S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1198–1206 (2017) УДК 519.17
DOI 10.17377/semi.2017.14.101 MSC 06B20

ВЕРШИННО ТРАНЗИТИВНЫЕ ПОЛУТРЕУГОЛЬНЫЕ ГРАФЫ С $\mu = 7$

Н.Д. ЗЮЛЯРКИНА, А.А. МАХНЕВ, Д.В. ПАДУЧИХ, М.М. ХАМГОКОВА

Abstract. A semi-triangular Higman graph is a strongly regular graph with $v = \binom{m}{2}$, $k = 2(m-2)$. The semi-triangular Higman graph with $\mu = 7$ is pseudogeometric for $GQ(14, 6)$. Previously, possible orders automorphisms of a pseudogeometric graph for $GQ(14, 6)$ were found, and the structure subgraphs of fixed points of these automorphisms was determined. In this work we found a structure of nonsolvable group G of automorphisms of a pseudogeometric graph for $GQ(14, 6)$, acting transitively on the set of vertices of the graph.

Keywords: strongly regular graph, automophism.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a. Для подграфа Δ графа Γ через $\Delta^\perp$ обозначим $\cap_{a\in\Delta} a^\perp$.

Через k_a обозначим *степень вершины* a, т.е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b верно равенство $|[a] \cap [b]| = \mu$. Графом ранга 3 называется сильно регулярный граф с такой

Zyulyarkina, N.D., Makhnev, A.A., Paduchikh, D.V., Khamgokova, M.M., Vertex-transitive semi-triangular graphs with $\mu = 7$.

Работа поддержана грантом РНФ (проект 15-11-10025).

Поступила 6 октября 2017 г., опубликована 27 ноября 2017 г.

вершинно транзитивной группой автоморфизмов, что стабилизатор вершины действует транзитивно на ее окрестности и на ее антиокрестности.

Через $K_{m,n}$ обозначим полный двудольный граф с долями порядков m, n. Граф на множестве пар $X \times Y$ называется *$a \times b$-решеткой*, если $|X| = a$, $|Y| = b$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Граф на множестве неупорядоченных пар из X называется *треугольным графом* $T(m)$, если $|X| = m$, а пары $\{x, y\}$ и $\{u, w\}$ смежны тогда и только тогда, когда $|\{x, y\} \cap \{u, w\}| = 1$. Для автоморфизма g графа Γ через $\alpha_i(g)$ обзначим число $|\{w \mid d(w, w^g) = i\}|$.

Система инцидентности $(X, \mathcal{L})$, где X — множество точек и $\mathcal{L}$ — множество прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Если $\alpha = 1$, то частичная геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s, t)$. *Точечным графом* геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на одной прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

Графы ранга 3 с $v = \binom{m}{2}, k = 2(m - 2)$ изучал Д. Хигмен [1]. Он доказал, что если G — группа подстановок ранга 3 степени $\binom{m}{2}$, $m \geq 5$ с подстепенью $2(m-2)$, то либо G изоморфна 4-транзитивной подгруппе из S_m, действующей на 2-элементных подмножествах, либо G изоморфна подгруппе $P\Gamma L_2(8)$ из S_9, действующей на 2-элементных подмножествах, либо выполняется одно из утверждений:

(1) $\mu = 6$ и $m = 9, 17, 27$ или 57;

(2) $\mu = 7$ и $m = 51$;

(3) $\mu = 8$ и $m = 28, 36, 325, 903$ или 8128.

Позднее, в [2] были классифицированы графы ранга 3.

Полутреугольным графом Хигмена назовем сильно регулярный граф Γ с $v = \binom{m}{2}$ и $k = 2(m - 2)$. Д. Хигмен в [1] доказал, что полутреугольный граф Γ либо изоморфен треугольному графу $T(m)$ (или одному из графов Чанга в случае $m = 8$), либо $\mu = 6, 7$ или 8.

Ранее [3] были найдены возможные автоморфизмы полутреугольных графов и подграфы их неподвижныхз точек в случае $\mu = 7$. В этом случае Γ является псевдогеометрическим графом для $GQ(14, 6)$.

Предложение. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с $v = \binom{m}{2}, k = 2(m - 2)$ и $\mu = 7$. Тогда $m = 51$, Γ имеет параметры $(1275, 98, 13, 7)$, для $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, элемента g простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω — пустой граф, и либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 60r + 45$, либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 20r + 5$, либо $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 340r + 85$;

(2) Ω является либо 15-кликой и $p = 2, 3, 7$, либо 8-кликой и $p = 7$, либо $3n$-кликой, $n = 1, 2, 3, 4$ и $p = 3$;

(3) *Ω является t-кокликой, $p = 7$, t сравнимо с 1 по модулю 7, $8 \le t \le 85$ и $\alpha_1(g) = 7m + 140r + 105$;*

(4) *$\Omega = K_{7,7}$, $p = 13$ и $\alpha_1(g) = 260r - 13$;*

(5) *Ω — непустой граф, содержащий геодезический 2-путь b, a, c и либо*

(*i*) *$p = 7$, $|\Omega| = 7l + 1$, $2 \le l \le 25$, Ω не содержит связных компонент, являющихся сильно регулярными графами, либо*

(*ii*) *$p = 5$, $|\Omega| = 5r$, $4 \le r \le 39$, если Ω — сильно регулярный граф, то Ω является 5×5-решеткой или 10×10-решеткой, либо*

(*iii*) *$p = 3$, $|\Omega| = 3l$, $3 \le l \le 65$, если Ω — сильно регулярный граф, то Ω является треугольным графом $T(6)$, либо*

(*iv*) *$p = 2$, $|\Omega| = 2r + 1$, $7 \le r \le 97$.*

По предложению $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13, 17\}$, причем 169 не делит $|G|$.

Теорема. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1275, 98, 13, 7)$, группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Если 17 делит $|\bar{T}|$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$\bar{T} \cong Sp_8(2)$, $V = S(G)$ — элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ и $Sp_8(2)$ действует неприводимо на V;*

(2) *$\bar{T} \cong L_4(4)$, либо*

(*i*) *$\bar{T}_a$ — расширение E_{64} с помощью $SL_3(4)$, $V = S(G)$ — элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ и $L_4(4)$ действует неприводимо на V, либо*

(*ii*) *$\bar{T}_a$ — расширение E_{64} с помощью $GL_3(4)$, $S(G) = R \times V$, R — элементарная абелева 3-группа, $|R : R_a| = 3$ и $L_4(4)$ действует неприводимо на R, V — элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ и $L_4(4)$ действует неприводимо на V;*

(3) *$\bar{T} \cong Sp_4(4)$, либо*

(*i*) *$\bar{T}_a$ — расширение E_{64} с помощью A_5, $V = S(G)$ — элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ и $Sp_4(4)$ действует неприводимо на V, либо*

(*ii*) *$\bar{T}_a$ — расширение E_{64} с помощью $Z_3 \times A_5$, $S(G) = R \times V$, R — элементарная абелева 3-группа, $|R : R_a| = 3$ и $Sp_4(4)$ действует неприводимо на R, V — элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ и $Sp_4(4)$ действует неприводимо на V;*

(4) *$\bar{T} \cong L_2(16)$, либо*

(*i*) *$\bar{T}_a$ — группа порядка 16, $V = S(G)$ — элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ и $L_2(16)$ действует неприводимо на V, либо*

(*ii*) *$\bar{T}_a$ — расширение E_{16} с помощью Z_3, $S(G) = R \times V$, R — элементарная абелева 3-группа, $|R : R_a| = 3$ и $L_2(16)$ действует неприводимо на R, V — элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ и $L_2(16)$ действует неприводимо на V, либо*

(*iii*) *$\bar{T}_a$ — расширение E_{16} с помощью Z_5, $S(G)$ — 5-группа и $|S(G) : S(G)_a| = 25$, либо*

(*iv*) *$\bar{T}_a$ — расширение E_{16} с помощью Z_{15}, если R — силовская 3-подгруппа из $S(G)$, то R — элементарная абелева 3-группа, $|R : R_a| = 3$ и $L_2(16)$ действует неприводимо на R, если P — силовская 5-подгруппа из $S(G)$, то $|P : P_a| = 25$.*

Следствие. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1275, 98, 13, 7)$, группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ*

и $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Если 17 делит $\bar{T}$, то выполняется одно из следующих утверждений:

(1) $\bar{T} \cong Sp_4(4)$, $\bar{T}_a$ — расширение E_{64} с помощью $Z_3 \times A_5$, $S(G) = R \times V$, R — элементарная абелева 3-группа, $|R : R_a| = 3$ и $Sp_4(4)$ действует неприводимо на R, $|R| \in \{3^{18}, 3^{34}, 3^{50}, 3^{51}, 3^{153}, 3^{204}, 3^{255}, 3^{256}\}$, V — элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ и $Sp_4(4)$ действует неприводимо на V, $|V| \in \{5^{18}, 5^{33}, 5^{50}, 5^{85}, 5^{153}, 5^{225}, 5^{255}\}$;

(2) $\bar{T} \cong L_2(16)$ и $\bar{T}_a$ — расширение E_{16} с помощью Z_3, Z_5 или Z_{15}.

Равенства для $|R|$ и $|V|$ в следствии получаются ввиду [4].

1. Доказательство теоремы

В этом разделе предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1275, 98, 13, 7)$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда для вершины $a \in \Gamma$ имеем $|G : G_a| = 1275 = 51 \cdot 25$. Пусть ψ — мономиальное представление G в $GL(1275, \mathbf{C})$, χ_2 — характер проекции ψ на подпространство собственных векторов размерности 833. Тогда по [3, лемма 3] имеем $\chi_2(g) = (13\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 85)/20$ и $\chi_2(g) - 833$ делится на p, если g — элемент простого порядка p из G.

Чнрез $\bar{T}$ обозначим цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$.

Лемма 1.1. *Пусть f — элемент из G порядка 17, g — элемент из $C_G(f)$ простого порядка $p < 17$ и $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. Тогда $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω — пустой граф, либо $p = 3$, $\alpha_1(f) = 765$ и $\alpha_1(g) = 765$, либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 85, 425, 765, 1105$;

(2) $p = 7$, $|\Omega| = 85$ и $\alpha_1(g) = 1190$ (в частности, любая $\langle g\rangle$-орбита длины 7 является кликой и $|C_G(f)|$ не делится на 49);

(3) $p = 5$, $|\Omega| = 170$ и $\alpha_1(g) = 935$;

(4) $p = 3$, $|\Omega| = 102$ и $\alpha_1(g) = 1071$ или $|\Omega| = 153$ и $\alpha_1(g) = 714$;

(5) $p = 2$, $|\Omega| = 2r+1$, , $\alpha_1(g) = 40s+26r+78$, в случае $r = 8$ имеем $s = -2, 15$, в случае $r = 25$ имеем $s = -4, 13$, в случае $r = 42$ имеем $s = -19, -2$, в случае $r = 59$ имеем $s = -36, -19$, в случае $r = 76$ имеем $s = -36, -19$, и в случае $r = 93$ имеем $s = -53, -36$.

Доказательство. По предложению $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф, $\alpha_1(f) = 340l + 85$ и $\alpha_2(f) = 1190 - 340l$, $l \le 3$.

Если Ω — пустой граф, то либо $p = 3$, $\alpha_1(f) = 765$ и $\alpha_1(g) = 60r + 45$, либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 20r + 5$. Так как $\alpha_1(g)$ делится на 17, то в случае $p = 3$ имеем $\alpha_1(g) = 15(4r+3)$ и $r = 12$. В случае $p = 5$ имеем $\alpha_1(g) = 5(4r+1)$ и $r = 4+17s$.

Если Ω является n-кокликой, то $p = 7$, $n = 85$ и $\alpha_1(g) = 70(2r - 7)$ делится на 17. Отсюда $\alpha_1(g) = 1190$.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь. По предложению либо

(i) $p = 7$, $|\Omega| = 85$, либо

(ii) $p = 5$, $|\Omega| = 5r$, $r = 17, 34$, либо

(iii) $p = 3$, $|\Omega| = 3l$, $l = 17, 34, 51$, либо

(iv) $p = 2$, $|\Omega| = 2r + 1$.

В случае $p = 5$ число $\chi_2(g) = (13r - w_1 + 17)/4$ сравнимо с 3 по модулю 5, поэтому $w_1 = 13r + 20l + 5$, $l = 4, -13$. Если $r = 17$, то $w_1 = 306$, противоречие, а если $r = 34$, то $w_1 = 187$.

В случае $p=3$ число $\chi_2(g)=(39l-\alpha_1(g)+85)/20$ сравнимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_1(g)=39l+60r+45$, $r=12,-5,-22$. Если $l=17$, то $\alpha_1(g)=17(39+45)$, противоречие, если $l=34$, то $\alpha_1(g)=17(78-15)=1071$, а если $l=51$, то $\alpha_1(g)=17(117-75)=714$.

В случае $p=2$ число $\chi_2(g)=(26r-\alpha_1(g)+98)/20$ нечетно, поэтому $\alpha_1(g)=40s+26r+78$ и $3s-4r+4$ делится на 17. В случае $r=8$ имеем $s=-2,15$, в случае $r=25$ имеем $s=-2,15$. В случае $r=42$ число $3s-164$ делится на 17 и $s=-19,-2$, в случае $r=59$ число $3s-232$ делится на 17 и $s=-36,-19$. В случае $r=76$ число $s-100$ делится на 17 и $s=-36,-19$, в случае $r=93$ число $3s-28$ делится на 17 и $s=-53,-36$. □

Лемма 1.2. *Если* 17 *делит* $|\bar G|$, *то либо* $\bar T\cong L_2(16)$, $\bar T_a$ — *подгруппа из расширения* E_{16} *с помощью* Z_{15}, *либо* $\bar T\cong L_4(4)$, $\bar T_a$ — *расширение* E_{64} *с помощью* $GL_3(4)$, *либо* $\bar T\cong Sp_4(4)$, $\bar T_a$ — *подгруппа из расширения* E_{64} *с помощью* $Z_3\times A_5$, *либо* $\bar T\cong Sp_8(2)$, $\bar T_a$ — *расширение* E_{2^7} *с помощью* $Sp_6(2)$.

Доказательство. Пусть 17 делит $|\bar G|$. По [5, теорема 1] группа $\bar T$ изоморфна $L_2(16)$, $L_2(17)$, $Sp_4(4)$, $L_4(4)$, $U_4(4)$, $L_3(16)$, $\Omega_8^-(2)$, $Sp_6(4)$, $Sp_8(2)$, $F_4(2)$, He.

Так как $|\bar T:\bar T_a|$ делится на 17 и делит $51\cdot 25$, то либо $\bar T\cong L_2(16)$, $\bar T_a$ — подгруппа из расширения E_{16} с помощью Z_{15}, либо $\bar T\cong L_4(4)$, $\bar T_a$ — расширение E_{64} с помощью $GL_3(4)$, либо $\bar T\cong Sp_4(4)$, $\bar T_a$ — подгруппа из расширения E_{64} с помощью $Z_3\times A_5$, либо $\bar T\cong Sp_8(2)$, $\bar T_a$ — расширение E_{2^7} с помощью $Sp_6(2)$. □

Лемма 1.3. *Если* $\bar T\cong Sp_8(2)$, *то* G — *расширение элементарной абелевой* 5*-группы* V *с помощью* $Sp_8(2)$, $\bar T_a$ — *расширение* E_{2^7} *с помощью* $Sp_6(2)$, $|V:V_a|=5$ *и* $Sp_8(2)$ *действует неприводимо на* V.

Доказательство. Пусть $\bar T\cong Sp_8(2)$. Так как $|\bar T:\bar T_a|=255$, то $|S(G):S(G)_a|=5$, поэтому $V=S(G)$ — элементарная абелева 5-группа и $Sp_8(2)$ действует неприводимо на V. □

Лемма 1.4. *Если* $\bar T\cong L_4(4)$, *то верно одно из утверждений:*

(1) $\bar T_a$ — *расширение* E_{64} *с помощью* $SL_3(4)$, $V=S(G)$ — *элементарная абелева* 5*-группа*, $|V:V_a|=5$ *и* $L_4(4)$ *действует неприводимо на* V*;*

(2) $\bar T_a$ — *расширение* E_{64} *с помощью* $GL_3(4)$, $S(G)=R\times V$, R — *элементарная абелева* 3*-группа*, $|R:R_a|=3$ *и* $L_4(4)$ *действует неприводимо на* R, V — *элементарная абелева* 5*-группа*, $|V:V_a|=5$ *и* $L_4(4)$ *действует неприводимо на* V.

Доказательство. Пусть $\bar T\cong L_4(4)$. Если $\bar T_a$ — расширение E_{64} с помощью $SL_3(4)$, то $|\bar T:\bar T_a|=255$, поэтому $|S(G):S(G)_a|=5$, $V=S(G)$ — элементарная абелева 5-группа и $L_4(4)$ действует неприводимо на V.

Если $\bar T_a$ — расширение E_{64} с помощью $GL_3(4)$, то $|\bar T:\bar T_a|=85$, поэтому $|S(G):S(G)_a|=15$. В этом случае $S(G)=R\times V$, R — элементарная абелева 3-группа, $|R:R_a|=3$ и $L_4(4)$ действует неприводимо на R, V — элементарная абелева 5-группа, $|V:V_a|=5$ и $L_4(4)$ действует неприводимо на V. □

Лемма 1.5. *Если* $\bar T\cong Sp_4(4)$, *то верно одно из утверждений:*

(1) $\bar T_a$ — *расширение* E_{64} *с помощью* A_5, $V=S(G)$ — *элементарная абелева* 5*-группа*, $|V:V_a|=5$ *и* $Sp_4(4)$ *действует неприводимо на* V*;*

(2) $\bar T_a$ — *расширение* E_{64} *с помощью* $Z_3\times A_5$, $S(G)=R\times V$, R — *элементарная абелева* 3*-группа*, $|R:R_a|=3$ *и* $Sp_4(4)$ *действует неприводимо на* R, V —

элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ *и* $Sp_4(4)$ *действует неприводимо на* V.

Доказательство. Пусть $\bar{T} \cong Sp_4(4)$. Если $\bar{T}_a$ — расширение E_{64} с помощью A_5, то $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 255$, поэтому $|S(G) : S(G)_a| = 5$, $V = S(G)$ — элементарная абелева 5-группа и $Sp_4(4)$ действует неприводимо на V.

Если $\bar{T}_a$ — расширение E_{64} с помощью $Z_3 \times A_5$, то $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 85$, поэтому $|S(G) : S(G)_a| = 15$. В этом случае $S(G) = R \times V$, R — элементарная абелева 3-группа, $|R : R_a| = 3$ и $Sp_4(4)$ действует неприводимо на R, V — элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ и $Sp_4(4)$ действует неприводимо на V. □

Лемма 1.6. *Если* $\bar{T} \cong L_2(16)$*, то верно одно из утверждений:*

(1) $\bar{T}_a$ *— группа порядка 16,* $V = S(G)$ *— элементарная абелева 5-группа,* $|V : V_a| = 5$ *и* $L_2(16)$ *действует неприводимо на* V*;*

(2) $\bar{T}_a$ *— расширение* E_{16} *с помощью* Z_3, $S(G) = R \times V$, R *— элементарная абелева 3-группа,* $|R : R_a| = 3$ *и* $L_2(16)$ *действует неприводимо на* R, V *— элементарная абелева 5-группа,* $|V : V_a| = 5$ *и* $L_2(16)$ *действует неприводимо на* V,

(3) $\bar{T}_a$ *— расширение* E_{16} *с помощью* Z_5, $S(G)$ *— 5-группа и* $|S(G) : S(G)_a| = 25$*;*

(4) $\bar{T}_a$ *— расширение* E_{16} *с помощью* Z_{15}*, если* R *— силовская 3-подгруппа из* $S(G)$*, то* R *— элементарная абелева 3-группа,* $|R : R_a| = 3$ *и* $L_2(16)$ *действует неприводимо на* R*, если* P *— силовская 5-подгруппа из* $S(G)$*, то* $|P : P_a| = 25$.

Доказательство. Пусть $\bar{T} \cong L_2(16)$.

Если $\bar{T}_a$ — группа порядка 16, то $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 255$, поэтому $|S(G) : S(G)_a| = 5$, $V = S(G)$ — элементарная абелева 5-группа и $L_2(16)$ действует неприводимо на V.

Если $\bar{T}_a$ — расширение E_{16} с помощью Z_3, то $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 85$, поэтому $|S(G) : S(G)_a| = 15$. В этом случае $S(G) = R \times V$, R — элементарная абелева 3-группа, $|R : R_a| = 3$ и $L_2(16)$ действует неприводимо на R, V — элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ и $L_2(16)$ действует неприводимо на V.

Если $\bar{T}_a$ — расширение E_{16} с помощью Z_5, то $S(G)$ — 5-группа и $|S(G) : S(G)_a| = 25$.

Пусть $\bar{T}_a$ — расширение E_{16} с помощью Z_{15}. Если R — силовская 3-подгруппа из $S(G)$, то R — элементарная абелева 3-группа, $|R : R_a| = 3$ и $L_2(16)$ действует неприводимо на R. Если P — силовская 5-подгруппа из $S(G)$, то $|P : P_a| = 25$. Лемма доказана. □

Из лемм 1.2–1.7 следует теорема.

2. Доказательство следствия

В этом разделе предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1275, 98, 13, 7)$, неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$ и 17 делит $\bar{T}$. По теореме группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(16)$, $L_4(4)$, $Sp_4(4)$ или $Sp_8(2)$.

Лемма 2.1. *Случай* $\bar{T} \cong Sp_8(2)$ *невозможен.*

Доказательство. Пусть $\bar{T} \cong Sp_8(2)$. Тогда $\bar{T}_a$ — расширение E_{2^7} с помощью $Sp_6(2)$.

Множество вершин нашего графа Γ разбивается пятью $\bar{T}$-орбитами длины 255. Рассмотрим $\bar{T}$-орбиту Δ как подграф из Γ. Пусть $a \in \Delta$. Тогда $\Delta(a)$ является объединением $\bar{T}_a$-орбит. Подграф Δ содержит три $\bar{T}_a$-орбиты: длин $1, 126, 128$. Две последние не содержатся в $\Delta(a)$, потому что $k = 98$. Значит, Δ — это коклика. Но ввиду границы Хоффмана порядок максимальной коклики в Γ не превосходит 85, противоречие. □

Лемма 2.2. *Случай $\bar{T} \cong L_4(4)$ не возниает.*

Доказательство. Допустим сначала, что $T \cong L_4(4)$ и $\bar{T}_a \cong E_{64}.GL_3(4)$. Тогда группа $\bar{T}$ содержит два класса C, D сопряженных подгрупп, изоморфных T_a. Поэтому множество вершин разбивается пятнадцатью $\bar{T}$-орбитами длины 85, у которых стабилизаторы вершин лежат либо в C, либо в D. Мы будем говорить, что орбиты имеют тип C или D, соответственно. Подгруппа $\bar{T}_a$ имеет орбиты длины 1, 84 в $\bar{T}$-орбитах своего типа и действует без неподвижных точек на $\bar{T}$-орбитах чужого типа. Мультимножество индексов представителей классов сопряженных подгрупп из $\bar{T}_a$, индекс которых не больше 85, равно $\{1^1, 3^1, 21^2, 63^8, 64^1, 84^1\}$. Поэтому на $\bar{T}$-орбитах чужого типа у $\bar{T}_a$ две орбиты: длин 21 и 64.

Ввиду 2-транзитивности $\bar{T}$ на своих орбитах $\bar{T}$-орбиты являются кокликами, для которых достигается граница Хоффмана [**?**, предложение 1.3.2], и каждая вершина a смежна ровно с 7 вершинами в любой из 14 чужих $\bar{T}$-орбит. Противоречие с тем, что $\bar{T}$-орбиты не содержат $\bar{T}_a$-орбит, объединение которых дало бы 7-подмножество.

Пусть $\bar{T} \cong L_4(4)$, $\bar{T}_a$ — расширение E_{64} с помощью $SL_3(4)$, $V = S(G)$ — элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ и $L_4(4)$ действует неприводимо на V

Граф Γ — объединение пяти $\bar{T}$-орбит длины 255. Возьмем $\bar{T}$-орбиту Δ и вершину $a \in \Delta$. $\bar{T}_a$ имеет 4 орбиты на Δ: длин 1, 1, 1, 252. Подграф $\Delta(a)$ не содержит орбит длины 252 и не пуст ввиду границы Хоффмана. Проверка в GAP показывает, что Δ является объединением 85 изолированных треугольников. Тогда в Δ можно взять коклику Хоффмана C порядка 85, и по [6, предложение 1.3.2] всякая вершина из $\Gamma - C$ смежна точно с 7 вершинами из C. Но для вершин из $\Delta - C$ это не так. Противоречие. □

Лемма 2.3. *Пусть $\bar{T} \cong Sp_4(4)$. Тогда $\bar{T}_a$ — расширение E_{64} с помощью $Z_3 \times A_5$.*

Доказательство. Пусть $\bar{T} \cong Sp_4(4)$, $\bar{T}_a$ — расширение E_{64} с помощью A_5, $V = S(G)$ — элементарная абелева 5-группа, $|V : V_a| = 5$ и $Sp_4(4)$ действует неприводимо на V.

Тогда Γ — объединение пяти $\bar{T}$-орбит длины 255. Возьмем T-орбиту Δ и вершину $a \in \Delta$. Группа $\bar{T}_a$ имеет 7 орбит на Δ: длин 1, 1, 1, 60, 64, 64, 64. Ввиду границы Хоффмана подграф $\Delta(a)$ не пуст. Если $\Delta(a)$ содержит $\bar{T}_a$-орбиту длины 60 или 64, то в Δ найдется пара вершин с числом общих соседей больше 13, что невозможно в Γ. Поэтому Δ является объединением 85 изолированных треугольников, и мы получаем противоречие так же, как и в случае $L_4(4)$. □

Лемма 2.4. *Пусть $\bar{T} \cong L_2(16)$. Тогда $\bar{T}_a$ — расширение E_{16} с помощью Z_3, Z_5 или Z_{15}.*

Доказательство. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(v, k, \lambda, \mu) = (1275, 98, 13, 7)$, на котором транзитивно действует группа автоморфизмов $G = VT$, где $T \cong L_2(16)$, V — нормальная элементарная абелева 5-группа, причем для любой вершины $a \in \Gamma$ имеем $|V : V_a| = 5$, $|T : T_a| = 255$. Тогда T_a — силовская 2-подгруппа из T, T_a имеет в a^T пятнадцать неподвижных вершин и пятнадцать орбит длины 16.

Пусть $a \in \Gamma$, $v \in V_a^{\#}$ и $b \in [a] - \mathrm{Fix}(v)$. Тогда b^V лежит в $[a]$. Но это значит, что для всех $x \in a^V$ также $b^V \subseteq [x]$, то есть $a^V \subseteq [b]$. Назовем ребро $\{x, y\}$ *толстым*, если $x^V \cup y^V$ является 10-кликой.

Заметим, что любое толстое ребро, лежащее в a^T и инцидентное a, лежит в $X = \mathrm{Fix}(T_a) \cap a^T$. В противном случае в толстую окрестность a попала бы T_a-орбита длины 16, и подграф общих соседей любых двух вершин из a^V содержал бы шестнадцать V-орбит, что невозможно. Далее, $N_T(T_a)$ содержит циклическую 15-подгруппу, действующую регулярно на X. Следовательно, a сдвигается вдоль толстого ребра автоморфизмом $g \in N_T(T_a)$ таким, что $|g|$ делит 15. То есть, любое толстое ребро в X лежит в толстом цикле длины 3, 5 или 15. Следовательно, $[a]$ содержит по меньшей мере две V-орбиты. То есть подграф общих соседей любых двух вершин из a^V содержит больше, чем $\mu = 7$ вершин, и, значит, число общих соседей равно $\lambda = 13$, а a^V является 5-кликой. Группа T действует транзитивно на множестве V-орбит, поэтому все они являются 5-кликами, и в окрестности любой вершины x лежит ровно две V-орбиты, не содержащие x. Таким образом, получаем разбиение Γ компонентами связности, отвечающими толстым ребрам и порожденными 5-кликовым расширением цикла длины 3, 5 или 15.

Итак, для любых $a, b \in \Gamma$, $v \in V$ имеет место одна из возможностей:

(1) $a^V = b^V$;
(2) $a^V \cup b^V$ является 5×2-решеткой, и обе вершины a, b лежат вместе в $\mathrm{Fix}(v)$ или в $\Gamma - \mathrm{Fix}(v)$;
(3) клики a^V и b^V изолированы друг от друга;
(4) $a^V \cup b^V$ является 10-кликой.

Пусть теперь $a \in \Gamma$, $v \in V_a^{\#}$ и $b \in \Gamma_2(a) - \mathrm{Fix}(v)$. Очевидно, что такие a, b, v найдутся. Тогда клики a^V и b^V изолированы друг от друга. Возьмем вершину $c \in [a] \cap [b]$. В зависимости от того, лежит c в $\mathrm{Fix}(v)$ или нет либо $a^V \cup c^V$, либо $b^V \cup c^V$ является 10-кликой. Ввиду перечисленных вариантов смежности между V-орбитами и ввиду строения компонент толстой связности нетрудно понять, что μ-подграф $[a] \cap [b]$ пересекает как $\mathrm{Fix}(v)$, так и $\Gamma - \mathrm{Fix}(v)$ не более чем по двум вершинам, то есть содержит не больше 4 вершин. Противоречие с тем, что $\mu = 7$. Лемма доказана. □

Из лемм 2.1–2.4 получаем следствие.

References

[1] D.G. Higman, *Characterization of families of rank 3 permutation groups by the subdegrees, I*, Arch. Math., **21** (1970), 151–156. MR0268260

[2] M.W. Liebeck, J. Saxl, *The finite primitive permutation groups of rank 3*, Bull. London Math. Soc., **18**:2 (1986), 165–172. MR0818821

[3] N.D. Zyulyarkina, A.A. Makhnev, *On automorphisms of semitriangular graphs with $\mu = 7$*, Doklady Mathematics, **84**:1 (2011), 450–453. MR2884516

[4] S. Jansen, K. Lux, R. Parker, R. Wilson, *ATLAS of Brauer Characters*, Oxford Science Publ., London Math. Soc., New Series, **11**, 1995. MR1367961

[5] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean electr. Math. Reports , **6** (2009), 1–12. MR2586673

[6] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, New York: Springer-Verlag, 1989. MR1002568

Natal'ya Dmitrievna Zyulyarkina
South Ural State University,
Lenina Avenue, 76,
454080, Chelyabinsk, Russia
E-mail address: toddeath@yandex.ru

Alexander Alekseevich Makhnev
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
S.Kovalevskaya Str., 16
620990, Yekaterinburg, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Dmitrii Viktorovich Paduchikh
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
S.Kovalevskaya Str., 16
620990, Yekaterinburg, Russia
E-mail address: dpaduchikh@gmail.com

Madina Mukhadinovna Khamgokova
Kabardino-Balkar State University,
Chernyshevskogo st., 173
360004, Nal'chik, Russia
E-mail address: hamgokova.madina@yandex.ru