S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1207–1214 (2017) УДК 519.233
DOI 10.17377/semi.2017.14.102 MSC 62F03

ТЕСТИРОВАНИЕ НОРМАЛЬНОСТИ ОЧЕНЬ МАЛЫХ ВЫБОРОК

А.П. КОВАЛЕВСКИЙ

Abstract. We consider testing the hypothesis of normality for 2, 3, 4 samples in absence of a priori information about its distribution parameters and alternative hypotheses. We base a precise test on a ratio of a range to a minimal spacing. We compare the test with Shapiro & Wilk test.

Keywords: normality test, L'Huillier formula, small sample size, Shapiro & Wilk test, spherical tetrahedron.

1. Введение

Рассматривается задача проверки гипотезы о нормальности выборки при отсутствии априорной информации как о параметрах распределения, так и об альтернативных гипотезах. Отметим, что как правило проверку нормальности предлагают проводить при объеме выборки n не менее 8 (см. [1]). Это связано с тем, что для отыскания критических уровней используется нормальное приближение для используемой статистики, а оно оказывается весьма неточным. В частности, ниже будет продемонстрирована величина погрешности, которая возникает при использовании нормальной аппроксимации для статистики критерия Шапиро—Уилка [2] при объеме выборки от 3 до 5. Сходимость статистик других критериев проверки нормальности к предельному распределению еще медленнее, чем для критерия Шапиро—Уилка.

Однако уже при $n = 2$ можно (с нулевой вероятностью ошибки) отвергнуть гипотезу о нормальности, если выборочные значения совпадают. Хотелось бы

Kovalevskii, A.P., Normality tests for very small sample sizes.

Работа поддержана РФФИ (грант 17-01-00683).

Поступила 10 сентября 2017 г., опубликована 27 ноября 2017 г.

для $n > 2$ построить критерий, наследующий это полезное свойство, но позволяющий также (с достаточно малой вероятностью ошибки) отвергать гипотезу о нормальности в некоторых случаях, когда все выборочные значения различны.

Обозначим

$$R_n = \max_{1 \leq i,j \leq n} |X_i - X_j|$$

— наибольшее расстояние между элементами (размах) выборки;

$$L_n = \min_{1 \leq i < j \leq n} |X_i - X_j|$$

— наименьшее расстояние между элементами выборки;

$$d_n = R_n / L_n$$

— их отношение. Будем полагать $d_n = +\infty$ при $L_n = 0$.

Согласно основной гипотезе, элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют нормальное распределение. Критерий отвергает основную гипотезу, если $d_n \geq C$, где $0 < C < \infty$.

Величину L_n можно назвать минимальным спейсингом выборки. Наиболее близким аналогом предложенного здесь критерия может служить критерий Шапиро—Чена [3], статистика которого основана на сумме спейсингов, нормированных выборочным среднеквадратическим отклонением, с весовыми коэффициентами, выбираемыми специальным образом. Идеи использования минимального спейсинга для построения критерия проверки нормальности в литературе найти не удалось.

В параграфе 2 доказано, что в широких предположениях при $n = 3$ статистика, инвариантная относительно перестановки аргументов, преобразований сдвига и масштаба, является функцией от d_3. Вычислена функция распределения статистики d_3. Для этого разности между компонентами выборки выражены через компоненты стандартного двумерного нормального распределения, и искомая формула получена сведением к равномерному распределению на окружности. Случай $n = 4$ рассмотрен в параграфе 3. Распределение статистики d_4 вычислено с использованием формулы Люилье (l'Huillier) площади сферического треугольника. В параграфе 4 получены верхняя и нижняя оценки для хвоста распределения d_n при $n > 3$. Для этого доказана лемма о рапределении частного модулей компонент двумерного центрированного нормального вектора. Показано, что границы для хвоста распределения убывают по закону обратной пропорциональности.

Результаты моделирования, подсчет квантили уровня 0,95 для $n = 5$ и эмпирической мощности критерия на альтернативах приведены в параграфе 5. Кроме того, проведено сравнение с критерием Шапиро—Уилка. Квантили уровня 0,05 для этого критерия исправлены по результатам моделирования. Анализ результатов показывает, что предложенный критерий мощнее критерия Шапиро—Уилка при $n = 4,\ 5$ и резко асимметричных альтернативах. При $n = 3$ мощности критериев совпадают (это следует также из результатов параграфа 2), но для предложенного критерия существует простая явная формула для квантилей.

2. Выборка объема 3

Если выполнена основная гипотеза, то $d_2 = 1$ п.н. Рассмотрим статистику d_3.

$$d_3 = \frac{\max\{|X_1 - X_2|, |X_1 - X_3|, |X_2 - X_3|\}}{\min\{|X_1 - X_2|, |X_1 - X_3|, |X_2 - X_3|\}}.$$

В случае выборки объема 3 любая статистика, не определенная при $R_3 = 0$, симметричная относительно элементов выборки и инвариантная относительно преобразований сдвига и масштаба, является функцией от d_3. Докажем это.

Теорема 1. *Если на каждом элементарном исходе $Z(X_1, X_2, X_3)$ — функция, не определенная при $R_3 = 0$, инвариантная относительно перестановки аргументов, и для любых $b \in \mathbf{R}$, $c > 0$ выполнено $Z(b + cX_1, b + cX_2, b + cX_3) = Z(X_1, X_2, X_3)$, то Z является функцией переменной d_3, где $d_3 \in [2,\ \infty]$.*

Доказательство. На данном элементарном исходе переставим аргументы таким образом, чтобы $X_1 \leq\ X_2 \leq\ X_3$, $X_2 - X_1 \leq X_3 - X_2$. Тогда $L_3 = X_2 - X_1$, $R_3 = X_3 - X_1$,

$$Z(X_1, X_2, X_3) = Z(X_1/R_3, X_2/R_3, X_3/R_3) = Z(0, (X_2 - X_1)/R_3, (X_3 - X_1)/R_3)$$
$$= Z(0, L_3/R_3, 1) = Z(0, 1/d_3, 1).$$

Случай $L_3 = 0$ соответствует значению $d_3 = +\infty$ согласно принятому соглашению. □

Отметим, что статистика

$$\frac{{R_3}^2}{\sum_{i=1}^{3}(X_i - \overline{X})^2},$$

возникающая при $n = 3$ в критерии Шапиро—Уилка, удовлетворяет условиям теоремы, и в силу равенства

$$\sum_{i=1}^{3}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{9}\big(((X_1 - X_2) + (X_1 - X_3))^2$$
$$+ ((X_2 - X_1) + (X_2 - X_3))^2 + ((X_3 - X_1) + (X_3 - X_2))^2\big)$$
$$= \frac{1}{9}\left((L_3 + R_3)^2 + (2L_3 - R_3)^2 + (2R_3 - L_3)^2\right) = \frac{2(3{L_3}^2 + 3{R_3}^2 + R_3 L_3)}{9},$$

представима в виде

$$\frac{9{R_3}^2}{2(3{L_3}^2 + 3{R_3}^2 + R_3 L_3)} = \frac{9}{2(3d_3^{-2} + 3 + d_3^{-1})}.$$

Распределение этой статистики может быть вычислено в явном виде с помощью распределения статистики d_3.

Вычислим функцию распределения статистики d_3.

$$F_{d_3}(x) = \mathbf{P}\left\{\forall i \neq j \quad \frac{\max_{1 \leq k,l \leq n}|X_k - X_l|}{|X_i - X_j|} < x\right\}$$
$$= 3!\mathbf{P}\left\{X_1 < X_2 < X_3,\ \frac{X_3 - X_1}{X_2 - X_1} < x,\ \frac{X_3 - X_1}{X_3 - X_2} < x\right\}$$
$$= 6\mathbf{P}\{X_2 - X_1 > 0,\ X_3 - X_2 > 0,\ x(X_2 - X_1) > X_3 - X_1,\ x(X_3 - X_2) > X_3 - X_1\}.$$

Обозначим $Y_{ij} = X_i - X_j$. Тогда $\mathbf{E}Y_{ij} = 0$, $\mathbf{D}Y_{ij} = 2\sigma^2$ при $i \neq j$, где σ^2 — дисперсия элементов выборки.

$$F_{d_3}(x) = 6\mathbf{P}\{Y_{21} > 0,\ Y_{32} > 0,\ xY_{21} > Y_{31},\ xY_{32} > Y_{31}\} =$$
$$= 1 - 2 \cdot 6\mathbf{P}\{Y_{21} > 0,\ xY_{21} < Y_{31}\}.$$

Так как коэффициенты корреляции равны

$$\mathbf{corr}(Y_{21};\ Y_{32}) = -\mathbf{corr}(Y_{21};\ Y_{31}) = -\mathbf{corr}(Y_{32};\ Y_{31}) = -\frac{1}{2},$$

то компоненты нормального случайного вектора $(Y_{21},\ Y_{32},\ Y_{31})$ можно задать через компоненты стандартного нормального случайного вектора $(\eta_1,\ \eta_2)$ следующим образом:

$$Y_{21} = \sigma\sqrt{2}\eta_1;\ Y_{32} = \sigma\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta_2\right);\ Y_{31} = \sigma\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta_2\right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{d_3 < x\} = 1 - 12\mathbf{P}\{\eta_1 > 0;\ x\eta_1 < \frac{1}{2}\eta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta_2\}$$
$$= 1 - 12\mathbf{P}\{\eta_1 > 0;\ \eta_2 > \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\eta_1\}$$
$$= 1 - \frac{12}{2\pi}\operatorname{arcctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Итак, доказана

Теорема 2. *Для всех $x \geq 2$ выполнено*

$$F_{d_3}(x) = 1 - \frac{6}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

В качестве следствия отметим, что $\mathbf{P}\{d_3 \geq x\} \sim \frac{3\sqrt{3}}{\pi x}$ при $x \to \infty$.

3. Выборка объема 4

Рассмотрим случай $n = 4$. Выполнено $d_4 > 3$ п.н. Для $x > 3$

$$\mathbf{P}\{d_4 < x\} = 4! \cdot \mathbf{P}\{X_4 - X_1 > 0,\ x(X_2 - X_1) > X_4 - X_1,$$
$$x(X_3 - X_2) > X_4 - X_1,\ x(X_4 - X_3) > X_4 - X_1\}$$
$$= \mathbf{P}\{d_4 < x\} = 4! \cdot \mathbf{P}\{X_4 - X_1 > 0,\ x(X_2 - X_1) > X_4 - X_1,$$
$$x(X_3 - X_2) > X_4 - X_1,\ x(X_4 - X_3) > X_4 - X_1\}$$
$$= 24\mathbf{P}\{Y_{21} + Y_{32} + Y_{43} > 0,\ xY_{21} > Y_{21} + Y_{32} + Y_{43},$$
$$xY_{32} > Y_{21} + Y_{32} + Y_{43},\ xY_{43} > Y_{21} + Y_{32} + Y_{43}\}.$$

Просуммировав последние 3 неравенства, получаем, что $(x-3)(Y_{21} + Y_{32} + Y_{43}) > 0$, откуда следует первое неравенство, так как $x > 3$.

Обозначим $Z_{ij} = Y_{ij}/(\sigma\sqrt{2})$. Тогда

$$\mathbf{P}\{d_4 < x\} = 24\mathbf{P}\{xZ_{21} > Z_{21} + Z_{32} + Z_{43},$$
$$xZ_{32} > Z_{21} + Z_{32} + Z_{43},\ xZ_{43} > Z_{21} + Z_{32} + Z_{43}\}. \tag{1}$$

Найдем вероятность выполнения системы неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} xZ_{21} > Z_{21} + Z_{32} + Z_{43}; \\ xZ_{32} > Z_{21} + Z_{32} + Z_{43}; \\ xZ_{43} > Z_{21} + Z_{32} + Z_{43}. \end{array}\right. \tag{2}$$

Корреляционная матрица вектора $(Z_{21};\ Z_{32};\ Z_{43})$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Удобно представить компоненты вектора следующим симметричным образом:

$$Z_{32} = \eta_2;$$

$$Z_{21} = -\frac{1}{2}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\eta_1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\eta_3;$$

$$Z_{43} = -\frac{1}{2}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\eta_3 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\eta_1.$$

Здесь вектор $(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$ имеет стандартное нормальное распределение.

Так как $Z_{21} + Z_{32} + Z_{43} = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3$, то система неравенств (2) записывается в виде

$$\left\{\begin{array}{l} x\left(-\frac{1}{2}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\eta_1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\eta_3\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3; \\ x\eta_2 > \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3; \\ x\left(-\frac{1}{2}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\eta_3 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\eta_1\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3. \end{array}\right. \tag{3}$$

В силу симметрии многомерного нормального распределения, вероятность выполнения системы неравенств (3) равна отношению площади соответствующего сферического треугольника к площади единичной сферы. Грани сферического треугольника образованы плоскостями

$$\left\{\begin{array}{l} x\left(-\frac{1}{2}t_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}t_1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}t_3\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}t_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t_3; \\ xt_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}t_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t_3; \\ x\left(-\frac{1}{2}t_2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}t_3 - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}t_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}t_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t_3. \end{array}\right.$$

Нормальные векторы этих плоскостей:

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{(\sqrt{2}+1)x - 2}{2\sqrt{2}},\ -\frac{x}{2},\ -\frac{(\sqrt{2}-1)x + 2}{2\sqrt{2}}\right);$$

$$\mathbf{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, x,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\mathbf{u}_3 = \left(-\frac{(\sqrt{2}-1)x + 2}{2\sqrt{2}},\ -\frac{x}{2},\ \frac{(\sqrt{2}+1)x - 2}{2\sqrt{2}}\right).$$

Найдем направляющие векторы прямых, по которым пересекаются плоскости, с помощью векторного произведения:

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \left(-(\sqrt{2}-1)x^2 - 3x,\ -2x,\ 3x - (\sqrt{2}+1)x^2\right);$$

$$\mathbf{v}_{13} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3 = \left((\sqrt{2}+1)x^2 - 3x,\ 2x,\ (\sqrt{2}-1)x^2 + 3x\right);$$

$$\mathbf{v}_{23} = \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \left(-4x^2,\ -4\sqrt{2}x(x-2),\ -4x^2\right).$$

Используем формулу Люилье ([4], §36) для площади ε сферического треугольника со сторонами $a,\ b,\ c$:

$$\varepsilon = 4\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{tg}\frac{s}{2}\mathrm{tg}\frac{s-a}{2}\mathrm{tg}\frac{s-b}{2}\mathrm{tg}\frac{s-c}{2}},$$

где $s = (a+b+c)/2$.

Сторонами сферического треугольника называются углы между прямыми, образующими трехгранный угол. Поэтому

$$a = c = \arccos\frac{|\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{13}|}{|\mathbf{v}_{12}||\mathbf{v}_{13}|} = \arccos\frac{x^2+6x-7}{3x^2-6x+11};$$

$$b = \arccos\frac{|\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{23}|}{|\mathbf{v}_{12}||\mathbf{v}_{23}|} = \arccos\frac{x^2+x-2}{\sqrt{3x^2-6x+11}\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Согласно формуле (1), умножим результат вычисления по формуле Люилье на 24 и разделим на площадь единичной сферы 4π. Получаем следующую теорему.

Теорема 3. *При* $x \geq 3$

$$F_{d_4}(x) = \frac{24}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{a}{4}\sqrt{\mathrm{tg}\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{4}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{4}\right)}\ \right),$$

где

$$a = \arccos\frac{x^2+6x-7}{3x^2-6x+11},$$

$$b = \arccos\frac{x^2+x-2}{\sqrt{3x^2-6x+11}\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Отметим, что осуществить вычисление распределения d_5 не удается ввиду отсутствия общей формулы, выражающей объем тетраэдра в пространстве постоянной кривизны через длины его ребер [5]. Однако тетраэдр, возникающий в этой задаче, обладает рядом симметрий, и есть надежда вычислить его объем методами работ [6], [7].

4. Сравнение с критерием Шапиро—Уилка

Будем моделировать выборки заданного объема из нормального распределения, основываясь на известном алгоритме

$$X_i = \sum_{j=1}^{12} U_{12(i-1)+j} - 6,$$

где $U_1,\ U_2,\ \ldots$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на $[0,\ 1]$. Для их моделирования использовался встроенный датчик случайных чисел Excel. Квантили уровня 0,95 для d_3 и d_4 отыскиваются из теорем 2 и 3. Квантиль уровня 0,95 для d_5 отыскивается как выборочная квантиль по результатам моделирования $2 \cdot 10^6$ выборок и приближенно равняется 214.

Рассмотрим мощность критерия на альтернативах. Обозначим LN_σ логнормальное распределение с параметрами 0, σ^2; C — распределение Коши.

Для логнормального распределения моделирование осуществляется по формуле

$$X_i = \exp\left(\sigma\left(\sum_{j=1}^{12} U_{12(i-1)+j} - 6\right)\right),$$

а для распределения Коши

$$X_i = \tan(\pi(U_i - 1/2)).$$

В таблице 1 приведены эмпирические значения мощности R/L-критерия на альтернативах, полученные по результатам моделирования 10^6 выборок. Здесь n — объем выборки, $t_{0,95}$ — квантиль уровня 0,95 (для $n = 5$ подсчитана эмпирически).

Таблица 1 Эмпирическая мощность R/L—критерия.

n	$t_{0,95}$	LN_1	LN_2	LN_5	LN_{10}	LN_{20}	C
3	33,57	0,08	0,20	0,53	0,73	0,86	0,10
4	103,60	0,09	0,25	0,72	0,91	0,98	0,12
5	214	0,09	0,29	0,83	0,97	0,995	0,13

Мощность критерия при логнормальной альтернативе существенно зависит от параметра σ. Наилучшие результаты получаются при $\sigma \geq 10$.

Проведем сравнение с критерием Шапиро—Уилка [2]. Отметим, что в статье [2] значения квантилей уровня 0,05 вычислены весьма приближенно (табл. 6, с. 605). Поэтому пришлось пересчитать квантили, основываясь на моделировании 10^6 выборок заданного объема. Квантиль исправлялась таким образом, чтобы эмпирический критический уровень был наиболее близок к 0,05. Результаты вычислений приведены в таблице 2. Через $X_{(i)}$ обозначены порядковые статистики, через $\tilde{q}_{0,05}$ — квантиль уровня 0,05 в табл. 6 из [2], через $\tilde{\varepsilon}$ — эмпирический уровень, достигнутый для этой квантили по результатам моделирования, через $q_{0,05}$ — квантиль уровня 0,05, исправленная по результатам моделирования. Отметим другой возможный путь исправления квантилей — с применением результатов статьи [8].

Таблица 2 Эмпирические квантили для критерия Шапиро—Уилка.

n	Статистика b	$\tilde{q}_{0,05}$	$\tilde{\varepsilon}$	$q_{0,05}$
3	$0,7071(X_{(3)} - X_{(1)})$	0,767	0,038	0,772
4	$0,6872(X_{(4)} - X_{(1)}) + 0,1677(X_{(3)} - X_{(2)})$	0,748	0,038	0,761
5	$0,6646(X_{(5)} - X_{(1)}) + 0,2413(X_{(4)} - X_{(2)})$	0,762	0,037	0,777

Используем исправленные значения для подсчета эмпирической мощности критерия Шапиро—Уилка на альтернативах. Напомним, что критерий отвергает гипотезу о нормальности на уровне 0,05, если значение $W = b^2 / \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ окажется меньше, чем $q_{0,05}$. Результаты приведены в таблице 3.

Таблица 3 Эмпирическая мощность критерия Шапиро—Уилка.

n	$q_{0,05}$	LN_1	LN_2	LN_5	LN_{10}	LN_{20}	C
3	0,772	0,08	0,20	0,53	0,73	0,86	0,10
4	0,761	0,17	0,38	0,70	0,84	0,92	0,21
5	0,777	0,24	0,52	0,85	0,95	0,988	0,29

Сравнение табл. 1 и 3 приводит к выводу о том, что R/L—критерий оказывается полезным при $n = 4,\ 5$ в случае существенной асимметрии распределения при альтернативной гипотезе (в частности, для логнормального распределения при $\sigma \geq 10$). При $n = 3$ мощности критериев совпадают. Это совпадение подтверждает результаты теоремы 1 и следующего за ним замечания.

Автор благодарит Н. С. Аркашова, А. А. Боровкова, А. В. Логачева, М. Г. Чебунина за внимание к работе. Автор благодарит анонимного рецензента за тщательный анализ работы и полезные замечания.

References

[1] R. D'Agostino, E.S. Pearson, *Tests for departure from normality. Empirical results for the distributions of* b^2 *and* $\sqrt{b^1}$, Biometrika, **60**:3 (1973), 613–622. MR0339372

[2] S.S. Shapiro, M.B. Wilk, *An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples)* Biometrika, **52**:3/4 (1965), 591–611. MR0205384

[3] L. Chen, S.S. Shapiro, *An Alternative Test for Normality Based on Normalized Spacings*, J. Statistical Computation and Simulation, **53**:3–4 (1995), 269–288. Zbl 0873.62045

[4] P. Sperry, *Short course in spherical trigonometry*, Richmond: Johnson Publishing Company, 1928.

[5] A.L. Mackay, *The tetrahedron in curved space — a problem*, Hyperspace, **4**:1, 19–22.

[6] D. Derevnin, A. Mednykh, M. Pashkevich, *The volume formula of a symmetric tetrahedrone in hyperbolic and spherical spaces*, Siberian Mathematical Journal, **45**:5 (2004), 840–848. MR2108500

[7] A. Kolpakov, A. Mednykh, M. Pashkevich, *A volume formula for a* Z_2*-symmetric spherical tetrahedra*, Siberian Mathematical Journal, **52**:3 (2011), 456–470. MR2858644

[8] P. Royston, *Approximating the Shapiro-Wilk W-test for non-normality*, Statistics and Computing, **2**:3 (1992), 117–119.

Artyom Pavlovich Kovalevskii
Novosibirsk State Technical University,
pr. Marksa, 20,
630073, Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: pandorra@ngs.ru