)+\end{gathered}$$

$$+B^{i_1+\cdots+i_{s-2}}D^{s-1}a^{N+1}b = B^{i_1+i_3+\cdots+i_{s-2}}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N+1}b+$$
$$+CD\big(H_1^{(2)}a^{N+2}+H_2^{(2)}a^{N+1}b\big)+B^{i_1+\cdots+i_{s-2}+0+0}D^{s-1}a^{N+1}b.$$

Лемма доказана. □

Замечание. Процедура последовательного домножения на a и b, описанная на индукционном шаге в лемме 12 и примененная в лемме 13, позволяет получить в случае $\beta_1 \neq 1$ следующее равенство:

$$a^{N+p-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s} =$$
$$= B^{i_1+i_3+\cdots+i_{2r+1}+\cdots}C^{\lfloor\frac{s}{2}\rfloor}a^{N+p-\frac{1-(-1)^s}{2}}b^{\frac{1-(-1)^s}{2}}+ \tag{20}$$
$$+CD\Big(H_1(i_1,\ldots,i_s)a^{N+p}+H_2(i_1,\ldots,i_s)a^{N+p-1}b\Big)+$$
$$+B^{i_1+\cdots+i_s}D^{s-1}a^{N+p-1}b,\quad p\geq 2,$$

для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1,i_2,\ldots,i_s\}$, такого, что $(i_1+i_2+\cdots+i_s)\leq(N+p-s)$, $s=\overline{2,N+p}$.

Благодаря только что доказанной лемме соотношения (12), (13) можно "усилить" для случая $\beta_1\neq 0;\ 1$. Этому посвящена следующая лемма.

Лемма 14.

1) Если $\beta_1=-1$ $(charF\neq 2)$, то в алгебре R выполняется следующее равенство:

$$Da^{N+1}b=0,$$

2) Если $\beta_1\neq 0;\ \pm1$, то в алгебре R выполняются следующие равенства:

$$Ca^{N+2}=0,\quad Da^{N+1}b=0.$$

Доказательство. По лемме 13 из соотношения (18) следует, что

$$ba^{N-1}ba=B^{N-1}Ca^{N+2}+B^NDa^{N+1}b.$$

Поскольку $b\cdot a^{N-1}ba=b\cdot Ba^Nb$, то имеет место следующее равенство:

$$ba^{N-1}ba=B^{N-1}Ca^{N+2}+B^NDa^{N+1}b=bBa^Nb.$$

Откуда с учетом леммы 6 имеем, что

$$B^{N-1}Ca^{N+2}+B^NDa^{N+1}b=bBa^Nb=b\big(\sum_{j\geq1}\beta_ja^{j-1}\big)a^Nb=$$
$$=\sum_{j\geq1}\beta_j\big(ba^{N+j-1}\big)b=\sum_{j\geq1}\beta_j\big(B^{N+j-1}a^{N+j-1}b+u\big)b\ =$$
$$=\sum_{j\geq1}\beta_jB^{N+j-1}a^{N+j-1}b^2,\ \text{ где } u\in R^{k+2}.$$

Следовательно, используя соотношение (2), получим следующее сравнение:

$$B^{N-1}Ca^{N+2}+B^NDa^{N+1}b=\sum_{j\geq1}\beta_jB^{N+j-1}a^j\big(Ca^{N+1}+Da^Nb\big)=$$
$$=\sum_{j\geq1}\beta_jB^{N+j-1}Ca^{N+1+j}+\sum_{j\geq1}\beta_jB^{N+j-1}Da^{N+j}b.$$

Откуда получим, что

$$B^{N-1}Ca^{N+2}=\sum_{j\geq1}\beta_jB^{N+j-1}Ca^{N+1+j},\quad B^NDa^{N+1}b=\sum_{j\geq1}\beta_jB^{N+j-1}Da^{N+j}b.$$

Так как $\beta_1\neq 0$, то элемент B обратим и, поэтому, эти соотношения можно сократить на B^{N-1} и B^N соответственно. В итоге получим, что

$$Ca^{N+2}=\sum_{j\geq 1}\beta_j B^j Ca^{N+1+j},\quad Da^{N+1}b=\sum_{j\geq 1}\beta_j B^{j-1}Da^{N+j}b.$$

Рассматривая первое равенство, получим, что

$$Ca^{N+2}=\sum_{j\geq 1}\beta_j B^j Ca^{N+1+j}=\Big(\sum_{j\geq 1}\beta_j\big(\sum_{p\geq 1}\beta_p a^{p-1}\big)^j a^{j-1}\Big)Ca^{N+2}=$$
$$=\beta_1^2 Ca^{N+2}+\beta_1\big(\sum_{p\geq 2}\beta_p a^{p-1}\big)Ca^{N+2}+\Big(\sum_{j\geq 2}\beta_j B^j a^{j-1}\Big)Ca^{N+2}.$$

Откуда имеем, что

$$\big(1-\beta_1^2\big)Ca^{N+2}=\Big(\beta_1\big(\sum_{p\geq 2}\beta_p a^{p-1}\big)+\sum_{j\geq 2}\beta_j B^j a^{j-1}\Big)Ca^{N+2}.$$

Если $\beta_1\neq\pm 1$, то $Ca^{N+2}=G\cdot Ca^{N+2}$, где $G\in R\setminus F$, и, поэтому,

$$Ca^{N+2}=G\cdot Ca^{N+2}=G^2\cdot Ca^{N+2}=\cdots=G^r\cdot Ca^{N+2}=\cdots=0.$$

Рассматривая второе равенство, получим, что

$$Da^{N+1}b=\sum_{j\geq 1}\beta_j B^{j-1}Da^{N+j}b=\Big(\sum_{j\geq 1}\beta_j B^{j-1}a^{j-1}\Big)Da^{N+1}b=$$
$$=\beta_1 Da^{N+1}b+\Big(\sum_{j\geq 2}\beta_j B^{j-1}a^{j-1}\Big)Da^{N+1}b.$$

Откуда имеем, что

$$\big(1-\beta_1\big)Da^{N+1}b=\Big(\sum_{j\geq 2}\beta_j B^{j-1}a^{j-1}\Big)Da^{N+1}b.$$

Если $\beta_1\neq 1$, то, аналогично рассуждая, получим, что $Da^{N+1}b=0$.

Лемма доказана. □

Далее проведем наше исследование, рассматривая отдельно каждый из следующих случаев:

1) $\beta_1=0$,
2) $\beta_1=1$ $(char F\neq 2)$,
3) $\beta_1=-1$ $(char F\neq 2)$,
4) $\beta_1\neq 0;\ \pm 1$.

4.1. Определяющие соотношения в алгебре R в случае $\beta_1=0$.

Лемма 15. *Если $\beta_1=0$, то в алгебре R выполняется следующее равенство:*

$$Ca^{N+2}=0.$$

Доказательство. Так как $\beta_1\neq 1$, то из соотношения (16) следует, что

$$b^2a^N=Ca^{N+2}+B^N Da^{N+1}b.$$

С другой стороны, из соотношения (11) для $j=N$ имеет место соотношение $ba^{N-1}\equiv B^{N-1}a^{N-1}b \pmod{R^{k+1}}$, и, поэтому, с учетом леммы 6 получим, что $b^2a^N=bB^Na^Nb$.

Следовательно, имеет место следующее равенство:

$$b^2a^N=Ca^{N+2}+B^N Da^{N+1}b=bB^Na^Nb.$$

Рассматривая это равенство с учетом того, что $\beta_1=0$, получим, что

$$\begin{aligned}
b^2a^N &= Ca^{N+2} + B^N Da^{N+1}b = bB^N a^N b = \\
&= b\Big(\sum_{p_1\geq 2}\beta_{p_1}a^{p_1-1}\ \cdots \sum_{p_N\geq 2}\beta_{p_N}a^{p_N-1}\Big)a^N b = \\
&= \sum_{p_1\geq 2}\cdots\sum_{p_N\geq 2}\big(\beta_{p_1}\cdots\beta_{p_N}\big)ba^{p_1+\cdots+p_N-N}a^N b = \\
&= \sum_{p_1\geq 2}\cdots\sum_{p_N\geq 2}\big(\beta_{p_1}\cdots\beta_{p_N}\big)B^{p_1+\cdots+p_N}a^{p_1+\cdots+p_N-N}a^N b^2 = \\
&= \sum_{p_1\geq 2}\cdots\sum_{p_N\geq 2}\big(\beta_{p_1}\cdots\beta_{p_N}\big)B^{p_1+\cdots+p_N}a^{p_1+\cdots+p_N-N}\big(Ca^{N+2} + Da^{N+1}b\big).
\end{aligned}$$

Откуда, в частности, получим, что

$$Ca^{N+2} = \Big(\sum_{p_1\geq 2}\cdots\sum_{p_N\geq 2}\big(\beta_{p_1}\cdots\beta_{p_N}\big)B^{p_1+\cdots+p_N}a^{p_1+\cdots+p_N-N}\Big)Ca^{N+2}.$$

Поэтому, рассуждая как прежде при доказательстве леммы 14, получим, что имеет место равенство $Ca^{N+2} = 0$.

Лемма доказана. □

Предложение 4. *Если* $\beta_1 = 0$, *то в алгебре* R *на порождающих* $g_i \in \{a,\ b\}$ *выполняются следующие соотношения:*

$$g_1\cdots g_r\big(g_{r+1}\cdots g_{N+p} - g_{\sigma(r+1)}\cdots g_{\sigma(N+p)}\big) = 0,\quad p\geq 2, \tag{21}$$
$$\textit{для любых}\ \ r\in\{1,\ldots,N+p-2\},\ \ \textit{для любых}\ \ \sigma\in S_{N+p-r},$$

при условии, что среди порождающих $g_1,\ldots,g_r \in \{a,\ b\}$ *встречается по крайней мере один порождающий* b.

Доказательство. Из лемм 13 и 15 следует, что при $\beta_1 = 0$ имеет место равенство

$$a^{N+2-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s} = B^{i_1+\cdots+i_s}D^{s-1}a^{N+1}b,$$

для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ с условием $(i_1 + i_2 + \cdots + i_s) \leq (N + 2 - s)$, $s = \overline{2, N+2}$.

С учетом замечания к лемме 13, мы получаем следующее равенство:

$$a^{N+p-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s} = B^{i_1+\cdots+i_s}D^{s-1}a^{N+p-1}b,\quad p\geq 2,$$

для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ с условием $(i_1 + i_2 + \cdots + i_s) \leq (N + p - s)$, $s = \overline{2, N+p}$.

Это означает, что при фиксированных s и p, как только $(i_1 + i_2 + \cdots + i_s) = (j_1 + j_2 + \cdots + j_s)$, то имеет место равенство

$$a^{N+p-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s} = a^{N+p-s-(j_1+j_2+\cdots+j_s)}ba^{j_1}ba^{j_2}\cdots ba^{j_s},$$

несмотря на то, что, быть может, $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$.

Отсюда очевидно следует, что в алгебре R на порождающих $g_i \in \{a,\ b\}$ выполняются соотношения (21).

Предложение доказано. □

Следствие. *Если* $\beta_1 = 0$, *то в алгебре* R *на порождающих* $g_i \in \{a,\ b\}$ *выполняется следующее соотношение:*

$$\Big[g_1\cdots g_{r_1},\ g_{r_1+1}\cdots g_{r_2}\Big]\Big[g_{r_2+1}\cdots g_{r_3},\ g_{r_3+1}\cdots g_{r_4}\Big]g_{r_4+1}\cdots g_{N+p} = 0, \tag{22}$$

где $p\geq 2$, $0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \leq N+p$.

Доказательство. Рассмотрим равенство (21) в двух вариантах:

$$g_1 \cdots g_{r_1}\ g_{r_1+1} \cdots g_{r_2}\big(g_{r_2+1} \cdots g_{N+p} - g_{\sigma(r_2+1)} \cdots g_{\sigma(N+p)}\big) = 0,$$

$$g_{r_1+1} \cdots g_{r_2}\ g_1 \cdots g_{r_1}\big(g_{r_2+1} \cdots g_{N+p} - g_{\sigma(r_2+1)} \cdots g_{\sigma(N+p)}\big) = 0,$$

где $0 < r_1 < r_2 < N+p,\ p \geq 2$.

Предполагая, что подстановка $\sigma \in S_{N+p-r}$ такова, что

$$g_{r_2+1} \cdots g_{N+p} - g_{\sigma(r_2+1)} \cdots g_{\sigma(N+p)} = \Big[g_{r_2+1} \cdots g_{r_3},\ g_{r_3+1} \cdots g_{r_4}\Big] g_{r_4+1} \cdots g_{N+p},$$

для некоторых $r_2 < r_3 < r_4 \leq N+p$, и беря разность этих равенств, получаем соотношение (22).

Заметим, что условие о том, что среди порождающих $g_1, \dots, g_{r_2} \in \{a,\ b\}$ встречается по крайней мере один порождающий b, в данном случае перестает быть актуальным. □

4.2. **Определяющие соотношения в алгебре R в случае $\beta_1 = 1$ при условии, что $charF \neq 2$.**

Лемма 16. *Если $\beta_1 = 1$, $charF \neq 2$, то в алгебре R выполняются следующие соотношения:*

$$(B-1)a^{N-s}b^s \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}),\ \ s = \overline{2, N}.$$

При этом, если $B \neq 1$ (найдется такой $n \in \{2, \dots, k-N+2\}$, что $\beta_n \neq 0$), то имеют место сравнения

$$Ca^{N+n-1} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}), \tag{23}$$

$$Ca^{N+n-2}b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}), \tag{24}$$

$$Da^{N+n-2}b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}). \tag{25}$$

Доказательство. Если $B = 1$ (то есть $\beta_1 = 1,\ \ \beta_2 = \cdots = \beta_{k-N+2} = 0$), то первое утверждение леммы очевидно.

Пусть далее $B \neq 1$, то есть $\beta_1 = 1,\ \beta_2 = \cdots = \beta_{n-1} = 0,\ \beta_n \neq 0$ для некоторого $n \in \{2, \dots, k-N+2\}$. Тогда элемент B можно представить в виде

$$B = \sum_{p=1}^{k-N+2} \beta_p a^{p-1} = 1 + \sum_{p \geq n} \beta_p a^{p-1} = 1 + \Big(\sum_{p \geq n} \beta_p a^{p-n}\Big) a^{n-1} = 1 + B_1 a^{n-1},$$

где B_1 – обратим.

Так как $\beta_1 = 1$, то элемент B обратим и, поэтому, соотношение (12) можно сократить на B^{N-2}. В итоге имеем, что

$$Ca^{N+1} \equiv \sum_{j=1}^{k-N+1} \beta_j B^j C a^{N+j} \ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}) \equiv \sum_{j=1}^{k-N+1} \beta_j \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^j C a^{N+j} \equiv$$

$$\equiv \beta_1\big(1 + B_1 a^{n-1}\big) C a^{N+1} + \sum_{j \geq n} \beta_j \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^j C a^{N+j} \equiv C a^{N+1} + B_1 C a^{N+n} +$$

$$+ \beta_n \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^n C a^{N+n} + \sum_{j \geq n+1} \beta_j \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^j C a^{N+j} \ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}).$$

После сокращения на Ca^{N+1}, получим, что

$$0 \equiv B_1 C a^{N+n} + \beta_n C a^{N+n} + \beta_n \Big(\big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^n - 1\Big) C a^{N+n} +$$

$$+ \sum_{j \geq n+1} \beta_j \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^j C a^{N+j} \equiv 2\beta_n C a^{N+n} + \beta_n \Big(\big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^n - 1\Big) C a^{N+n} +$$

$$+ \sum_{j \geq n+1} \beta_j \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^j C a^{N+j} \ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}).$$

Так как $charF \neq 2$ и $\beta_n \neq 0$, то $Ca^{N+n} \equiv G \cdot Ca^{N+n} \pmod{R^{k+2}}$, где $G \in R \setminus F$, и, поэтому,

$$Ca^{N+n} \equiv G \cdot Ca^{N+n} \equiv G^2 \cdot Ca^{N+n} \equiv \cdots \equiv G^r \cdot Ca^{N+n} \cdots \equiv 0 \pmod{R^{k+2}}.$$

По лемме 7 получим, что $Ca^{N+n-1} \equiv 0 \pmod{R^{k+1}}$.

Сравнение (23) доказано.

Соотношение (13) также можно сократить на B^{N-2}. В итоге имеем, что

$$\begin{gathered} Da^N b \equiv \sum_{j=1}^{k-N+1} \beta_j B^{j-1} Da^{N+j-1} b \pmod{R^{k+2}} \equiv \\ \equiv \sum_{j=1}^{k-N+1} \beta_j \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^{j-1} Da^{N+j-1} b \equiv \\ \equiv \beta_1 Da^N b + \sum_{j \geq n} \beta_j \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^{j-1} Da^{N+j-1} b. \end{gathered}$$

После сокращения на $Da^N b$, получим, что

$$\begin{gathered} 0 \equiv \beta_n \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^{n-1} Da^{N+n-1} b + \sum_{j \geq n+1} \beta_j \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^{j} Da^{N+j-1} b \equiv \\ \equiv \beta_n Da^{N+n-1} b + \beta_n \Big(\big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^{n} - 1\Big) Da^{N+n-1} b + \\ + \sum_{j \geq n+1} \beta_j \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)^{j} Da^{N+j-1} b \pmod{R^{k+2}}. \end{gathered}$$

Так как $\beta_n \neq 0$, то, проводя аналогичные рассуждения, получим, что $Da^{N+n-2} b \equiv 0 \pmod{R^{k+1}}$.

Сравнение (25) доказано.

С учетом сравнений (23), (25) мы имеем по mod R^{k+1} следующее сравнение:

$$\begin{gathered} Ba^{N-2} b^2 = B\big(Ca^N + Da^{N-1} b\big) \equiv \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)\big(Ca^N + Da^{N-1} b\big) \equiv \\ \equiv \big(Ca^N + Da^{N-1} b\big) + B_1 \big(Ca^{N+n-1} + Da^{N+n-2} b\big) \equiv \\ \equiv Ca^N + Da^{N-1} b = a^{N-2} b^2 \pmod{R^{k+1}}. \end{gathered}$$

Домножая последнее сравнение справа на порождающий b, получим, что $Ba^{N-2} b^3 \equiv a^{N-2} b^3 \pmod{R^{k+2}}$.

Тогда по лемме 7 имеем, что $Ba^{N-3} b^3 \equiv a^{N-3} b^3 \pmod{R^{k+1}}$.

Продолжая этот процесс, получим сравнения

$$Ba^{N-s} b^s \equiv a^{N-s} b^s \pmod{R^{k+1}}, \; s = \overline{2, N}.$$

Покажем, наконец, что имеет место сравнение (24).

Действительно, домножая сравнение (23) справа на b, получим, что $Ca^{N+n-1} b \equiv 0 \pmod{R^{k+2}}$. Применяя лемму 7, получим сравнение (24).

Лемма доказана. □

Лемма 17. *Если* $\beta_1 = 1$, $charF \neq 2$, *то в алгебре* R *выполняются следующие соотношения:*

(26) $$a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)} b a^{i_1} b a^{i_2} \cdots b a^{i_s} \equiv a^{N-s} b^s \pmod{R^{k+1}}, \; s = \overline{2, N},$$

для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, *такого, что* $(i_1 + i_2 + \cdots + i_s) \leq (N - s)$;

(27) $$a^{N+p-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)} b a^{i_1} b a^{i_2} \cdots b a^{i_s} \equiv a^{N+p-s} b^s \pmod{R^{k+p+1}}, \; s = \overline{2, N+p}, \; p \geq 1,$$

для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$*, такого, что* $(i_1 + i_2 + \dots + i_s) \le (N + p - s)$.

Доказательство. Покажем сначала, что элементы $a^{N-s}b^s$, $s = \overline{2, N}$, можно представить в следующем виде:

$$a^{N-s}b^s \equiv C \cdot f_s(C,D)a^N + g_s(C,D)a^{N-1}b \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}), \tag{28}$$

где $f_s(C,D)$, $g_s(C,D)$ – многочлены от без свободного члена при $s \ge 3$, $f_2(C,D) = 1$, $g_2(C,D) = D$.

Основанием индукции является соотношение (2): $a^{N-2}b^2 = Ca^N + Da^{N-1}b$. Предположим, что имеет место сравнение

$$a^{N-(s-1)}b^{s-1} \equiv C \cdot f_{s-1}(C,D)a^N + g_{s-1}(C,D)a^{N-1}b \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}).$$

Тогда, домножая справа на b, получим, что

$$\begin{gathered} a^{N-(s-1)}b^{s-1} \cdot b \equiv C \cdot f_{s-1}(C,D)a^N b + g_{s-1}(C,D)a^{N-1}b^2 \equiv \\ \equiv C \cdot f_{s-1}(C,D)a^N b + g_{s-1}(C,D)a\big(Ca^N + Da^{N-1}b\big) \equiv \\ \equiv C \cdot g_{s-1}(C,D)a^{N+1} + \big(C \cdot f_{s-1}(C,D) + D \cdot g_{s-1}(C,D)\big)a^N b \ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}). \end{gathered}$$

Используя лемму 7, получим, что

$$\begin{gathered} a^{N-s}b^s \equiv C \cdot g_{s-1}(C,D)a^N + \big(C \cdot f_{s-1}(C,D) + D \cdot g_{s-1}(C,D)\big)a^{N-1}b \equiv \\ \equiv C \cdot f_s(C,D)a^N + g_s(C,D)a^{N-1}b \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}). \end{gathered}$$

Формула (28) доказана.

Далее рассмотрим соотношение (11) для $(j-1) = i_1$, $i_1 = \overline{0, N-1}$:

$$a^{N-1-i_1}ba^{i_1} \equiv B^{i_1}a^{N-1}b \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}).$$

Домножая это сравнение справа на b, получим с учетом леммы 16, что

$$a^{N-1-i_1}ba^{i_1}b \equiv B^{i_1}a^{N-1}b^2 \equiv a^{N-1}b^2 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}), \quad i_1 = \overline{0, N-1}.$$

Если $i_1 = N-1$, то имеем, что

$$ba^{N-1}b \equiv a^{N-1}b^2 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}). \tag{29}$$

Предположим далее, что $i_1 < N-1$. Тогда по лемме 7 имеем, что

$$a^{N-1-i_1-1}ba^{i_1}b \equiv a^{N-2}b^2 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}), \quad i_1 = \overline{0, N-2}.$$

Домножая последнее сравнение справа на a, с учетом леммы 16 и соотношения (25) получим, что

$$\begin{gathered} a^{N-1-i_1-1}ba^{i_1}ba \equiv a^{N-2}b^2a \equiv Ca^{N+1} + Da^{N-1}ba \equiv \\ \equiv Ca^{N+1} + BDa^N b \ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}) \equiv Ca^{N+1} + \big(1 + B_1 a^{n-1}\big)Da^N b \equiv \\ \equiv Ca^{N+1} + Da^N b + B_1 Da^{N+n-1}b \equiv Ca^{N+1} + Da^N b = a^{N-1}b^2 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+2}). \end{gathered}$$

Если $i_1 < N-2$, то по лемме 7 получим следующие сравнения:

$$a^{N-2-i_1-1}ba^{i_1}ba \equiv a^{N-2}b^2 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}), \quad i_1 = \overline{0, (N-2)-1}.$$

Продолжая этот процесс домножения и сокращения на a, получим, что

$$a^{N-2-i_1-i_2}ba^{i_1}ba^{i_2} \equiv a^{N-2}b^2 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}), \quad i_1 = \overline{0, (N-2)-i_2},$$

то есть

$$a^{N-2-(i_1+i_2)}ba^{i_1}ba^{i_2} \equiv a^{N-2}b^2 \ (\mathrm{mod}\ R^{k+1}) \text{ при } (i_1+i_2) \le (N-2).$$

Имея для доказательства соотношений (26) базу индукции по s, предположим, что имеют место сравнения

$$a^{N-(s-1)-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}} \equiv a^{N-(s-1)}b^{s-1} \pmod{R^{k+1}},$$

для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}\}$, такого, что $(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1}) \le N-(s-1)$, $s \ge 3$.

Домножая это сравнение справа на b, получим, что

$$a^{N-(s-1)-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}b \equiv a^{N-(s-1)}b^{s} \pmod{R^{k+2}}.$$

Предположим далее, что $(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1}) < N-(s-1)$.

Тогда по лемме 7 имеем, что

$$a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}b \equiv a^{N-s}b^{s} \pmod{R^{k+1}}.$$

Домножая последнее сравнение справа на a, с учетом соотношений (23), (24), (25) и (28) получим, что

$$\begin{gathered}a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}ba \equiv a^{N-s}b^{s}a \equiv\\ \equiv C\cdot f(C,D)a^{N+1}+g(C,D)a^{N-1}ba \equiv\\ \equiv C\cdot f(C,D)a^{N+1}+g(C,D)Ba^{N}b \equiv\\ \equiv C\cdot f(C,D)a^{N+1}+g(C,D)\big(1+B_1a^{n-1}\big)a^{N}b \equiv\\ \equiv C\cdot f(C,D)a^{N+1}+g(C,D)a^{N}b+B_1g(C,D)a^{N+n-1}b \equiv\\ \equiv C\cdot f(C,D)a^{N+1}+g(C,D)a^{N}b = a^{N-s+1}b^{s} \pmod{R^{k+2}}.\end{gathered}$$

Если $(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1}) < N-s$, то по лемме 7 имеем, что

$$a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})-1}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}ba \equiv a^{N-s}b^{s} \pmod{R^{k+1}}$$

для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}\}$ с условием $(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1}+1) \le N-s$.

Продолжая этот процесс домножения и сокращения на a, получим, что

$$a^{N-s-(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1})-i_s}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_{s-1}}ba^{i_s} \equiv a^{N-s}b^{s} \pmod{R^{k+1}}$$

для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}, i_s\}$ с условием $(i_1+i_2+\cdots+i_{s-1}+i_s) \le N-s$.

Соотношения (26) доказаны.

Заметим, что из соотношения (11) аналогичным предыдущему способом можно получить следующие соотношения:

$$a^{N+p-2-(i_1+i_2)}ba^{i_1}ba^{i_2} \equiv a^{N+p-2}b^2 \pmod{R^{k+p+1}} \text{ при } (i_1+i_2) \le (N+p-2),\ p \ge 1.$$

С учетом этих соотношений и соотношений (26), проводя процедуру, подобную проведенной на индукционном шаге при доказательстве леммы, мы получим соотношения (27).

Лемма доказана. □

Предложение 5. *Пусть* $\beta_1 = 1$, $charF \ne 2$. *Тогда*

1) в алгебре R выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered}g_1g_2\cdots g_N \equiv g_{\sigma(1)}g_{\sigma(2)}\cdots g_{\sigma(N)} \pmod{R^{k+1}}, \qquad (30)\\ g_1g_2\cdots g_{N+p} - g_{\tau(1)}g_{\tau(2)}\cdots g_{\tau(N+p)} \pmod{R^{k+p+1}},\\ \textit{для любых } \sigma \in S_N,\ \textit{для любых } \tau \in S_{N+p},\quad p \ge 1;\end{gathered}$$

$$\begin{aligned} (31) \qquad & \big[g_1g_2\cdots g_{N+p} - g_{\tau(1)}g_{\tau(2)}\cdots g_{\tau(N+p)},\ a\big] = 0, \\ & \big[g_1g_2\cdots g_{N+p} - g_{\tau(1)}g_{\tau(2)}\cdots g_{\tau(N+p)},\ b\big] = 0, \\ & \textit{для любых } \tau \in S_{N+p},\ p \geq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (32) \qquad & \big(g_1g_2\cdots g_{N+p-1} - g_{\sigma(1)}g_{\sigma(2)}\cdots g_{\sigma(N+p-1)}\big)\big[a,\ b\big] = 0, \\ & \big[a,\ b\big]\big(g_1g_2\cdots g_{N+p-1} - g_{\sigma(1)}g_{\sigma(2)}\cdots g_{\sigma(N+p-1)}\big) = 0, \\ & \textit{для любых } \sigma \in S_{N+p-1},\quad p \geq 1, \end{aligned}$$

при условии, что в соотношениях (30) - (32) среди порождающих $g_i \in \{a,\ b\}$ *встречается не менее двух порождающих* b*;*

2) в алгебре R *выполняются следующие соотношения:*

$$(33) \qquad \big(g_1\cdots g_r - g_{\sigma(1)}\cdots g_{\sigma(r)}\big)\big(g_{r+1}\cdots g_{N+p} - g_{\tau(r+1)}\cdots g_{\tau(N+p)}\big) = 0,$$

для любых $r \in \{2,\ldots,N+p-2\}$, *для любых* $\sigma \in S_r,\ \tau \in S_{N+p-r},\ p \geq 2$,

при условии, что в соотношениях (33) среди порождающих $g_i \in \{a,\ b\}$ *встречается не менее трех порождающих* b.

Доказательство. Соотношения (30) непосредственно следуют из соотношений (26), (27), поскольку $s \geq 2$, то есть среди порождающих $g_i \in \{a,\ b\}$ встречается не менее двух порождающих b.

Поскольку по предложению 1 алгебра R удовлетворяет перестановочным тождествам $p^{\sigma}_{k+3}(x_1,\ldots,x_{k+3}) = x_1x_2\cdots x_{k+3} - x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(k+3)} = 0$ для всех $\sigma \in S_{k+3}$, то в R выполняются соотношения (31), (32).

Предположим, что в выражении $(g_1g_2\cdots g_{N+p} - g_{\sigma(1)}g_{\sigma(2)}\cdots g_{\sigma(N+p)})$, где $p \geq 2$, подстановка $\sigma \in S_{N+p}$ такова, что сохраняет на своих местах элементы $g_{r+1},\ldots,g_{N+p}$, где $r \in \{2,\ldots,N+p-2\}$, то есть

$g_1\cdots g_{N+p} - g_{\sigma(1)}\cdots g_{\sigma(N+p)} = (g_1\cdots g_r - g_{\sigma(1)}\cdots g_{\sigma(r)})g_{r+1}\cdots g_{N+p}$.

Предположим, что в этом выражении среди порождающих $g_i \in \{a,\ b\}$ встречается не менее трех порождающих b. Тогда из соотношений (31), (32) имеют место равенства

$$\begin{gathered} \big[(g_1\cdots g_r - g_{\sigma(1)}\cdots g_{\sigma(r)})g_{r+1}\cdots g_{N+p-1},\ g_{N+p}\big] = 0, \\ (g_1\cdots g_r - g_{\sigma(1)}\cdots g_{\sigma(r)})g_{r+1}\cdots g_{N+p-2}\big[g_{N+p-1},\ g_{N+p}\big] = 0. \end{gathered}$$

Откуда получим, что

$$\begin{aligned} &(g_1\cdots g_r - g_{\sigma(1)}\cdots g_{\sigma(r)})g_{r+1}\cdots g_{N+p} = \\ &= (g_1\cdots g_r - g_{\sigma(1)}\cdots g_{\sigma(r)})g_{\tau(r+1)}\cdots g_{\tau(N+p)}, \end{aligned}$$

для любых $r \in \{2,\ldots,N+p-2\}$, для любых $\sigma \in S_r,\ \tau \in S_{N+p-r},\ p \geq 2$.

Следовательно, соотношения (33) имеют место. Предложение доказано. □

Следствие. *Если* $\beta_1 = 1$, $charF \neq 2$, *то в алгебре* R *на порождающих* $g_i \in \{a,\ b\}$ *выполняется следующее соотношение:*

$$(34) \qquad \Big[g_1\cdots g_{r_1},\ g_{r_1+1}\cdots g_{r_2}\Big]\Big[g_{r_2+1}\cdots g_{r_3},\ g_{r_3+1}\cdots g_{r_4}\Big]g_{r_4+1}\cdots g_{N+p} = 0,$$

где $p \geq 2,\ 0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < N+p$,

и в соотношении (34) среди порождающих $g_i \in \{a,\ b\}$ *встречается не менее трех порождающих* b.

Доказательство. Соотношение (34) следует из предположения, что подстановки $\sigma \in S_r,\ \tau \in S_{N+p-r}$ в соотношении (33) таковы, что
$\big(g_1 \cdots g_r - g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(r)}\big) = \Big[g_1 \cdots g_{r_1},\ g_{r_1+1} \cdots g_{r_2}\Big]$, где $0 < r_1 < r_2 = r$.
$\big(g_{r+1} \cdots g_{N+p} - g_{\tau(r+1)} \cdots g_{\tau(N+p)}\big) = \Big[g_{r_2+1} \cdots g_{r_3},\ g_{r_3+1} \cdots g_{r_4}\Big] g_{r_4+1} \cdots g_{N+p}$,
где $r = r_2 < r_3 < r_4 \leq N+p$. □

4.3. **Определяющие соотношения в алгебре R в случае $\beta_1 = -1$ при условии, что** $charF \neq 2$.

Лемма 18. *Если* $\beta_1 = -1$, $charF \neq 2$, *то для любого набора целых неотрицательных чисел* $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, *такого, что* $(i_1 + i_2 + \cdots + i_s) \leq (N+p-s)$, $s = \overline{2, N+p}$, $p \geq 2$, *в алгебре R выполняются следующие соотношения:*

$$a^{N+p-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)} b a^{i_1} b a^{i_2} \cdots \Big[b a^{i_r} b,\ a^{i_{r+1}}\Big] \cdots b a^{i_s} = 0, \tag{35}$$

где $r = \overline{1, s-1}$, $i_{r+1} \geq 1$.

Доказательство. По лемме 13 и замечанию к ней, с учетом леммы 14 имеет место равенство
$a^{N+p-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)} b a^{i_1} b a^{i_2} \cdots b a^{i_s} = B^{i_1+i_3+\cdots+i_{2r+1}+\cdots} C^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} a^{N+p-\frac{1-(-1)^s}{2}} b^{\frac{1-(-1)^s}{2}}$,
для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, такого, что $(i_1 + i_2 + \cdots + i_s) \leq (N+p-s)$, $s = \overline{2, N+p}$, $p \geq 2$.

Нетрудно видеть, что данное равенство сохранится, если в его левой части переместить $a^{i_{r+1}}$, где $r = \overline{1, s-1}$, $i_{r+1} \geq 1$, через четное количество порождающих b, поскольку в показателе степени элемента $B^{i_1+i_3+\cdots+i_{2p+1}+\cdots}$ суммирование ведется по i_{2r+1} с нечетными индексами.

Откуда получаем утверждение леммы. □

Элементу $x = a^{i_0} b a^{i_1} b a^{i_2} \cdots b a^{i_{s+1}} \in R$, где $i_r \geq 0$, $s \geq 0$, поставим в соответствие элемент $\widetilde{x} = a^{i_0+i_2+\cdots+i_{2r}+\cdots} b a^{i_1+i_3+\cdots+i_{2r+1}+\cdots} b^s$, который будем называть приведенным для x.

Элементы a, b будем считать соответственно приведенными самим себе.

Лемма 19. *Пусть* $\beta_1 = -1$, $charF \neq 2$. *Если* $x = x_1 x_2 \cdots x_r \in R^{N+2}$ *для некоторых мономов* $x_1, x_2, \ldots, x_r \in R$, $r \geq 1$, *и в записи элемента x встречается не менее двух порождающих b, то* $x = \widetilde{x}_1 \widetilde{x}_2 \cdots \widetilde{x}_r$.

Доказательство. Поскольку $x \in R^{N+2}$ и в записи элемента x встречается не менее двух порождающих b, то по лемме 18 выполняется соотношение (35), и, поэтому, каждый из элементов x_j, $j = \overline{1, r}$, можно привести к приведенному виду, не нарушая равенства $x = x_1 x_2 \cdots x_r$. Лемма доказана. □

Приведенный элемент $e = a^i b^\epsilon a^j b^s$, где $\epsilon \in \{0, 1\}$, назовем четным, если $(\epsilon + s)$ – четное число.

Приведенный элемент $o = a^i b^\epsilon a^j b^s$, где $\epsilon \in \{0, 1\}$, назовем нечетным, если $(\epsilon + s)$ – нечетное число.

Лемма 20. *Пусть* $\beta_1 = -1$, $charF \neq 2$.

Тогда в алгебре R выполняются следующие равенства, при условии, что выражения в их левой части принадлежат R^{N+2}*:*

$$u_1(e_1 e_2 - e_2 e_1) v_1 = 0, \tag{36}$$

(37) $$u_2(e_1o_1o_2e_2 - e_2o_1o_2e_1)v_2 = 0,$$

(38) $$u_3(e_1o_1e_2o_2 - o_1e_2o_2e_1)v_3 = 0,$$

(39) $$u_4(o_1o_2o_3 - o_3o_2o_1)v_4 = 0,$$

(40) $$u_5(o_1eo_2o_3 - o_3eo_2o_1)v_5 = 0,$$

(41) $$u_6(o_1o_2eo_3 - o_3o_2eo_1)v_6 = 0,$$

где e_i – четные, o_i – нечетные элементы, $u_i, v_i \in R$.

Доказательство. Поскольку вышеприведенные выражения лежат в R^{N+2}, то с учетом (35) их можно привести к приведенному виду.

Равенство (36) следует из следующих равенств:

$$u_1(a^{i_1}ba^{j_1}b^{s_1}\cdot a^{i_2}ba^{j_2}b^{s_2})v_1 = u_1(a^{i_2}ba^{j_2}b^{s_2}\cdot a^{i_1}ba^{j_1}b^{s_1})v_1 = \\ = u_1(a^{i_1+i_2}ba^{j_1+j_2}b^{s_1+s_2+1})v_1,\ \text{где } s_1, s_2 \text{ – нечетные числа,}$$

$$u_1(a^{i_1}b^{s_1}\cdot a^{i_2}b^{s_2})v_1 = u_1(a^{i_2}b^{s_2}\cdot a^{i_1}b^{s_1})v_1 = u_1(a^{i_1+i_2}b^{s_1+s_2})v_1, \\ \text{где } s_1, s_2 \text{ – четные числа,}$$

$$u_1(a^{i_1}b^{s_1}\cdot a^{i_2}ba^{j_2}b^{s_2})v_1 = u_1(a^{i_2}ba^{j_2}b^{s_2}\cdot a^{i_1}b^{s_1})v_1 = \\ = u_1(a^{i_1+i_2}b^{s_1+1}a^{j_2}b^{s_2})v_1 = u_1(a^{i_1+i_2}ba^{j_2}b^{s_1+s_2})v_1, \\ \text{где } s_1 \text{ – четное, } s_2 \text{ – нечетное.}$$

Равенства (37), (38) с учетом (36) следуют из следующих равенств:

$$u_2\big(e_1(o_1o_2)e_2\big)v_2 = u_2(e_1e_3e_2)v_2 = u_2(e_2e_3e_1)v_2 = u_2\big(e_2(o_1o_2)e_1\big)v_2, \\ u_3\big(e_1(o_1e_2o_2)\big)v_2 = u_3(e_1e_3)v_3 = u_3(e_3e_1)v_3 = u_3\big((o_1e_2o_2)e_1\big)v_3.$$

Равенство (39) следует из следующих равенств:

$$u_4(a^{i_1}ba^{j_1}b^{s_1}\cdot a^{i_2}ba^{j_2}b^{s_2}\cdot a^{i_3}ba^{j_3}b^{s_3})v_4 = \\ = u_4(a^{i_3}ba^{j_3}b^{s_3}\cdot a^{i_2}ba^{j_2}b^{s_2}\cdot a^{i_1}ba^{j_1}b^{s_1})v_4 = u_4(a^{i_1+i_2+i_3}ba^{j_1+j_2+j_3}b^{s_1+s_2+s_3+2})v_4, \\ \text{где } s_1, s_2, s_3 \text{ – четные числа,}$$

$$u_4(a^{i_1}b^{s_1}\cdot a^{i_2}b^{s_2}\cdot a^{i_3}b^{s_3})v_4 = u_4(a^{i_3}b^{s_3}\cdot a^{i_2}b^{s_2}\cdot a^{i_1}b^{s_1})v_4 = \\ = u_4(a^{i_1+i_3}ba^{i_2}b^{s_1+s_2+s_3-1})v_4,\ \text{где } s_1, s_2, s_3 \text{ – нечетные числа,}$$

$$u_4(a^{i_1}b^{s_1}\cdot a^{i_2}ba^{j_2}b^{s_2}\cdot a^{i_3}ba^{j_3}b^{s_3})v_4 = \\ = u_4(a^{i_3}ba^{j_3}b^{s_3}\cdot a^{i_2}ba^{j_2}b^{s_2}\cdot a^{i_1}b^{s_1})v_4 = u_4(a^{i_1+j_2+i_3}ba^{i_2+j_3}b^{s_1+s_2+s_3+1})v_4, \\ \text{где } s_1 \text{ – нечетное число, } s_2, s_3 \text{ – четные числа,}$$

$$u_4(a^{i_1}ba^{j_1}b^{s_1}\cdot a^{i_2}b^{s_2}\cdot a^{i_3}ba^{j_3}b^{s_3})v_4 = \\ = u_4(a^{i_3}ba^{j_3}b^{s_3}\cdot a^{i_2}b^{s_2}\cdot a^{i_1}ba^{j_1}b^{s_1})v_4 = u_4(a^{i_1+i_3}ba^{j_1+i_2+j_3}b^{s_1+s_2+s_3+1})v_4, \\ \text{где } s_2 \text{ – нечетное число, } s_1, s_3 \text{ – четные числа,}$$

$$u_4(a^{i_1}b^{s_1}\cdot a^{i_2}ba^{j_2}b^{s_2}\cdot a^{i_3}b^{s_3})v_4 = \\ = u_4(a^{i_3}b^{s_3}\cdot a^{i_2}ba^{j_2}b^{s_2}\cdot a^{i_1}b^{s_1})v_4 = u_4(a^{i_1+j_2+i_3}ba^{i_2}b^{s_1+s_2+s_3})v_4, \\ \text{где } s_2 \text{ – четное число, } s_1, s_3 \text{ – нечетные числа,}$$

$$u_4(a^{i_1}ba^{j_1}b^{s_1}\cdot a^{i_2}b^{s_2}\cdot a^{i_3}b^{s_3})v_4 = \\ = u_4(a^{i_3}b^{s_3}\cdot a^{i_2}b^{s_2}\cdot a^{i_1}ba^{j_1}b^{s_1})v_4 = u_4(a^{i_1+i_3}ba^{j_1+i_2}b^{s_1+s_2+s_3})v_4, \\ \text{где } s_1 \text{ – четное число, } s_2, s_3 \text{ – нечетные числа.}$$

Равенства (40), (41) с учетом (39) следуют из следующих равенств:

$$u_5\big(o_1(eo_2)o_3\big)v_5 = u_5\big(o_1o_4o_3\big)v_5 = u_5\big(o_3o_4o_1\big)v_5 = u_5\big(o_3(eo_2)o_1\big)v_5,$$
$$u_6\big(o_1(o_2e)o_3\big)v_6 = u_6\big(o_1o_4o_3\big)v_6 = u_6\big(o_3o_4o_1\big)v_6 = u_6\big(o_3(o_2e)o_1\big)v_6.$$

Лемма доказана. □

Предложение 6. *Пусть* $\beta_1 = -1$, $charF \neq 2$.

Тогда в алгебре R *для любых* $x, x_i \in R$, $i = \overline{1,4}$, *(x может быть равным присоединенной единице) из сравнения*

$$xS_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = x \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{N+2})$$

следует равенство $xS_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0$.

Доказательство. Если в записи всех элементов $x_i \in R$, $i = \overline{1,4}$, кроме a встречается только один порождающий b, то, принимая во внимание равенство $S_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = [x_1,x_2] \circ [x_3,x_4] + [x_2,x_3] \circ [x_1,x_4] + [x_1,x_3] \circ [x_4,x_2]$, где $x \circ y = xy + yx$, получим, что $S_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0$.

Предположим, что в алгебре R для некоторых $x, x_i \in R$, $i = \overline{1,4}$, выполняется сравнение

$$xS_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = x \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ R^{N+2}),$$

и в записи левой части этого сравнения найдутся по крайней мере два порождающих b.

Тогда по лемме 19 имеем, что $xS_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = xS_4(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3,\widetilde{x}_4)$.

Поскольку каждый из приведенных элементов $\widetilde{x}_i$, $i = \overline{1,4}$, может быть либо четным, либо нечетным, для доказательства предложения осталось рассмотреть с учетом леммы 20 следующие случаи:

1) $xS_4(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3,\widetilde{x}_4) = xS_4(o_1,o_2,o_3,o_4)$,
2) $xS_4(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3,\widetilde{x}_4) = xS_4(e,o_1,o_2,o_3)$,
3) $xS_4(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3,\widetilde{x}_4) = xS_4(e_1,e_2,o_1,o_2)$.
4) $xS_4(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3,\widetilde{x}_4) = xS_4(e_1,e_2,e_3,o)$,
5) $xS_4(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_3,\widetilde{x}_4) = xS_4(e_1,e_2,e_3,e_4)$.

В первом случае с учетом (39) имеем, что
$x_0S_3(o_1,o_2,o_3) = x_0\big((o_1o_2o_3 - o_3o_2o_1) + (o_3o_1o_2 - o_2o_1o_3) + (o_2o_3o_1 - o_1o_3o_2)\big) = 0$, при условии, что $x_0S_3(o_1,o_2,o_3) \in R^{N+2}$, откуда следует, что

$$xS_4(o_1,o_2,o_3,o_4) = x\big(o_1S_3(o_2,o_3,o_4) - o_2S_3(o_1,o_3,o_4) + \\ + o_3S_3(o_1,o_2,o_4) - o_4S_3(o_1,o_2,o_3)\big) = 0.$$

Во втором случае с учетом (39), (40), (41) получим, что

$$xS_4(e,o_1,o_2,o_3) = \\ = x\big(eS_3(o_1,o_2,o_3) - o_1S_3(e,o_2,o_3) + o_2S_3(e,o_1,o_3) - o_3S_3(e,o_1,o_2)\big) = \\ = x\big((o_3eo_2o_1 - o_1eo_2o_3) + (o_1eo_3o_2 - o_2eo_3o_1) + (o_3o_2o_1e - o_1o_2o_3e) + \\ + (o_1o_2eo_3 - o_3o_2eo_1) + (o_2o_3eo_1 - o_1o_3eo_2) + (o_1o_3o_2e - o_2o_3o_1e) + \\ + (o_2eo_1o_3 - o_3eo_1o_2) + (o_2o_1o_3e - o_3o_1o_2e) + (o_3o_1eo_2 - o_2o_1eo_3)\big) = 0.$$

В третьем случае с учетом (36), (37), (38) получим, что

$$\begin{gathered}
xS_4(e_1,e_2,o_1,o_2)= \\
= x\big([e_1,e_2]\circ[o_1,o_2]+[e_2,o_1]\circ[e_1,o_2]+[e_1,o_1]\circ[o_2,e_2]\big)= \\
= x\big((e_2o_1-o_1e_2)(e_1o_2-o_2e_1)+(e_1o_2-o_2e_1)(e_2o_1-o_1e_2)+ \\
+(e_1o_1-o_1e_1)(o_2e_2-e_2o_2)+(o_2e_2-e_2o_2)(e_1o_1-o_1e_1)\big)= \\
= x\big((e_2o_1e_1o_2-o_1e_1o_2e_2)+(e_1o_2e_2o_1-o_2e_2o_1e_1)+ \\
+(o_1e_2o_2e_1-e_1o_1e_2o_2)+(o_2e_1o_1e_2-e_2o_2e_1o_1)+ \\
+(e_1o_1o_2e_2-e_2o_1o_2e_1)+(e_2o_2o_1e_1-e_1o_2o_1e_2)+ \\
+(o_1e_1e_2o_2-o_1e_2e_1o_2)+(o_2e_2e_1o_1-o_2e_1e_2o_1)\big)=0.
\end{gathered}$$

В четвертом и пятом случаях с учетом равенства (36) получим, что

$$\begin{gathered}
xS_4(e_1,e_2,e_3,o)=x\big([e_1,e_2]\circ[e_3,o]+[e_2,e_3]\circ[e_1,o]+[e_1,e_3]\circ[o,e_2]\big)=0, \\
xS_4(e_1,e_2,e_3,e_4)=x\big([e_1,e_2]\circ[e_3,e_4]+[e_2,e_3]\circ[e_1,e_4]+[e_1,e_3]\circ[e_4,e_2]\big)=0.
\end{gathered}$$

Предложение доказано. □

4.4. **Определяющие соотношения в алгебре R в случае $\beta_1 \neq 0; \pm 1$.**

Предложение 7. *Пусть* $\beta_1 \neq 0; \pm 1$.

Тогда в алгебре R выполняется следующее соотношение:

$$g_1g_2\cdots g_{N+p}=0, \quad p\geq 2,$$

при условии, что среди порождающих $g_i \in \{a,\ b\}$ встречается не менее двух порождающих b.

Доказательство. По лемме 13 и замечанию к ней, с учетом леммы 14 имеет место равенство $a^{N+p-s-(i_1+i_2+\cdots+i_s)}ba^{i_1}ba^{i_2}\cdots ba^{i_s}=0$ для любого набора целых неотрицательных чисел $\{i_1,i_2,\ldots,i_s\}$, такого, что $(i_1+i_2+\cdots+i_s)\leq(N+p-s)$, $s=\overline{2,N+p}$, $p\geq 2$.

Предложение доказано. □

5. Стандартное тождество в алгебре R

Теорема. *Произвольная 2-порожденная нильпотентная алгебра R над полем характеристики, не равной двум, с условием $dimR^N/R^{N+1}=2,\ N\geq 3$, удовлетворяет стандартному тождеству $S_T(x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_T)=0$, где $T=\lceil\frac{N+2^{m+1}}{m}\rceil-2$, параметр m вычисляется по формуле:*

$$m=\begin{cases}\lfloor\log_2\frac{N}{\log_2\frac{N}{2}}\rfloor, & \text{если } N<\lfloor\log_2\frac{N}{2\log_2\frac{N}{2}}\rfloor 2^{\lfloor\log_2\frac{2N}{\log_2\frac{N}{2}}\rfloor};\\ \lfloor\log_2\frac{2N}{\log_2\frac{N}{2}}\rfloor, & \text{если } N\geq\lfloor\log_2\frac{N}{2\log_2\frac{N}{2}}\rfloor 2^{\lfloor\log_2\frac{2N}{\log_2\frac{N}{2}}\rfloor}.\end{cases}$$

Для лучшего восприятия взаимосвязи N и T приведем некоторые начальные значения функции $T=T(N)$:

N	$3,4$	$5,6$	$7,8$	$9,10,11$	$12,13,14$	$\ldots$	$30,31,32$	$33,34,35,36$	$\ldots$
T	4	5	6	7	8	$\ldots$	14	15	$\ldots$

N	$\ldots$	$93,94,95,96$	$97,98,99,100,101$	$\ldots$	$252,253,254,255,256$	$\ldots$
T	$\ldots$	30	31	$\ldots$	62	$\ldots$

Доказательство. Из определения стандартного полинома следует, что он линеен по всем своим переменным и обращается в нуль, если какие-либо два аргумента равны. Поэтому можно считать, что переменные стандартного полинома пробегают набор линейно-независимых элементов алгебры R.

Рассмотрим в алгебре R элемент

$$S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = \sum_{\sigma \in S_T} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(T)}$$

для некоторых $x_1, x_2, , \ \dots \ , x_T \in R$, где T – как в формулировке теоремы.

Лемма 21. *Для любых $x_1, x_2, \ \dots \ , x_T \in R$ выполняется сравнение*

$$S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) \equiv 0 \ (\mathrm{mod} \ R^{N+2}).$$

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ \dots \ , x_T \in R$ – различные базисные элементы алгебры R. Очевидно, можно считать, что x_i – мономы (слова) от порождающих a, b.

Обозначим через $deg(x_i)$ длину монома x_i от порождающих a, b.

Тогда $deg(x_1 x_2 \ \cdots \ x_T) = \sum\limits_{i=1}^{T} deg x_i$, и с учетом свойств стандартного полинома получим, что $degS = degS_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = \sum\limits_{i=1}^{T} deg x_i$.

Далее поставим задачу оценить минимум $degS$ для фиксированного N.

Подставляя в $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T)$ вместо $x_1, x_2, \ \dots \ , x_T$ базисные элементы: сначала порождающие a, b, затем слова длины 2 от порождающих a, b, образующие базис R^2 по модулю R^3, и так далее, слова длины i от порождающих a, b, образующие базис R^i по модулю R^{i+1}, пока не дойдем до подстановки очередного базисного элемента вместо x_T, получим для некоторого n следующее равенство:

$$\min_{x_i \in R} (degS) = s_1 + 2 \cdot s_2 + \cdots + (n-1) \cdot s_{n-1} + n \cdot r,$$

где $s_i = dim R^i / R^{i+1}, \ 1 \leq i \leq (n-1), \quad 0 \leq r < dim R^n / R^{n+1}$.

С другой стороны, заметим, что при фиксированном T среди всех 2-порожденных нильпотентных алгебр наименьшее значение величина $\min_{x_i \in R}(degS)$ достигнет тогда, когда $s_i = dim R^i / R^{i+1}$ будут максимальны, то есть, когда $s_2 = 2^2, s_3 = 2^3, \dots, s_{n-1} = 2^{n-1}$. Таким образом, получим, что

$$\min(degS) = 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot r = (n-2) \cdot 2^n + 2 + n \cdot r,$$

где $0 \leq r < 2^n$.

В этом случае для T будет иметь место следующее равенство:

$$T = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + r = \frac{2^n - 2}{2 - 1} + r = 2^n - 2 + r. \tag{42}$$

Заметим, что если выполняется неравенство $(n-2)2^n + 2 + nr \geq N + 2$, т.е.

$$(n-2)2^n + nr \geq N, \tag{43}$$

то это означает, что $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) \equiv 0 \ (\mathrm{mod} \ R^{N+2})$.

Наша цель: показать, что это неравенство выполняется для m и T (как в формулировке теоремы).

Исследуем, при каких n и r выполняется неравенство (43).

В предположении, что n и r являются минимальными по отношению к выполнению (43), имеем следующие неравенства:

$$\begin{cases} (n-2)2^n + nr - (n-1) \le N \le (n-2)2^n + nr, & \text{если } r > 0, \\ (n-2)2^n - (n-2) \le N \le (n-2)2^n, & \text{если } r = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем равенство

$$N = (n-2)2^n + nr - i, \tag{44}$$

где $0 \le r < 2^n$, $i = \overline{1, n-1}$ или $i = \overline{1, n-2}$.

Заметим, что если $N = (n-2)2^n$, где $n > 2$, то

$$n = \Big\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \Big\rfloor. \tag{45}$$

Доказательство этого факта следует из следующих равенств:

$$\log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} = \log_2 \frac{2(n-2)2^n}{\log_2 \frac{(n-2)2^n}{2}} = \log_2 \frac{2^{n+1}}{\frac{1}{n-2}\big(\log_2(n-2) + \log_2 2^{n-1}\big)} =$$
$$= \log_2 \frac{2^{n+1}}{\log_2(\sqrt[n-2]{n-2}\ ) + \frac{n-1}{n-2}} = (n+1) - \log_2 \big(\log_2(\sqrt[n-2]{n-2}\ ) + \frac{n-1}{n-2}\big),$$

поскольку, как легко проверить, при $n > 2$ справедливо неравенство $0 < \log_2 \big(\log_2(\sqrt[n-2]{n-2}\ ) + \frac{n-1}{n-2}\big) \le 1$.

Из чисел, которые имеют вид $N = (n-2)2^n$ для некоторых n, можно составить последовательность

$N_1 = 0$, $N_2 = 2^3$, $N_3 = 2 \cdot 2^4$, ... , $N_{n-1} = (n-2)2^n$, $N_n = (n-1)2^{n+1}$, ...

Числа N, для которых $N \ne (n-2)2^n$ для любых n, попадают в интервалы между соседними членами этой последовательности.

Так, число $N = (n-2)2^n + j$, где $0 < j < n2^n$, принадлежит интервалу $\big(N_{n-1},\ N_n\big)$ и параметр n находится по формуле $n = \big\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor$, а число $N = (n-3)2^{n-1} + j$, где $0 < j < (n-1)2^{n-1}$, принадлежит интервалу $\big(N_{n-2},\ N_{n-1}\big)$ и $n - 1 = \big\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor - 1 = \big\lfloor \log_2 \frac{N}{\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor$.

Используя (45), число $N_{n-1} = (n-2)2^n$, где $n > 2$, можно представить в следующем виде: $N_{n-1} = \big\lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor 2^{\big\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor}$.

Поэтому, рассматривая $N = (l-2)2^l + j$, где $0 < j < l \cdot 2^l$, заключаем, что если $N \in \big(N_{n-2},\ N_{n-1}\big)$, то есть $N < \big\lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor 2^{\big\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor}$, то параметр параметр l находится по формуле $l = \big\lfloor \log_2 \frac{N}{\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor$.

Если $N \in \big(N_{n-1},\ N_n\big)$, то есть $N \ge \big\lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor 2^{\big\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor}$, то параметр l находится по формуле $l = \big\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor$

Следовательно, для числа $N = (n-2)2^n + j$, где $0 \le j < n2^n$, удовлетворяющему неравенству (43), параметр n находится по формуле:

$$n = \begin{cases} \big\lfloor \log_2 \frac{N}{\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor, & \text{если } N < \big\lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor 2^{\big\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor}; \\ \big\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor, & \text{если } N \ge \big\lfloor \log_2 \frac{N}{2\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor 2^{\big\lfloor \log_2 \frac{2N}{\log_2 \frac{N}{2}} \big\rfloor}. \end{cases}$$

Таким образом, доказано, что $n = m$.

Тогда, используя то, что $n = m$, с учетом (42) получим, что $T = 2^m + r - 2$. Следовательно, учитывая (44) имеем следующие равенства:

$$N = (m-2)2^m + mr - i = m2^m + mr - 2^{m+1} - i =$$
$$= m(2^m + r - 2) - 2^{m+1} - i + 2m = mT - 2^{m+1} - i + 2m,$$

где $i = \overline{1, m-1}$ или $i = \overline{1, m-2}$.

Откуда получим, что $T = \frac{N+2^{m+1}+i}{m} - 2 = \left\lceil \frac{N+2^{m+1}}{m} \right\rceil - 2$, поскольку $i \le m-1$.

Очевидно, что для подобранного таким способом числа $T = \left\lceil \frac{N+2^{m+1}}{m} \right\rceil - 2$ (и соответствующего m) неравенство (43) выполняется. Следовательно, $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) \equiv 0 \pmod{R^{N+2}}$ для любых $x_1, x_2, \ \dots \ , x_T \in R$.

Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы.

Нам понадобятся для доказательства теоремы некоторые из свойств стандартного полинома. Согласно [4] имеют место следующие равенства:

$$S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = \sum_{1 \le i \le T} (-1)^{i+1} x_i S_{T-1}(x_1, \ \dots \ , \widehat{x_i}, \ \dots \ , x_T); \tag{46}$$

$$S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = \\ = \sum_{1 \le i < j \le T} (-1)^{i+j-1} [x_i, x_j] S_{T-1}(x_1, \ \dots \ , \widehat{x_i}, \ \dots \ , \widehat{x_j}, \ \dots \ , x_T), \tag{47}$$

где запись $\widehat{x_i}$ означает отсутствие элемента x_i в совокупности $x_1, \ \dots \ , x_T$.

Из формулы (47), в частности, получим следующее равенство:

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] + [x_2, x_3] \circ [x_1, x_4] + [x_1, x_3] \circ [x_4, x_2], \tag{48}$$

где $x \circ y = xy + yx$.

Заметим, что если $dim R^N / R^{N+1} = 2, \ \ dim R^{N+1} / R^{N+2} = 1$, то алгебра R либо нильпотентна индекса $(N+2)$, либо по предложению 1 удовлетворяет перестановочным тождествам $p^{\sigma}_{N+2}(x_1, \dots, x_{N+2}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{N+2}$, и, поэтому, с учетом леммы 21 алгебра R удовлетворяет и стандартному тождеству $S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = 0$.

Поэтому далее считаем, что $dim R^N / R^{N+1} = dim R^{N+1} / R^{N+2} = 2$.

Рассмотрим варианты, когда в записи элемента $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T)$ встречается помимо a разное количество порождающих b.

Если в записи S кроме a встречается только один порождающий b, то, так как $T \ge 4$, из формулы (48) получим, что

$$S_4(a^{s_1}, a^{s_2}, a^{s_3}, a^{s_4} b a^{s_4}) = [a^{s_1}, a^{s_2}] \circ [a^{s_3}, a^{s_4} b a^{s_4}] + \\ + [a^{s_2}, a^{s_3}] \circ [a^{s_1}, a^{s_4} b a^{s_4}] + [a^{s_1}, a^{s_3}] \circ [a^{s_4} b a^{s_4}, a^{s_2}] = 0,$$

и, поэтому, с учетом (46) получим, что $S = S_T(x_1, x_2, \ \dots \ , x_T) = 0$.

Если в записи S среди порождающих $a, \ b$ встречается не менее двух порождающих b, и либо $\beta_1 = 0$, либо $\beta_1 = -1$ $(char F \ne 2)$, либо $\beta_1 \ne 0; \pm 1$, то, принимая во внимание следствие из предложения 4 и предложения 6, 7, с учетом (47), (48) получим, что $S = 0$.

Если в случае $\beta_1 = 1$ $(char F \ne 2)$ в записи S среди порождающих $a, \ b$ встречается не менее трех порождающих b, то принимая во внимание следствие из предложения 5, с учетом (47), (48) получим, что $S = 0$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\beta_1 = 1$ $(char F \ne 2)$ и в записи S найдутся ровно два порождающих b.

В этом случае можно считать, что $T \le 5$, иначе по формулам (46), (47) получим, что $S = 0$.

Кроме того, можно считать, что b присутствует в записи двух x_i, а не в одном, иначе по формулам (46), (48) получим $S = 0$.

Исходя из этого при $T = 5$ элемент S представляется в следующем виде:

$$S = S_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = S_5(a^{s_1}, a^{s_2}, a^{s_3}, a^{s_4}ba^{s_5}, a^{s_6}ba^{s_7}),$$

где $1 \leq s_1 < s_2 < s_3$, числа $s_4, s_5, s_6, s_7 \geq 0$, такие, что $(s_4, s_5) \neq (s_6, s_7)$.

Тогда по формуле (46) получим, что

$$S = S_5(a^{s_1}, a^{s_2}, a^{s_3}, a^{s_4}ba^{s_5}, a^{s_6}ba^{s_7}) = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}a^{s_i}S_4(\ldots, \widehat{a^{s_i}}, \ldots, a^{s_4}ba^{s_5}, a^{s_6}ba^{s_7}).$$

Для доказательства того, что $S = 0$, достаточно показать, что каждое слагаемое в этой сумме равно нулю.

Рассмотрим, например, слагаемое $a^{s_1}S_4(a^{s_2}, a^{s_3}, a^{s_4}ba^{s_5}, a^{s_6}ba^{s_7})$, где в случае, когда $T = 5$, число $s_1 \geq 1$, а при $T = 4$ число $s_1 = 0$.

Тогда с учетом (48) получим, что

$$\begin{gathered}
a^{s_1}S_4(a^{s_2}, a^{s_3}, a^{s_4}ba^{s_5}, a^{s_6}ba^{s_7}) = \\
= a^{s_1}\big([a^{s_3}, a^{s_4}ba^{s_5}] \circ [a^{s_2}, a^{s_6}ba^{s_7}] + [a^{s_2}, a^{s_4}ba^{s_5}] \circ [a^{s_6}ba^{s_7}, a^{s_3}]\big) = \\
= a^{s_1}\big(a^{s_3}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_2}a^{s_6}ba^{s_7} - a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_3}a^{s_2}a^{s_6}ba^{s_7} - a^{s_3}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_2} + \\
+ a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_3}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_2} + a^{s_2}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_3}a^{s_4}ba^{s_5} - a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_2}a^{s_3}a^{s_4}ba^{s_5} - \\
- a^{s_2}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_3} + a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_2}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_3} + a^{s_2}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_3} - \\
- a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_2}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_3} - a^{s_2}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_3}a^{s_6}ba^{s_7} + a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_2}a^{s_3}a^{s_6}ba^{s_7} + \\
+ a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_3}a^{s_2}a^{s_4}ba^{s_5} - a^{s_3}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_2}a^{s_4}ba^{s_5} - a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_3}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_2} + \\
+ a^{s_3}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_2}\big).
\end{gathered}$$

После очевидных сокращений

$$\begin{gathered}
a^{s_1}S_4(a^{s_2}, a^{s_3}, a^{s_4}ba^{s_5}, a^{s_6}ba^{s_7}) = \\
= a^{s_1}\big((a^{s_3}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_2}a^{s_6}ba^{s_7} - a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_2}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_3}) + \\
+ (a^{s_2}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_3} - a^{s_3}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_2}) + \\
+ (a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_3}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_2} - a^{s_2}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_3}a^{s_6}ba^{s_7}) + \\
+ (a^{s_2}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_3}a^{s_4}ba^{s_5} - a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_3}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_2}) + \\
+ (a^{s_3}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_2} - a^{s_2}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_3}) + \\
+ (a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_2}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_3} - a^{s_3}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_2}a^{s_4}ba^{s_5})\big) = \\
= a^{s_1}\big(- [a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_2}a^{s_6}ba^{s_7}, a^{s_3}] + [a^{s_2}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_2}, a^{s_3-s_2}] + \\
+ [a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_3}a^{s_6}ba^{s_7}, a^{s_2}] - [a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_3}a^{s_4}ba^{s_5}, a^{s_2}] - \\
- [a^{s_2}a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_4}ba^{s_5}a^{s_2}, a^{s_3-s_2}] + [a^{s_6}ba^{s_7}a^{s_2}a^{s_4}ba^{s_5}, a^{s_3}]\big) = \\
= -[a^{s_1+s_4}ba^{s_2+s_5+s_6}ba^{s_7}, a^{s_3}] + [a^{s_1+s_2+s_4}ba^{s_5+s_6}ba^{s_2+s_7}, a^{s_3-s_2}] + \\
+ [a^{s_1+s_4}ba^{s_3+s_5+s_6}ba^{s_7}, a^{s_2}] - [a^{s_1+s_6}ba^{s_3+s_4+s_7}ba^{s_5}, a^{s_2}] - \\
- [a^{s_1+s_2+s_6}ba^{s_4+s_7}ba^{s_2+s_5}, a^{s_3-s_2}] + [a^{s_1+s_6}ba^{s_2+s_4+s_7}ba^{s_5}, a^{s_3}] = \\
= [a^{s_1+s_6}ba^{s_2+s_4+s_7}ba^{s_5} - a^{s_1+s_4}ba^{s_2+s_5+s_6}ba^{s_7}, a^{s_3}] + \\
+ [a^{s_1+s_2+s_4}ba^{s_5+s_6}ba^{s_2+s_7} - a^{s_1+s_2+s_6}ba^{s_4+s_7}ba^{s_2+s_5}, a^{s_3-s_2}] + \\
+ [a^{s_1+s_4}ba^{s_3+s_5+s_6}ba^{s_7} - a^{s_1+s_6}ba^{s_3+s_4+s_7}ba^{s_5}, a^{s_2}].
\end{gathered}$$

Используя очевидное равенство для произвольного x

$$[x, a^s] = a^{s-1}[x, a] + [x, a^{s-1}]a = [a^{s-1}x, a] + [xa, a^{s-1}],$$

можно добиться того, чтобы каждый коммутатор в последнем выражении имел следующий вид: $[f_1(a, b) - f_2(a, b), a]$, где элемент a в правой части коммутатора уже в первой степени.

Учитывая, что при $T = 5$ сумма $(s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6+s_7) \geq 7$, получим, что $deg\big(f_1(a,b) - f_2(a,b)\big) = \big((s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6+s_7)+2-1\big) \geq 8$.

Поскольку $T = 5$ соответствует $N = 5$ или 6, то в соответствии с соотношением (31) получим $a^{s_1} S_4(a^{s_2}, a^{s_3}, a^{s_4} b a^{s_5}, a^{s_6} b a^{s_7}) = 0$.

При $T = 4$ сумма $(s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6+s_7) \geq 4$, поэтому получим, что $deg\big(f_1(a,b) - f_2(a,b)\big) = \big((s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6+s_7)+2-1\big) \geq 5$.

Поскольку $T = 4$ соответствует $N = 3$ или 4, то в соответствии с соотношением (31) получим $a^{s_1} S_4(a^{s_2}, a^{s_3}, a^{s_4} b a^{s_5}, a^{s_6} b a^{s_7}) = 0$.

Теорема доказана. $\square$

Замечание. Если $m \geq 3$, то для $N = (m-2)2^m + mr$, где $1 \leq r < 2^m$ (крайнее правое значение N столбца вышеприведенной таблицы), найдется такая 2-порожденная нильпотентная алгебра R над полем характеристики, не равной двум, с условием $dimR^N/R^{N+1} = 2$, которая не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени $(T-1)$.

Доказательство. Рассмотрим свободную алгебру $F\langle x, y\rangle$ над полем F характеристики, не равной двум, в которой выберем идеал I, порожденный всеми словами длины не менее N, за исключением двух элементов x^N и $x^{N-1}y$.

Тогда фактор-алгебра $A = F\langle x, y\rangle/I$ является 2-порожденной нильпотентной индекса $(N+1)$ алгеброй над полем характеристики, не равной двум, с условием $dimA^N/A^{N+1} = 2$.

Предположим, что алгебра A удовлетворяет некоторому полилинейному тождеству $f(x_1, x_2, \ \dots \ , x_{T-1}) = 0$ степени $(T-1)$.

Обозначая образы $\overline{x}, \overline{y}$ соответственно через a, b, подставим, как при доказательстве леммы 21, в $f(x_1, x_2, \ \dots \ , x_{T-1})$ вместо $x_1, x_2, \ \dots \ , x_{T-1}$ базисные элементы: сначала порождающие a, b, затем слова длины 2 от порождающих a, b, образующие базис A^2 по модулю A^3, и так далее, получим, что

$$\min(degf(x_1, x_2, \ \dots \ , x_{T-1})) = (m-2)\cdot 2^m + 2 + m\cdot(r-1) = N + 2 - m,$$

поскольку $N = (m-2)2^m + mr$, где $r \geq 1$.

Таким образом, так как $m \geq 3$, можно подобрать такие $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ \dots \ , \widetilde{x}_{T-1} \in A$, что $f(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ \dots \ , \widetilde{x}_{T-1}) \notin A^N$.

Поскольку полином $f(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ \dots \ , \widetilde{x}_{T-1})$ находится в "свободной" части алгебры A, то $f(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ \dots \ , \widetilde{x}_{T-1}) \neq 0$, противоречие. $\square$

Автор выражает признательность рецензенту за замечания и предложения, а также благодарен участникам научного семинара "Теория колец"под руководством профессора Мальцева Юрия Николаевича за плодотворное обсуждение полученных автором результатов.

References

[1] E.P. Petrov, *Defining relations and identities of finite-dimensional nilpotent algebra R with condition $dimR^2/R^3 = 2$*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1052—1066. MR3580049

[2] E.P. Petrov, *On identities of finite-dimensional nilpotent algebras*, Algebra i Logika,**30**:5 (1991), 540–556. MR1202508

[3] Yu.N. Mal'tsev, *On identities of nilpotent algebras*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., **9** (1986), 68–72. Zbl 0623.16005

[4] L. H. Rowen, *Polynomial identities in ring theory*, Academic Press, New York, 1980. MR0576061

Evgeniy Petrovich Petrov
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: pep@email.asu.ru