S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1220–1237 (2017) УДК 512.53, 512.58
DOI 10.17377/semi.2017.14.104 MSC 18D35

КАТЕГОРИИ ПРОСТРАНСТВ ЧУ НАД КАТЕГОРИЕЙ ПОЛИГОНОВ

А.А. СТЕПАНОВА[1], Е.Е.СКУРИХИН, А.Г. СУХОНОС

Abstract. We consider two categories of Chu spaces over the category of $S - Act$. For the case when S is a commutative monoid, the questions of completeness, conjugate objects and the conditions of reflexivity of objects are studied in the categories under consideration.
Keywords: Chu spaces, Chu construction, S-Act, monoidal category, limit, colimit, functor.

Введение

В работах Po Hsiang Chu (1978, 1979) описана конструкция [1, 2], позволяющая по заданной симметрической моноидальной замкнутой категории и фиксированному объекту в ней построить новую категорию так, что если исходная категория была $*$-автономной, то в полученной категории выбранный заранее объект становился дуализирующим. В частности, строится категория $Chu(\mathcal{V})$ Чу-объектов, или пространств Чу, где $\mathcal{V}$ – категория [3]. Делается это так. Пусть $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ бифунктор, т.е. произведение на категории $\mathcal{V}$, D - фиксированный объект категории $\mathcal{V}$. Пространством Чу называется любой морфизм $r : A \otimes X \longrightarrow D$ категории $\mathcal{V}$, где $A, X \in Ob(\mathcal{V})$. Для двух пространств Чу $r_1 : A_1 \otimes X_1 \to D$ и $r_2 : A_2 \otimes X_2 \to D$ морфизмом $r_1 \to r_2$ называется любая пара $(f : A_1 \longrightarrow A_2, g : X_2 \longrightarrow X_1)$ морфизмов категории $\mathcal{V}$ такая, что $r_1 \circ (1_{A_1} \otimes g) = r_2 \circ (f \otimes 1_{X_2})$.

Категории пространств Чу активно изучались и изучаются в связи с возможностью интерпретировать в терминах пространств Чу различные объекты

---

[1]Работа поддержана РФФИ (грант 17-01-00531)

Stepanova, A.A., Skurihin, E.E., Sukhonos, A.G., Category of Chu spaces over S-Act category.

Поступила 4 августа 2017 г., опубликована 28 ноября 2017 г.

топологии, алгебры, computer science, теории игр [8]. Общие свойства категории пространств Чу, а также свойства этой категории для случая, когда $\mathcal{V}$ является какой либо фиксированной категорией, изучались в работах [3, 8].

В предлагаемой работе рассматриваются две категории пространств Чу для случая, когда $\mathcal{V}$ – категория $S-Act$ полигонов над S, где S – коммутативный моноид. Одна из них $Chu(S-Act, D)$ описана выше. Во второй категории $Chu(S-Act)$ объект D в выражении $r : A\otimes X \longrightarrow D$ не фиксируется и морфизмом пространств Чу $(r_1 : A_1 \otimes X_1 \longrightarrow D_1) \to (r_2 : A_2 \otimes X_2 \longrightarrow D_2)$ называется любая тройка $(f : A_1 \longrightarrow A_2, g : X_2 \longrightarrow X_1, h : D_1 \to D_2)$ морфизмов категории $\mathcal{V}$ такая, что $h\circ r_1\circ(1_{A_1}\otimes g) = r_2\circ(f\otimes 1_{X_2})$. Одной из причин рассмотрения второй категории явилась возможность естественно определить сопряжённое пространство Чу и изучить условия рефлексивности. Сама эта возможность обеспечивается тем фактом, что категория S-полигонов является замкнутой симметрической моноидальной категорией. Последнее обстоятельство послужило поводом к изучению общих свойств рассматриваемых в работе категорий, в частности, вопросов полноты. Как следует из результатов предлагаемой работы, свойства двух рассматриваемых категорий пространств Чу в некотором смысле дополняют друг друга.

В первом параграфе приводятся основные определения, относящиеся к пространствам Чу. Вводится в рассмотрение категория $Chu^{\perp}(\mathcal{V})$ и полный строгий контравариантный функтор между категориями $Chu(\mathcal{V})$ и $Chu^{\perp}(\mathcal{V})$, устанавливающий изоморфизм между категориями $Chu^{\perp}(\mathcal{V})$ и $(Chu(\mathcal{V}))^{op}$, а также между категориями $Chu(\mathcal{V}, D)$ и $(Chu(\mathcal{V}, D))^{op}$.

Во втором параграфе приводятся необходимые для дальнейшего сведения о полигонах и свойствах категории $S-Act$.

В третьем параграфе изучается категория $Chu(S-Act)$. Описываются эпиморфизмы и мономорфизмы. Рассматриваются вопросы полноты. В частности, доказывается существование копроизведений, коуравнителей и расслоенных сумм. Приводятся примеры, показывающие, что не всегда существуют уравнители, произведения и расслоенные произведения. Как следствие, получаем наличие дуальных свойств у категории $Chu^{\perp}(S-Act)$. Определяются сопряжённые объекты в категории $Chu(S-Act)$ и изучаются вопросы, связанные с рефлексивностью, т.е. со свойствами естественного морфизма объекта во второй сопряжённый.

В последнем параграфе рассматривается категория $Chu(S-Act, D)$. Описываются эпиморфизмы и мономорфизмы. Доказывается существование произведений, копроизведений, уравнителей, коуравнителей, расслоенных сумм и расслоенных произведений.

1. Моноидальная категория и конструкция пространства Чу

Напомним ряд определений из теории категорий, которые можно найти в [3].

Моноидальная категория – это категория $\mathcal{V}$ снабженная:

объектом I, называемым единицей или тождественным объектом;

функтором $\otimes : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, называемым произведением;

тремя естественными изоморфизмами $\alpha_{A,B,C} : (A\otimes B)\otimes C \longrightarrow A\otimes(B\otimes C)$, $r_{A,I} : A\otimes I \longrightarrow A$ и $l_{I,A} : I\otimes A \longrightarrow A$ для любых объектов A, B, C категории $\mathcal{V}$, удовлетворяющими следующим условиям:

для любых объектов A, B, C, D категории $\mathcal{V}$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B,C} \otimes 1_D"] \arrow[d, "\alpha_{A \otimes B, C, D}"'] & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B \otimes C,D}"] & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "1_A \otimes \alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C \otimes D}"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}$$

для любых объектов A, B, C категории $\mathcal{V}$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "r_{A,I} \otimes 1_B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "1_A \otimes l_{I,B}"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}.$$

Симметричная моноидальная категория – это моноидальная категория $\mathcal{V}$, снабженная естественными изоморфизмами $m_{A,B} : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$ для любых объектов A, B категории $\mathcal{V}$ такими, что для любых объектов A, B категории $\mathcal{V}$ треугольная диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[rr, "m_{A,B}"] \arrow[dr, "1_A \otimes 1_B"'] & & B \otimes A \arrow[dl, "m_{B,A}"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}.$$

и для любых объектов A, B, C категории $\mathcal{V}$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\alpha_{A,B,C}"] \arrow[d, "1_A \otimes m_{B,C}"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[d, "m_{A \otimes B, C}"] \\
A \otimes (C \otimes B) \arrow[d, "\alpha_{A,C,B}"'] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "\alpha_{C,A,B}"] \\
(A \otimes C) \otimes B \arrow[r, "m_{A,C} \otimes B"'] & (C \otimes A) \otimes B
\end{tikzcd}.$$

Для любой моноидальной категории $\mathcal{V}$ существует функтор $A \otimes - : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ такой, что с объектом B ассоциируется $A \otimes B$ и с морфизмом $f : B \longrightarrow C$ ассоциируется $A \otimes f : A \otimes B \longrightarrow A \otimes C$.

Моноидальная категория $\mathcal{V}$ называется замкнутой, если для любого объекта A из $\mathcal{V}$ функтор $A \otimes -$ имеет правый сопряженный $A \multimap$. В дальнейшем $A \multimap (C)$ будем обозначать $A \multimap C$. Таким образом, имеет место естественный изоморфизм

$$Hom(A \otimes B, C) \cong Hom(B, A \multimap C).$$

Для симметричного случая имеет место естественный изоморфизм

$$Hom(A \otimes B, C) \cong Hom(A, B \multimap C).$$

Пусть $\mathcal{V}$ – моноидальная категория с произведением $\otimes$.

Определим категорию $Chu(\mathcal{V})$ пространств Чу. Объектами категории являются морфизмы $r : A \otimes X \longrightarrow D$ категории $\mathcal{V}$, где $A, X, D \in Ob(\mathcal{V})$. В дальнейшем данные морфизмы будем называть пространства Чу. Для двух объектов $r_1 : A_1 \otimes X_1 \to D_1$ и $r_2 : A_2 \otimes X_2 \to D_2$ морфизмом $(f, g, h) : (A_1 \otimes X_1 \to D_1) \longrightarrow (A_2 \otimes X_2 \to D_2)$ категории $Chu(\mathcal{V})$ является тройка морфизмов $f : A_1 \longrightarrow A_2$, $g : X_2 \longrightarrow X_1$, $h : D_1 \longrightarrow D_2$ категории $\mathcal{V}$ такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_1 \otimes X_2 \arrow[rr, "f\otimes 1_{X_2}"] \arrow[d, "1_{A_1}\otimes g"'] & & A_2 \otimes X_2 \arrow[d, "r_2"] \\
A_1 \otimes X_1 \arrow[r, "r_1"'] & D_1 \arrow[r, "h"'] & D_2
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $h \circ r_1 \circ (1_{A_1} \otimes g) = r_2 \circ (f \otimes 1_{X_2})$. В дальнейшем морфизмы двух пространств Чу будем называть преобразованиями пространств Чу.

Определим также категорию $Chu^{\perp}(\mathcal{V})$. Объектами категории являются пространства Чу, т.е. морфизмы $r : X \otimes A \longrightarrow D$ категории $\mathcal{V}$, где $X, A, D \in Ob(\mathcal{V})$. Для двух объектов $r_1 : X_1 \otimes A_1 \to D_1$ и $r_2 : X_2 \otimes A_2 \to D_2$ морфизмом $(g, f, h) : r_1 \longrightarrow r_2$ категории $Chu^{\perp}(\mathcal{V})$ является тройка морфизмов $g : X_1 \longrightarrow X_2$, $f : A_2 \longrightarrow A_1$, $h : D_2 \longrightarrow D_1$ категории $\mathcal{V}$ такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X_1 \otimes A_2 \arrow[r, "g\otimes 1_{A_2}"] \arrow[dd, "1_{X_1}\otimes f"'] & X_2 \otimes A_2 \arrow[d, "r_2"] \\
 & D_2 \arrow[d, "h"] \\
X_1 \otimes A_1 \arrow[r, "r_1"'] & D_1
\end{tikzcd}$$

коммутативна. В дальнейшем морфизмы двух пространств Чу категории $Chu^{\perp}(\mathcal{V})$ будем также называть преобразованиями пространств Чу.

Пусть задан функторный изоморфизм $m_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$. Убедимся, что в этом случаи категория $Chu^{\perp}(\mathcal{V})$ изоморфна категории $(Chu(\mathcal{V}))^{op}$. Для этого докажем, что имеется полный строгий контравариантный функтор $\perp : Chu(\mathcal{V}) \to Chu^{\perp}(\mathcal{V})$, биективный на объектах. Определим для каждого морфизма $r : A \otimes X \to D$ морфизм $r^{\perp} : X \otimes A \to D$: $r^{\perp} = r \circ m_{A,X}$, для тройки морфизмов $f : A_1 \to A_2$, $g : X_2 \to X_1$ $h : D_1 \to D_2$ преобразование $(f, g, h)^{\perp} = (g, f, h)$ категории $Chu^{\perp}(\mathcal{V})$.

Лемма 1. *Соответствие $r \mapsto r^{\perp}$, $(f, g, h)^{\perp} = (g, f, h)$ является полным строгим контравариантным функтором $\perp : Chu(\mathcal{V}) \to Chu^{\perp}(\mathcal{V})$, биективным на классе объектов, и, следовательно, устанавливает изоморфизм категорий $Chu^{\perp}(\mathcal{V})$ и $(Chu(\mathcal{V}))^{op}$.*

Доказательство. Пусть $r : A \otimes X \to D_1$, $t : B \otimes Y \to D_2$ пространства Чу, $(f, g, h) : r \to t$ – морфизм категории $Chu(\mathcal{V})$. Так как $h \circ r^{\perp} \circ (g \otimes 1_A) =$

$h \circ r \circ m_{X,A} \circ (g \otimes 1_A) = h \circ r \circ (1_A \otimes g) \circ m_{Y,A} = t \circ (f \otimes 1_Y) \circ m_{Y,A} = t \circ m_{Y,B} \circ (1_Y \otimes f) = t^{\perp} \circ (1_Y \otimes f)$, то $(g, f, h) : t^{\perp} \to r^{\perp}$ – морфизм категории $Chu^{\perp}(\mathcal{V})$.

Ясно, что $F(1_A, 1_X, 1_D) = 1_{F(A,X,D)}$. Если $(f_1, g_1, h_1) : r_1 \to r_2, (f_2, g_2, h_2) : r_2 \to r_3$ – морфизмы категории $Chu(\mathcal{V})$, то $F((f_2, g_2, h_2) \circ (f_1, g_1, h_1)) = F(f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2, h_2 \circ h_1) = (g_1 \circ g_2, f_2 \circ f_1, h_2 \circ h_1) = (g_1, f_1, h_1) \circ (g_2, f_2, h_2) = F(f_1, g_1, h_1) \circ F(f_2, g_2, h_2)$. Таким образом, F – контравариантный функтор.

Аналогичные выкладки показывают, что, полагая $G(r) = t \circ m_{A,X}^{-1}$, $G(f, g, h) = (f, g, h)$, где $r : A \otimes X \to D$ – пространство Чу, (f, g, h) – морфизм категории $Chu^{\perp}(\mathcal{V})$, получаем контравариантный функтор $G : Chu^{\perp}(\mathcal{V}) \to Chu(\mathcal{V})$. Поскольку $G(F(r)) = (r \circ m_{A,X}) \circ m_{A,X}^{-1} = r$, $F(G(t)) = (t \circ m_{A,X}^{-1}) \circ m_{A,X}) = t$, $(G \circ F)(f, g, h) = G(g, f, h) = (f, g, h)$, $(F \circ G)(g, f, h) = G(f, g, h) = (g, f, h)$, то $G \circ F = 1_{Chu(\mathcal{V})}$ и $F \circ G = 1_{Chu^{\perp}(\mathcal{V})}$, так что функторы F и G биективны как на объектах, так и на морфизмах и, значит, являются полными и строгими.

□

Категория, объектами которой являются морфизмы $A \otimes B \longrightarrow D$ (пространства Чу) в фиксированный объект D категории $\mathcal{V}$, морфизмами (преобразованиями Чу) – пары морфизмов $f : A_1 \to A_2$, $g : X_2 \to X_1$ категории $\mathcal{V}$ таких, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_1 \otimes X_2 \arrow[r, "f \otimes 1_{X_2}"] \arrow[d, "1_{A_1} \otimes g"'] & A_2 \otimes X_2 \arrow[d, "r_2"] \\
A_1 \otimes X_1 \arrow[r, "r_1"'] & D_2
\end{tikzcd}$$

коммутативна, обозначается $Chu(\mathcal{V}, D)$ [1].

В случае, когда категория $\mathcal{V}$ - категория множеств, $Chu(\mathcal{V}, D)$ называется категорией пространств Чу над алфавитом D [8, 9]. Коммутативность приведенной выше диаграммы означает в этом случае, что $r_1(a_1, g(x_2)) = r_2(f(a_1), x_2)$ для любых $a_1 \in A_1$, $x_2 \in X_2$.

Замечание 1. При фиксированном D функтор $F : Chu(\mathcal{V}) \to Chu^{\perp}(\mathcal{V})$ из леммы 1 можно рассматривать как функтор $F : Chu(\mathcal{V}, D) \to Chu(\mathcal{V}, D)$. Он является контравариантным функтором и биективен как на объектах так и на морфизмах. Таким образом, он задает изоморфизм $Chu(\mathcal{V}, D)$ и $(Chu(\mathcal{V}, D))^{op}$. Следовательно, категория $Chu(\mathcal{V}, D)$ является автодуальной категорией.

2. Полигоны

Все приведенные в этом параграфе понятия и факты можно найти в [5].

Пусть S – моноид, 1 – единица моноида S. Множество A (возможно пустое) называется левым S-полигоном (или полигоном над S, или просто полигоном), если существует отображение $S \times A \longrightarrow A$, $(s, a) \mapsto sa$, такое, что для любых $a \in A$ и $s, t \in S$

$$1a = a \text{ и } s(ta) = (st)a.$$

Иными словами, полигон – это множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно. Элемент $\theta \in A$ такой, что $s\theta = \theta$ для любого $s \in S$, называется нулем полигона A. Одноэлементный полигон $\Theta = \{\theta\}$ называется нулевым полигоном.

Подмножество B множества A, замкнутое относительно действия S, называется подполигоном полигона A. Ясно, что S, а также любой его левый идеал, можно рассматривать как полигон. Полигон A называется конечно порожденным, если существуют $a_1, \dots, a_n \in A$ такие, что $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Sa_i$; причем, если $n = 1$, то A называется циклическим полигоном. Конгруэнцией полигона A называется отношение эквивалентности θ на A такое, что

$$(a, b) \in \theta \Rightarrow (sa, sb) \in \theta$$

для любых $a, b \in A$, $s \in S$. Класс конгруэнции θ полигона A с представителем a обозначается через a/θ. Конгруэнцией полигона A, порожденной множеством $I \subseteq A^2$, называется наименьшая конгруэнция полигона A, содержащая I. Пусть B – подполигон полигона A. Конгруэнция $\rho_B = \{(b_1, b_2) \mid b_1, b_2 \in B\} \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$ полигона A называется конгруэнцией Риса.

Отображение $f : A \longrightarrow B$ такое, что $f(sa) = sf(a)$ для любых $a \in A$, $s \in S$, называется S-морфизмом (гомоморфизмом или морфизмом) из полигона A в полигон B, причем, если $A = \emptyset$, то $f = \emptyset$. Через $Hom(A, B)$ обозначим множество всех морфизмов из полигона A в полигон B. Тождественное отображение из полигона A в полигон A обозначается через 1_A. Класс всех полигонов над моноидом S с морфизмами образуют категорию $S - Act$.

Морфизм $f : A \to B$ в категории $S - Act$ является мономорфизмом (эпиморфизмом, изоморфизмом) тогда и только тогда, когда f – инъекция (сюръекция, биекция). Заметим, что морфизм $f : A \to B$ является мономорфизмом, если $A = \emptyset$, и является эпиморфизмом, если B – нулевой полигон.

Пустой полигон является инициальным объектом категории $S - Act$, нулевой полигон является терминальным объектом категории $S - Act$.

В категории $S - Act$ произведением полигонов A_i, $i \in I$, является декартовое произведение $\prod\limits_{i \in I} A_i$, действие моноида S на котором определяется покомпонентно; копроизведением полигонов A_i, $i \in I$, является их дизъюнктное объединение $\coprod\limits_{i \in I} A_i$.

Расслоенным произведением пары (g_1, g_2), где $g_i : A_i \to B$ – морфизм полигонов ($i \in \{1, 2\}$) в категории $S - Act$, является полигон $A_1 \underset{B}{\times} A_2 = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 \mid g_1(a_1) = g_2(a_2)\}$ с морфизмами $p_i : A_1 \underset{B}{\times} A_2 \to A_i$ ($i \in \{1, 2\}$), являющимися проекциями на i-ю координату ($i \in \{1, 2\}$). Расслоенной суммой пары (f_1, f_2), где $f_i : B \to A_i$ – морфизм полигонов ($i \in \{1, 2\}$) в категории $S - Act$, является полигон $A_1 \underset{B}{\sqcup} A_2 = (A_1 \sqcup A_2)/\mu(f_1, f_2)$ с морфизмами $q_i : A_i \to A_1 \underset{B}{\sqcup} A_2$ ($i \in \{1, 2\}$), где $\mu(f_1, f_2)$ – конгруэнция полигона $A_1 \sqcup A_2$, порожденная множеством $\{(f_1(b), f_2(b)) \mid b \in B\}$, $q_i = \pi u_i$, $u_i : A_i \to A_1 \sqcup A_2$ – вложение, π – канонический эпиморфизм $A_1 \sqcup A_2$ на $A_1 \underset{B}{\sqcup} A_2$ ($i \in \{1, 2\}$). Заметим, что $A_1 \underset{\Theta}{\times} A_2 = A_1 \times A_2$ и $A_1 \underset{\emptyset}{\sqcup} A_2 = A_1 \sqcup A_2$.

Уравнителем морфизмов $f_1, f_2 : A \to B$ в категории $S - Act$ является полигон $E = \{a \in A \mid f_1(a) = f_2(a)\}$ с естественным вложением $i : E \to A$. Коуравнителем морфизмов $g_1, g_2 : B \to A$ в категории $S - Act$ является полигон $A/\nu(g_1, g_2)$ с каноническим эпиморфизмом $\pi : A \to A/\nu(g_1, g_2)$, где $\nu(g_1, g_2)$ – конгруэнция полигона A, порожденная множеством $\{(g_1(b), g_2(b))\} \mid b \in B\}$.

Для коммутативного моноида S тензорное произведение $A \otimes B$ полигонов A и B определяется как фактор-множество множества $A \times B$ по отношению эквивалентности, порожденной множеством $\{(sa, b), (a, sb) \mid a \in A, b \in B, s \in S\}$. Для $a \in A$ и $b \in B$ класс эквивалентности с представителем (a, b) будем обозначать $a \otimes b$. Тензорное произведение $A \otimes B$ полигонов A и B является полигоном относительно действия моноида S, определенного следующим образом:

$$s(a \otimes b) = sa \otimes b = a \otimes sb,$$

где $a \in A, b \in B, s \in S$.

Пусть A – полигон и $Hom(A, S) \neq \emptyset$. Тогда $Hom(A, S)$ является полигоном относительно действия моноида S, определенного следующим образом: $(sf)(a) = sf(a)$ для любых $f \in Hom(A, S)$, $s \in S$ и $a \in A$. Полигон $Hom(A, S)$ называется двойственным полигону A и обозначается A^* [6]. Полигон $(A^*)^*$ называется дважды двойственным полигону A и обозначается A^{**}, т.е. $A^{**} = Hom(Hom(A, S), S)$. Пусть $f : A \to B$ – морфизм полигонов. Определим морфизм $f^* : B^* \to A^*$ следующим образом:

$$(f^*(h))(a) = h(f(a))$$

для любых $h \in B^*$, $a \in A$. Через f^{**} обозначим морфизм $(f^*)^* : A^{**} \to B^*$. Морфизм $\varphi_A : A \longrightarrow A^{**}$ зададим равенством

$$\varphi_A(a)(f) = f(a)$$

для любых $a \in A$ и $f \in Hom(A, S)$. Таким образом, определено естественное преобразование $\varphi = (\varphi_A)_{A \in S-Act}$ категории $S-Act$ в категорию $Hom(Hom(-, S), S)$. Полигон A называется рефлексивным (с малым кручением, плотным), если φ_A является изоморфизмом (мономорфизмом, эпиморфизмом соответственно). В [6] приведены некоторые необходимые и достаточные условия того, что A – полигон с малым кручением; кроме того, приведены необходимые условия плотности полигона A и существования полигона A^* для полигона A.

3. Категория $Chu(S - Act)$

Мы применяем конструкцию Чу на категории S–полигонов с тензорным произведением, где S – коммутативный моноид, для построения и изучения двух категорий пространств Чу. В следующей теореме сформулированы основные используемые свойства категории $S - Act$.

Теорема 1. *Пусть S – коммутативный моноид. Тогда $S - Act$ – симметричная моноидальная замкнутая категория.*

Доказательство. Отображения $\alpha_{A,B,C}$, $r_{A,I}$, $l_{I,A}$, $m_{A,X}$ задаваемые формулами $\alpha_{A,B,C}((a \otimes b) \otimes c) = a \otimes (b \otimes c)$, $r_{A,I}(a \otimes s) = sa$, $l_{I,A}(s \otimes a) = sa$, $m_{A,X}(a \otimes b) = b \otimes a$, где объект I данной категории совпадает с S, определены корректно, являются естественными изоморфизмами S-полигонов и удовлетворяют диаграммам симметричной моноидальной категории.

Функтор $A \multimap$, сопряженный справа к функтору $A \otimes$, совпадает в данном случаи с функтором $Hom(A, \cdot)$, если на $Hom(A, C)$ задать структуру S-полигона формулой $(sf)(a) = s(f(a))$. Таким образом, $S - Act$ – симметричная моноидальная замкнутая категория. $\square$

Замечание 2. В категории $Chu(S-Act)$ инициальный объект имеет вид

$$r:\emptyset\otimes\Theta\to\emptyset;$$

терминальный объект имеет вид

$$r:\Theta\otimes\emptyset\to\Theta.$$

Теорема 2. *Пусть $r:A\otimes X\to D$ и $t:B\otimes Y\to C$ – объекты категории $Chu(S-Act)$. Преобразование $(f,g,h):r\longrightarrow t$ категории $Chu(S-Act)$ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда $f:A\longrightarrow B$ – эпиморфизм, $g:Y\longrightarrow X$ – мономорфизм и $h:D\longrightarrow C$ – эпиморфизм категории $S-Act$.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $(f,g,h):r\longrightarrow t$ – эпиморфизмом категории $Chu(S-Act)$.

Покажем, что f – эпиморфизм категории $S-Act$. Предположим, что $B_1\neq B$, где $B_1=f(A)$. Через B_0 обозначим фактор-полигон полигона B по конгруэнции Риса ρ_{B_1}. Определим объект $w:(B_0\times B)\otimes Y\to C$ и морфизмы $(f_1,1_Y,1_C)$, $(f_2,1_Y,1_C):t\to w$ категории $Chu(S-Act)$ следующим образом: $w((b_0,b)\otimes y)=t(b\otimes y)$, $f_1(b)=(B_1,b)$, $f_2(b)=(b/\rho_{B_1},b)$ для любых $b\in B$, $b_0\in B_0$, $y\in Y$. Корректность определения морфизмов $(f_1,1_Y,1_C)$, $(f_2,1_Y,1_C)$ следует из равенств:

$$t(b\otimes y)=w(f_1(b)\otimes y)=w(f_2(b)\otimes y),$$

где $b\in B$, $y\in Y$. Если $a\in A$, то $f(a)\in B_1$ и $f_1(f(a))=f_2(f(a))$, т.е. $f_1\circ f=f_2\circ f$. Тогда $(f_1,1_Y,1_C)\circ(f,g,h)=(f_2,1_Y,1_C)\circ(f,g,h)$. Поскольку (f,g,h) – эпиморфизм категории $Chu(S-Act)$, то $f_1=f_2$. Противоречие.

Покажем, что h – эпиморфизм категории $S-Act$. Предположим, что $C_1\neq C$, где $C_1=h(D)$. Через C_0 обозначим фактор-полигон полигона C по конгруэнции Риса ρ_{C_1}. Определим объект $w:\Theta\otimes Y\to C_0$ и морфизмы $(f',1_Y,h_1)$, $(f',1_Y,h_2):t\to w$ категории $Chu(S-Act)$ следующим образом: $w(\theta\otimes y)=C_1$, $f'(b)=\theta$, $h_1(c)=C_1$, $h_2(c)=c/\rho_{C_1}$, где $b\in B$, $y\in Y$, $c\in C$. Корректность определения морфизма $(f',1_Y,h_1)$ следует из равенств

$$h_1t(b\otimes y)=w(f'(b)\otimes y)=C_1,$$

где $b\in B$, $y\in Y$. Покажем корректность определения морфизма $(f',1_Y,h_2)$. Пусть $b\in B$, $y\in Y$. Поскольку f – эпиморфизм полигонов, то $b=f(a)$ для некоторого $a\in A$. Тогда $t(b\otimes y)=t(f(a)\otimes y)=h(a\otimes g(y))\in C_1$, т.е.

$$h_2t(b\otimes y)=w(f'(b)\otimes y)=C_1.$$

Так как $h_1\circ h=h_2\circ h$, то $(f',1_Y,h_1)\circ(f,g,h)=(f',1_Y,h_2)\circ(f,g,h)$. Поскольку (f,g,h) – эпиморфизм категории $Chu(S-Act)$, то $h_1=h_2$. Противоречие.

Покажем, что g – мономорфизм категории $S-Act$. Предположим, что существуют различные $y_1,y_2\in Y$ такие, что $g(y_1)=g(y_2)$. Пусть $b\in B$. Покажем, что $t(b\otimes y_1)=t(b\otimes y_2)$. Так как f – эпиморфизм, то существует $a\in A$ такой, что $f(a)=b$. Тогда

$$t(b\otimes y_1)=t(f(a)\otimes y_1)=hr(a\otimes g(y_1))=hr(a\otimes g(y_2))=t(f(a)\otimes y_2)=t(b\otimes y_2).$$

Определим объект $w:B\otimes S\to C$ и морфизмы $(1_B,g_1,1_C)$, $(1_B,g_2,1_C):t\to w$ категории $Chu(S-Act)$ следующим образом: $w(b\otimes s)=st(b\otimes y_1)$, $g_1(s)=sy_1$,

$g_2(s) = sy_2$ для любых $b \in B$; $s \in S$. Корректность определения морфизмов $(1_B, g_1, 1_C)$, $(1_B, g_2, 1_C)$ следует из равенств:

$$t(b \otimes g_i(s)) = t(b \otimes sy_i) = st(b \otimes y_i) = w(b \otimes s),$$

где $b \in B$, $s \in S$, $i \in \{1, 2\}$. Так как

$$(g \circ g_1)(s) = g(g_1(s)) = sg(y_1) = sg(y_2) = g(g_2(s)) = (g \circ g_2)(s)$$

для любого $s \in S$, то $(f, g, h) \circ (1_B, g_1, 1_C) = (f, g, h) \circ (1_B, g_2, 1_C)$. Поскольку (f, g, h) – эпиморфизм категории $Chu(S - Act)$, то $g_1 = g_2$. Противоречие.

Достаточность. Пусть $(f, g, h) : r \longrightarrow t$ – преобразование категории $Chu(S-Act)$, где f и h – эпиморфизмы, g – мономорфизм категории $S-Act$. Предположим, что (f_1, g_1, h_1), $(f_1, g_1, h_1) : t \longrightarrow w$ – преобразования S–пространств Чу категории $Chu(S-Act)$ такие, что $(f_1, g_1, h_1) \circ (f, g, h) = (f_2, g_2, h_2) \circ (f, g, h)$, где w – S–пространство Чу. Тогда $f_1 \circ f = f_2 \circ f$, $g_1 \circ g = g_2 \circ g$ и $h_1 \circ h = h_2 \circ h$. Поскольку f и h – эпиморфизмы категории $S-Act$, то $f_1 = f_2$ и $h_1 = h_2$. Поскольку g – мономорфизм категории $S - Act$, то $g_1 = g_2$, т.е. $(f_1, g_1, h_1) = (f_2, g_2, h_2)$. Следовательно, преобразование $(f, g, h) : r \longrightarrow t$ является эпиморфизмом категории $Chu(S - Act)$. □

Теорема 3. *Пусть* $r : A \otimes X \to D$ *и* $t : B \otimes Y \to C$ *объекты категории* $Chu(S-Act)$. *Преобразование* $(f, g, h) : r \longrightarrow t$ *является мономорфизмом категории* $Chu(S - Act)$ *тогда и только тогда, когда* $f : A \longrightarrow B$ *– мономорфизм,* $g : Y \longrightarrow X$ *– эпиморфизм и* $h : D \longrightarrow C$ *– мономорфизм категории* $S - Act$.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $(f, g, h) : r \longrightarrow t$ – мономорфизм категории $Chu(S - Act)$.

Покажем, что h – мономорфизм категории $S - Act$. Предположим, что существуют различные $d_1, d_2 \in D$ такие, что $h(d_1) = h(d_2)$. Определим объект $w : A \otimes X \to S \sqcup D$ и морфизмы $(1_A, 1_X, h_1)$, $(1_A, 1_X, h_2) : w \to r$ категории $Chu(S-Act)$ следующим образом: $w(a \otimes x) = r(a \otimes x)$, $h_1(s) = sd_1$, $h_2(s) = sd_2$, $h_1(d) = h_2(d) = d$ для любых $a \in A$, $x \in X$, $s \in S$, $d \in D$. Корректность определения морфизмов $(1_A, 1_X, h_1)$, $(1_A, 1_X, h_2)$ следует из равенств:

$$h_1 w(a \otimes x) = h_2 w(a \otimes x) = r(a \otimes x),$$

где $a \in A$, $x \in X$. Так как $hh_1(d) = hh_2(d)$ и

$$hh_1(s) = sh(d_1) = sh(d_2) = hh_2(s)$$

для любых $d \in D$, $s \in S$, то $h(d_1) = h(d_2)$, то $hh_1 = hh_2$. Следовательно, $(f, g, h) \circ (1_A, 1_X, h_1) = (f, g, h) \circ (1_A, 1_X, h_2)$. Поскольку (f, g, h) – мономорфизм категории $Chu(S - Act)$, то $h_1 = h_2$. Противоречие.

Покажем, что g – эпиморфизм категории $S-Act$. Предположим, что $X_1 \neq X$, где $X_1 = g(Y)$. Через X_0 обозначим фактор-полигон полигона X по конгруэнции Риса ρ_{X_1}. Определим объект $w : A \otimes (X_0 \times X) \to D$ и морфизмы $(1_A, g_1, 1_D)$, $(1_A, g_2, 1_D) : w \to r$ категории $Chu(S - Act)$ следующим образом: $w(a \otimes (x_0, x)) = r(a \otimes x)$, $g_1(x) = (X_1, x)$, $g_2(x) = (x/\rho_{X_1}, x)$, где $a \in A$, $x \in X$, $x_0 \in X_0$. Из определения объекта w категории $Chu(S - Act)$ следует равенство

$$w(a \otimes g_1(x)) = w(a \otimes g_2(x)) = r(a \otimes x),$$

где $a \in A$, $x \in X$, что доказывает корректность определения морфизмов $(1_A, g_1, 1_D)$, $(1_A, g_2, 1_D)$. Если $y \in Y$, то $g(y) \in X_1$ и $g_1(g(y)) = g_2(g(y))$, т.е.

$g_1 \circ g = g_2 \circ g$. Тогда $(1_A, g_1, 1_D) \circ (f, g, h) = (1_A, g_2, 1_D) \circ (f, g, h)$. Поскольку (f, g, h) – мономорфизм категории $Chu(S - Act)$, то $g_1 = g_2$. Противоречие.

Покажем, что f – мономорфизм категории $S - Act$. Предположим, что существуют различные $a_1, a_2 \in A$ такие, что $f(a_1) = f(a_2)$. Пусть $x \in X$. Покажем, что $r(a_1 \otimes x) = r(a_2 \otimes x)$. Так как g – эпиморфизм, то существует $y \in Y$ такой, что $g(y) = x$. Тогда

$$hr(a_1 \otimes x) = hr(a_1 \otimes g(y)) = t(fa_1 \otimes y) = t(fa_2 \otimes y) = hr(a_2 \otimes g(y)) = r(a_2 \otimes x).$$

Поскольку h – мономорфизм полигонов, то $r(a_1 \otimes x) = r(a_2 \otimes x)$. Определим объект $w : S \otimes X \to D$ и морфизмы $(f_1, 1_X, 1_D)$, $(f_2, 1_X, 1_D) : w \to r$ категории $Chu(S - Act)$ следующим образом: $w(s \otimes x) = sr(a_1 \otimes x)$, $f_1(s) = sa_1$, $f_2(s) = sa_2$ для любых $x \in X$, $s \in S$. Поскольку

$$(f \circ f_1)(s) = f(f_1(s)) = sf(a_1) = sf(a_2) = f(f_2(s)) = (f \circ f_2)(s),$$

то $f \circ f_1 = f \circ f_2$, то $hh_1 = hh_2$. Следовательно, $(f, g, h) \circ (f_1, 1_X, 1_D) = (f, g, h) \circ (1_A, 1_X, h_2)(f_2, 1_X, 1_D)$. Поскольку (f, g, h) – мономорфизм категории $Chu(S - Act)$, то $f_1 = f_2$, т.е. $a_1 = a_2$. Противоречие.

Достаточность. Пусть $(f, g, h) : r \longrightarrow t$ – преобразование категории $Chu(S - Act)$, где f и h – мономорфизмы, g – эпиморфизм категории $S - Act$. Предположим, что (f_1, g_1, h_1), $(f_1, g_1, h_1) : w \longrightarrow r$ – преобразования S–пространств Чу категории $Chu(S - Act)$ такие, что $(f, g, h) \circ (f_1, g_1, h_1) = (f, g, h) \circ (f_2, g_2, h_2)$, где w – S–пространство Чу. Тогда $f \circ f_1 = f \circ f_2$, $g \circ g_1 = g \circ g_2$ и $h \circ h_1 = h \circ h_2$. Поскольку f и h – мономорфизмы категории $S - Act$, то $f_1 = f_2$ и $h_1 = h_2$. Поскольку g – эпиморфизм категории $S - Act$, то $g_1 = g_2$, т.е. $(f_1, g_1, h_1) = (f_2, g_2, h_2)$. Следовательно, преобразование $(f, g, h) : r \longrightarrow t$ является мономорфизмом категории $Chu(S - Act)$. □

Теорема 4. *(существование коуравнителя) Пусть* $r : A \otimes X \longrightarrow D_1$, $s : B \otimes Y \longrightarrow D_2$ *– объекты категории* $Chu(S - Act)$ *и* (f_1, g_1, h_1), $(f_2, g_2, h_2) : r \longrightarrow s$ *– преобразования категории* $Chu(S - Act)$. *Тогда коуравнитель морфизмов* (f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2) *– это* S*-пространство Чу* $t : Q \otimes E \longrightarrow W$, *где* $Q = B/\nu(f_1, f_2)$, $W = D/\nu(h_1, h_2)$, $E = \{y \in Y \mid g_1(y) = g_2(y)\}$, $t(b/\nu(f_1, f_2) \otimes y) = s(b \otimes y)/\nu(h_1, h_2)$ *для любых* $b \in B$, $y \in E$, *с морфизмом* $(f, g, h) : s \to t$, *где* f, h *– канонические эпиморфизмы,* g *– естественное вложение.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены.

Введем обозначения: $\bar{b} = b/\nu(f_1, f_2)$, $\bar{d} = d/\nu(h_1, h_2)$ для любых $b \in B$, $d \in D$. Корректность определения t следует из равенств $h_1 r(a \otimes y) = s(f_1(a) \otimes y)$, $h_2 r(a \otimes y) = s(f_2(a) \otimes y)$ для любых $a \in A$, $y \in E$.

Покажем, что $(f, g, h) : s \longrightarrow t$ такое, что $f(b) = \bar{b}$, $g = 1_E$ и $h(d_2) = \bar{d_2}$ для любых $b \in B$, $d_2 \in D_2$, является преобразованием категории $Chu(S - Act)$. Так как имеют место равенства $t(f(b) \otimes y) = t(\bar{b} \otimes y) = \overline{s(b \otimes y)}$ и $hs(b \otimes g(y)) = hs(b \otimes y) = \overline{s(b \otimes y)}$ для любых $b \in B$, $y \in E$, то $t(f(b) \otimes y) = hs(b \otimes g(y))$ для любых $b \in B$, $y \in E$. Таким образом, (f, g, h) является преобразованием категории $Chu(S - Act)$.

Пусть $t' : Q' \otimes E' \longrightarrow W'$ объект категории $Chu(S - Act)$ и $(f', g', h') : s \to t$ преобразование категории $Chu(S - Act)$ такое, что $(f', g', h') \circ (f_1, g_1, h_1) = (f', g', h') \circ (f_2, g_2, h_2)$. Тогда $f' \circ f_1 = f' \circ f_2$, $g_1 \circ g' = g_2 \circ g'$, $h' \circ h_1 = h' \circ h_2$. Так как Q, W являются коуравнителями и E является уравнителем в категории $S - Act$, то существуют единственные морфизмы $u : Q \to Q'$, $w : W \to W'$

категории $S-Act$ такие, что $f'=u\circ f$, $h'=w\circ h$ и существует единственный морфизм $v: E'\longrightarrow E$ м категории $S-Act$ такой, что $g'=g\circ v$. Покажем, что $(u,v,w): t\to t'$ – преобразование категории $Chu(S-Act)$. Пусть $b\in B$, $e'\in E'$. Так как $u(\bar{b})=(u\circ f)(b)$ и $f'=u\circ f$, то $t'(u(\bar{b})\otimes e')=t'((u\circ f)(b)\otimes e')=t'(f'(b)\otimes e')$. Из того, что (f',g',h') – преобразование категории $Chu(S-Act)$ следует, что $t'(f'(b)\otimes e')=h's(b\otimes g'(e'))$. С другой стороны, из того, что $\bar{b}=f(b)$ следует, что $wt(\bar{b}\otimes v(e'))=wt(f(b)\otimes v(e'))$. Так как (f,g,h) – преобразование категории $Chu(S-Act)$, то $wt(f(b)\otimes v(e'))=(w\circ h)s(b\otimes(g\circ v)(e'))$. Поскольку $h'=w\circ h$ и $g'=g\circ v$, то $(w\circ h)s(b\otimes(g\circ v)(e'))=h's(b\otimes g'(e'))$. Таким образом, $t'(u(\bar{b})\otimes e')=wt(\bar{b}\otimes v(e'))$. Следовательно, (u,v,w) – преобразование категории $Chu(S-Act)$. Ясно, что преобразование (u,v,w) – единственное преобразование, удовлетворяющее равенству $(f',g',h')=(u,v,w)\circ(f,g,h)$. $\square$

Теорема 5. *(существование расслоенной суммы) Пусть $r_1: A_1\otimes X_1\longrightarrow D_1$, $r_2: A_2\otimes X_2\longrightarrow D_2$ и $s: B\otimes Y\longrightarrow D_3$ – объекты категории $Chu(S-Act)$ и $(f_1,g_1,h_1): s\longrightarrow r_1$, $(f_2,g_2,h_2): s\longrightarrow r_2$ – преобразования категории $Chu(S-Act)$. Тогда расслоенная сумма пары $((f_1,g_1,h_1),(f_2,g_2,h_2))$ – это S-пространство Чу*

$$t: A_1\underset{B}{\sqcup}A_2\otimes X_1\underset{Y}{\times}X_2\longrightarrow D_1\underset{D_3}{\sqcup}D_2,$$

где $t(a_i/\mu(f_1,f_2)\otimes(x_1,x_2))=r_i(a_i\otimes x_i)/\mu(h_1,h_2)$, с морфизмами $(q_{A_i},p_{X_i},q_{D_i}): r_i\to t$, где $q_{A_i}(a_i)=a_i/\mu(f_1,f_2)$, $p_{X_i}(x_1,x_2)=x_i$, $q_{D_i}(d_i)=d_i/\mu(h_1,h_2)$ для любых $a_i\in A_i$, $(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$, $d_i\in D_i$, $i\in\{1,2\}$.

Доказательство. Введем обозначения: $a_i/\mu(f_1,f_2)=\bar{a}_i$, $d_i/\mu(h_1,h_2)=\bar{d}_i$ для любых $a_i\in A_1$, $d_i\in D_i$, $i\in\{1,2\}$. Покажем корректность определения t. Пусть $b\in B$, $(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$. Достаточно показать, что $t(\overline{f_1(b)}\otimes(x_1,x_2))=t(\overline{f_2(b)}\otimes(x_1,x_2))$. Так как (f_1,g_1,h_1), (f_2,g_2,h_2) – преобразования категории $Chu(S-Act)$, то имеют места равенства $r_1(f_1(b)\otimes x_1)=h_1s(b\otimes g_1(x_1))$, $r_2(f_2(b)\otimes x_2)=h_2s(b\otimes g_2(x_2))$. Поскольку $g_1(x_1)=g_2(x_2)$, то $\overline{r_1(f_1(b)\otimes x_1)}=\overline{r_2(f_2(b)\otimes x_2)}$. Корректность определения преобразований $(q_{A_i},p_{X_i},q_{D_i}): r_1\longrightarrow t$ $(i\in\{1,2\})$. очевидна.

Пусть $t': C\otimes Z\longrightarrow W$ объект категории $Chu(S-Act)$ и $(f_1',g_1',h_1'): r_1\longrightarrow t'$, $(f_1',g_1',h_1'): r_2\longrightarrow t'$ – преобразования категории $Chu(S-Act)$. Необходимо показать, что существует единственное преобразование $(u,v,w): t\to t'$ категории $Chu(S-Act)$ такое, что $(f_1',g_1',h_1')=(u,v,w)\circ(q_{A_1},p_{X_1},q_{D_1})$ и $(f_2',g_2',h_2')=(u,v,w)\circ(q_{A_2},p_{X_2},q_{D_2})$. Так как полигоны $A_1\underset{B}{\sqcup}A_2$, $D_1\underset{D_3}{\sqcup}D_2$ с морфизмами $q_{A_i}: A_i\to A_1\underset{B}{\sqcup}A_2$ и $q_{D_i}: D_i\to D_1\underset{D_3}{\sqcup}D_2$ $(i\in\{1,2\})$ являются расслоенными суммами пары (f_1,f_2) и (h_1,h_2) соответственно и полигон $X_1\underset{Y}{\times}X_2$ с морфизмами $p_{X_i}: X_1\times X_2\to X_i$ $(i\in\{1,2\})$ является расслоенным произведением пары (g_1,g_2) в категории $S-Act$, то существуют единственные морфизмы $u: A_1\underset{B}{\sqcup}A_2\to C$, $w: D_1\underset{D_3}{\sqcup}D_2\to W$, $v: Z\to X_1\underset{Y}{\times}X_2$ категории $S-Act$ такие, что $f_1'=u\circ q_{A_1}$, $f_2'=u\circ q_{A_2}$, $h_1'=w\circ q_{D_1}$, $h_2'=w\circ q_{D_2}$, $g_1'=p_{X_1}\circ v$, $g_2'=p_{X_2}\circ v$. Осталось показать, что (u,v,w) – преобразование категории $Chu(S-Act)$. Пусть $i\in\{1,2\}$, $a_i\in A_i$, $z\in Z$. Тогда $t'(u(\bar{a}_i)\otimes z)=t'((u\circ q_{A_i})(a_i)\otimes z)=t'(f_i(a_i)\otimes z)=h_i'r_i(a_i\otimes g_i'(z))=(w\circ q_{D_i})r_i(a_i\otimes(p_{X_i}\circ v)(z))=wt(q_{A_i}(a_i)\otimes v(z))=wt(\bar{a}_i\otimes v(z))$. Следовательно, (u,v,w) – преобразование категории $Chu(S-Act)$. $\square$

Теорема 6. *(существование копроизведения) Пусть $r_i : A_i \otimes X_i \longrightarrow D_i$ – объекты категории $Chu(S-Act)$, $i \in I$. Объект $r : \coprod\limits_{i\in I} A_i \otimes \prod\limits_{i\in I} X_i \to \coprod\limits_{i\in I} D_i$ категории $Chu(S-Act)$, где $r(a\otimes x) = r_i(a\otimes x(i))$ для любых $i \in I$, $a \in A_i$ $x \in \prod\limits_{i\in I} X_i$, является копроизведением объектов r_i, $i \in I$, категории $Chu(S-Act)$.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены и $i \in I$. Определим гомоморфизмы $q_{A_i} : A_i \to \coprod\limits_{i\in I} A_i$, $p_{X_i} : \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_i$, $q_{D_i} : D_i \to \coprod\limits_{i\in I} D_i$ полигонов следующим образом: $q_{A_i}(a) = a$, $p_{X_i}(x) = x(i)$, $q_{D_i}(d) = d$ для любых $a \in A_i$, $x \in \prod\limits_{i\in I} X_i$, $d \in D_i$. Поскольку $q_{D_i}(r_i(a\otimes p_{X_i}(x))) = r_i(a\otimes x(i)) = r(a\otimes x) = r(q_{A_i}(a)\otimes x)$ для любых $a \in A_i$, $x \in \prod\limits_{i\in I} X_i$, то $(q_{A_i}, p_{X_i}, q_{D_i})$ – преобразование категории $Chu(S-Act)$.

Пусть $t : B\otimes Y \longrightarrow D$ объект категории $Chu(S-Act)$, $(f_i, g_i, h_i) : r_i \longrightarrow t$ преобразования категории $Chu(S-Act)$. Так как полигоны $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ и $\coprod\limits_{i\in I} D_i$ являются копроизведениями полигонов A_i $(i \in I)$ и D_i $(i \in I)$ соответственно, а полигон $\prod\limits_{i\in I} X_i$ является произведением полигонов X_i $(i \in I)$ в категории $S-Act$, то существуют и причем единственные морфизмы $\tilde f : \coprod\limits_{i\in I} A_i \to B$, $\tilde g : Y \to \prod\limits_{i\in I} X_i$, $\tilde h : \coprod\limits_{i\in I} D_i \to D$ в категории $S-Act$ такие, что $f_i = \tilde f \circ q_{A_i}$, $g_i = p_{X_i}\circ \tilde g$ и $h_i = \tilde h \circ q_{D_i}$ для любого $i \in I$, т.е. $\tilde f(a) = f_i(a)$, $\tilde g(y)(i) = g_i(y)$ и $\tilde h(d) = h_i(d)$ для любых $a \in A_i$, $y \in Y$, $d \in D$.

Покажем, что $(\tilde f, \tilde g, \tilde h)$ – преобразование категории $Chu(S-Act)$, т.е. для любых $a \in \coprod\limits_{i\in I} A_i$, $y \in Y$ имеет место равенство $\tilde h r(a\otimes\tilde g(y)) = t(\tilde f(a)\otimes y)$. Так как $(q_{A_i}, p_{X_i}, q_{D_i})$ – преобразование категории $Chu(S-Act)$, то $r(q_{A_i}(a)\otimes\tilde g(y)) = q_{D_i} r_i(a\otimes(p_{X_i}\circ\tilde g)(y))$ для любых $a \in A_i$, $y \in Y$. Так как $h_i = \tilde h\circ q_{D_i}$ и $g_i = p_{X_i}\circ\tilde g$ следует, что $\tilde h r(a\otimes\tilde g(y)) = (\tilde h\circ q_{D_i}) r_i(a\otimes(p_{X_i}\circ\tilde g)(y)) = h_i r_i(a\otimes g_i(y))$ для любых $a \in A_i$, $y \in Y$. Так как (f_i, g_i, h_i) – преобразование категории $Chu(S-Act)$, то $h_i r_i(a\otimes g_i(y)) = t(f_i(a)\otimes y)$ для любых $a \in A_i$, $y \in Y$. Поскольку $\tilde f(a) = f_i(a)$, то $t(f_i(a)\otimes y) = t(\tilde f(a)\otimes y)$ для любых $a \in A_i$, $y \in Y$. Таким образом, для любых $a \in \coprod\limits_{i\in I} A_i$, $y \in Y$ имеет место равенство $\tilde h r(a\otimes\tilde g(y)) = t(\tilde f(a)\otimes y)$. □

Пример 1 преобразования категории $Chu(S-Act)$, для которого нет уравнителя.

Определим объекты r, s категории $Chu(S-Act)$ следующим образом: $r : \Theta\otimes\Theta_1\sqcup\Theta_2 \longrightarrow \Theta_3\sqcup\Theta_4$, $s : \Theta\otimes\Theta_5 \longrightarrow \Theta$, где $\Theta = \{\theta\}$, $\Theta_i = \{\theta_i\}$ – нулевые полигоны $(1 \le i \le 5)$, $r(\theta\otimes\theta_1) = \theta_3$, $r(\theta\otimes\theta_2) = \theta_4$, и преобразование $(1_\Theta, g_i, h) : r \to s$ категории $Chu(S-Act)$, где $g_1(\theta_5) = \theta_1$ $g_2(\theta_5) = \theta_2$.

Допустим, S-пространство Чу $t : A\otimes X \to D$ с преобразованием $(u, v, w) : t \to r$ является уравнителем преобразований $(1_\Theta, g_1, h)$ и $(1_\Theta, g_2, h)$. Тогда $(1_\Theta, g_1, h)\circ(u, v, w) = (1_\Theta, g_2, h)\circ(u, v, w)$. Следовательно, $v\circ g_1 = v\circ g_2$, т.е. $v(\theta_1) = v(\theta_2)$. Поскольку (u, v, w) – преобразование пространств Чу, то $wt(a\otimes v(\theta_1)) = r(\theta\otimes\theta_1) = \theta_3$ и $wt(\theta\otimes v(\theta_2)) = r(\theta\otimes\theta_2) = \theta_4$ для любого $a \in A$, то $v(\theta_1) \ne v(\theta_2)$, противоречие.

Пример 2 S-пространств Чу, для которых нет произведения в категории $Chu(S-Act)$.

Определим объекты r_1, r_2 категории $Chu(S-Act)$ следующим образом: $r_1 : \Theta\otimes\Theta_1 \to \Theta$, $r_2 : \Theta\otimes\Theta_2 \to \Theta_3 \sqcup \Theta_4$, где $\Theta = \{\theta\}$, $\Theta_i = \{\theta_i\}$ – нулевые полигоны $(1 \leq i \leq 4)$, $r_2(\theta\otimes\theta_2) = \theta_3$.

Предположим, что $r : A\otimes X \to D$ – произведение S-пространств Чу r_1 и r_2, $(f_i, g_i, h_i) : r \to r_i$ – преобразование S-пространств Чу $(i \in \{1, 2\})$.

Покажем, что в полигонах A и D есть нулевые элементы. Пусть $t_1 : \Theta\otimes\Theta \to \Theta$ – S-пространство Чу, $(f'_i, g'_i, h'_i) : t_1 \to r_i$ – преобразования S-пространств Чу $(i \in \{1, 2\})$ такие, что $h'_2(\theta) = \theta_3$. Тогда существует преобразование $(\varphi_1, \psi_1, \chi_1) : t_1 \to r$ такое, что $f'_i = f_i \circ \varphi_1$, $g'_i = \psi_1 \circ g_i$, $h'_i = h_i \circ \chi_1$ $(i \in \{1, 2\})$. Через θ^A обозначим нулевой элемент $\varphi_1(\theta)$ полигона A, через θ^D – нулевой элемент $\chi_1(\theta)$ полигона D. Так как $\theta^D = \chi t_1(\theta\otimes\psi_1(x)) = r(\theta^A\otimes x)$ для любого $x \in X$ и $h'_2(\theta) = h_2(\theta^D)$, то $h_2(\theta^D) = \theta_3$.

Определим преобразование $(\varphi, \psi, \chi) : r \to t$ S-пространств Чу следующим образом: $\chi(a) = \theta^A$, $\psi = 1_X$, $\chi(d) = \theta^D$. Корректность определения следует из равенств $\chi r(a\otimes x) = \theta^D$ и $r(\varphi(a)\otimes x) = r(\theta^A\otimes x) = \theta^D$. Заметим, что $f_i = f_i\circ\varphi$, $g_i = \psi\circ g_i$, $h_i = h_i\circ\chi$ $(i \in \{1, 2\})$. По определению произведения в категории $Chu(S-Act)$, $(\varphi, \psi, \chi) = (1_A, 1_X, 1_D)$. Следовательно, $A = \{\theta^A\} = \Theta^A$ и $D = \{\theta^D\} = \Theta^D$.

Пусть $t_2 : \Theta\otimes(\Theta_1 \sqcup \Theta_2) \to \Theta_3 \sqcup \Theta_4$ – S-пространство Чу, где $t_2(\theta\otimes\theta_1) = \theta_3$, $t_2(\theta\otimes\theta_2) = \theta_4$, $(f'_i, g'_i, h'_i) : t_2 \to r_i$ – преобразования S-пространств Чу такие, что $g'_i(\theta_i) = \theta_i$, $h'_2 = 1_{\Theta_3\sqcup\Theta_4}$ $(i \in \{1, 2\})$. Тогда существует преобразование $(\varphi_2, \phi_2, \chi_2) : t_2 \to r$ такое, что $f'_i = f_i\circ\varphi_2$, $g'_i = \psi_2\circ g_i$, $h'_i = h_i\circ\chi_2$ $(i \in \{1, 2\})$. Поскольку $D = \{\theta^D\}$, то $\chi_2(\theta_3) = \chi_2(\theta_4)$, т.е. $\theta_3 = h'_2(\theta_3) = h_2(\chi_2(\theta_3)) = h_2(\chi_2(\theta_4)) = h'_2(\theta_4) = \theta_4$, противоречие.

Пример 3 S-пространств Чу, для которых нет расслоенного произведения в категории $Chu(S-Act)$.

Поскольку в категории $Chu(S-Act)$ существуют терминальные объекты, то любое произведение объектов является расслоенным произведением над терминальным объектом. Поэтому пример 2 является примером S-пространств Чу, для которых нет расслоенного произведения.

Таким образом, имеет место

Теорема 7. *В категории $Chu(S-Act)$ есть преобразование, для которого нет уравнителя, и есть S-пространства Чу, для которых нет произведения и расслоенного произведения.*

Из леммы 1 и предыдущих результатов получаем

Следствие 1. *В категории $Chu^{\perp}(S-Act)$ существует уравнитель, произведение и расслоенное произведение; и есть преобразование, для которого нет коуравнителя, и есть S-пространства Чу, для которых нет копроизведения и расслоенной суммы.*

Тот факт, что $S-Act$ является замкнутой моноидальной симметричной категорией, позволяет определить сопряженное (двойственное) S-пространство Чу. Пусть $r : A\otimes X \longrightarrow D$ – S-пространство Чу. Тогда естественному отображению $D^* \to (A\otimes X)^*$ в силу соотношений $(A\otimes X)^* = Hom(A\otimes X, S) \cong Hom(A, X^*)$ и в силу замкнутости и симметричности категории $S-Act$ соответствует отображение $A\otimes D^* \longrightarrow X^*$, которое будем обозначать через r^*. Таким образом, сопряженное S-пространство Чу естественно определить следующим образом: $(r^*(a\otimes d^*))(x) = d^*(r(a\otimes x))$ для любых $d^*\in D^*$, $x\in X$, $a\in A$.

Пусть $r_1 : A_1\otimes X_1 \longrightarrow D_1$ и $r_2 : A_2\otimes X_2 \longrightarrow D_2$ – S-пространства Чу, $(f,g,h) : r_1\to r_2$ – преобразование Чу. Преобразование Чу $(f,g,h)^* : r_1^* \longrightarrow r_2^*$ задается тройкой (f,h^*,g^*), где $h^* : D_2^*\to D_1^*$, $g^* : X_2^*\to X_1^*$ определяются следующим образом:

$$(h^*(d_2^*))(d_1) = d_2^*(h(d_1))$$

$$(g^*(x_1^*))(x_2) = x_1^*(g(x_2))$$

для любых $d_2^*\in D_2^*$, $d_1\in D_1$, $x_1^*\in X_1^*$, $x_2\in X_2$. Корректность данного определения следует из равенств $r_2^*(f(a_1)\otimes d_2^*)(x_2) = d_2^*(r_2(f(a_1)\otimes x_2)) = d_2^*(h(r_1(a_1\otimes g(x_2)) = (h^*(d_2^*))r_1(a_1\otimes g(x_2)) = r_1^*(a_1\otimes h^*(d_2^*))(g(x_2)) = g^*(r_1(a_1\otimes h^*(d_2^*))(x_2)$ для любых $d_2^*\in D_2^*$, $x_1^*\in X_1^*$, $a_1\in A_1$, $x_2\in X_2$.

Таким образом, S-пространство Чу $r^{**} : A\times X^{**} \longrightarrow D^{**}$, дважды сопряженное к S–пространству Чу r, определяется следующим образом: $r^{**}(a\otimes x^{**})(d^*) = x^{**}(r^*(a\otimes d^*))$ для любых $a\in A$, $x^{**}\in X^{**}$, $d^*\in D^*$.

Естественное преобразование S-пространств Чу $r^\perp \longrightarrow (r^{**})^\perp$ определяется тройкой $(i_X, 1_A, i_D)$, где $1_A : A\longrightarrow A$ – тождественное отображение, $i_X : X\longrightarrow X^{**}$, $i_D : D\longrightarrow D^{**}$ – естественные гомоморфизмы полигонов такие, что $(i_X(x))(x^*) = x^*(x)$, $(i_D(d))(d^*) = d^*(d)$ для любых $x^*\in X^*$, $x\in X$, $d^*\in D^*$, $d\in D$.

Зададим морфизм $r^\perp \longrightarrow r^{**\perp}$ в виде тройки $(i_X, 1_A, i_D)$, где $1_A : A\longrightarrow A$ – тождественное отображение, $i_X : X\longrightarrow X^{**}$, $i_D : D\longrightarrow D^{**}$ – естественные гомоморфизмы полигонов такие, что $(i_X(x))(x^*) = x^*(x)$, $(i_D(d))(d^*) = d^*(d)$ для любых $x^*\in X^*$, $x\in X$, $d^*\in D^*$, $d\in D$. Покажем, что данный морфизм является преобразованием пространств Чу, т.е. имеет место равенство $r^{**\perp}(i_X(x)\otimes a)(d^*) = (i_D\circ r^\perp(x\otimes a))(d^*)$ для любых $a\in A$ и $x\in X$, $d^*\in D^*$. Действительно, $(i_D\circ r^\perp(x\otimes a))(d^*) = d^*r^\perp(x\otimes a) = d^*r(a\otimes x) = r^*(a\otimes d^*)(x) = (i_X(x))r^*(a\otimes d^*) = r^{**}(a\otimes i_X(x))(d^*) = r^{**\perp}(i_X(x)\otimes a)(d^*)$ для любых $a\in A$ и $x\in X$, $d^*\in D^*$.

По аналогии с понятиями полигона с малым кручением, плотного полигона и рефлексивного полигона введем соответствующие понятия на S–пространствах Чу: S–пространство Чу r называется S–пространством Чу с малым кручением (плотным, рефлексивным), если преобразование $(i_X, 1_A, i_D)$ – мономорфизм (эпиморфизм, изоморфизм соответственно) в категории $Chu(S-Act)$.

Из теорем 2 и 3 в силу результата работы [6] (о полигонах) следует такой результат

Следствие 2. *Пусть $r : A\otimes X\longrightarrow D$ – S–пространство Чу. Тогда*

1) r является S–пространством Чу с малым кручением тогда и только тогда, когда полигоны X и D – полигоны с малым кручением ;

2) r является плотным S–пространством Чу тогда и только тогда, когда X и D – плотные полигоны;

3) r является рефлексивным S–пространством Чу тогда и только тогда, когда X и D – рефлексивные полигоны.

4. Категория $Chu(S-Act,D)$

В данном параграфе рассматривается категория $Chu(S-Act,D)$. Даются конструкции пределов и копределов, в частности, уравнителей, коуравнителей, произведений и копроизведений, которые всегда существуют, в отличие от категории $Chu(S-Act)$.

Замечание 3. В категории $Chu(S-Act,D)$ инициальный объект имеет вид

$$r:\emptyset\otimes\Theta\to D,$$

терминальный объект имеет вид

$$r:\Theta\otimes\emptyset\to D.$$

Из замечания 1 следует

Замечание 4. Категория $Chu(S-Act,D)$ является автодуальной, т.е. изоморфна дуальной категории.

Из доказательств теоремы 2 и теоремы 3 следует

Теорема 8. *Пусть $r:A\otimes X\to D$ и $t:B\otimes Y\to D$ – объекты категории $Chu(S-Act,D)$.*

1) Преобразование $(f,g):r\longrightarrow t$ категории $Chu(S-Act,D)$ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда $f:A\longrightarrow B$ – эпиморфизм и $g:Y\longrightarrow X$ – мономорфизм категории $Chu(S-Act,D)$.

2) Преобразование $(f,g):r\longrightarrow t$ является мономорфизмом категории $Chu(S-Act,D)$ тогда и только тогда, когда $f:A\longrightarrow B$ – мономорфизм и $g:Y\longrightarrow X$ – эпиморфизм категории $Chu(S-Act,D)$.

Заметим, что в силу автодуальности категории $Chu(S-Act,D)$ существование уравнителей следует из существования коуравнителей и наоборот. Следующая теорема дает полное описание уравнителя и коуравнителя.

Теорема 9. *(существование коуравнителя и уравнителя в категории $Chu(S-Act,D)$ Пусть $r:A\otimes X\longrightarrow D$, $s:B\otimes Y\longrightarrow D$ – объекты категории $Chu(S-Act,D)$ и (f_1,g_1), $(f_2,g_2):r\longrightarrow s$ – преобразования категории $Chu(S-Act,D)$. Тогда*

1) коуравнитель морфизмов (f_1,g_1), (f_2,g_2) – это S-пространство Чу $t:Q\otimes E\longrightarrow D$ категории $Chu(S-Act,D)$, где $Q=B/\nu(f_1,f_2)$, $E=\{y\in Y\mid g_1(y)=g_2(y)\}$, $t(b/\nu(f_1,f_2)\otimes y)=s(b\otimes y)$ для любых $b\in B$, $y\in Y$, с морфизмом $(f,g):s\to t$, где f – канонический эпиморфизм, g – естественное вложение;

2) уравнитель морфизмов (f_1,g_1), (f_2,g_2) – это S-пространство Чу $t:E\otimes Q\longrightarrow D$ категории $Chu(S-Act,D)$, где $E=\{a\in A\mid f_1(y)=f_2(y)\}$ $Q=X/\nu(g_1,g_2)$, $t(a\otimes x/\nu(g_1,g_2))=r(a\otimes x)$ для любых $a\in A$, $x\in X$, с морфизмом $(f,g):t\to r$, где f – естественное вложение, g – канонический эпиморфизм.

Доказательство. 1) Доказательство повторяет доказательство теоремы 4, при этом $h_1=1_D$ и $h_2=1_D$.

2) Пусть условия теоремы выполнены.

Введем обозначение: $\bar{x}=x/\nu(g_1,g_2)$ для любого $x\in X$. Корректность определения t следует из равенств $r(a\otimes g_1(y))=s(f_1(a)\otimes y)$, $r(a\otimes g_2(y))=s(f_2(a)\otimes y)$ для любых $a\in E$, $y\in Y$.

Покажем, что $(f,g) : t \longrightarrow r$ такое, что $f = 1_E$, $g(x) = \bar{x}$ для любого $x \in X$, является преобразованием категории $Chu(S-Act, D)$. Действительно, $r(f(a)\otimes x) = r(a \otimes x)$ и $t(a \otimes g(x)) = t(a \otimes \bar{x}) = r(a \otimes x)$ для любых $a \in E$, $\bar{x} \in X$.

Пусть $t' : E' \otimes Q' \longrightarrow D$ объект категории $Chu(S - Act, D)$ и $(f', g') : t' \to r$ преобразование категории $Chu(S-Act, D)$ такое, что $(f_1, g_1)\circ(f', g') = (f_2, g_2)\circ(f', g')$. Тогда $f_1 \circ f' = f_2 \circ f'$ и $g' \circ g_1 = g' \circ g_2$. Так как E является уравнителем и Q является коуравнителем в категории $S - Act$, то существует единственный морфизм $u : E' \to E$ категории $S - Act$ такой, что $f' = f \circ u$, и существует единственный морфизм $v : Q \longrightarrow Q'$ категории $S-Act$ такой, что $g' = v\circ g$. Покажем, что $(u, v) : t' \to t$ – преобразование категории $Chu(S - Act, D)$. Пусть $e' \in E'$, $x \in X$. Так как $v(\bar{x}) = (v \circ g)(x)$ и $g' = v \circ g$, то $t'(e' \otimes v(\bar{x})) = t'(e'\otimes(v\circ g)(x)) = t'(e'\otimes g'(x))$. Из того, что (f', g') – преобразование категории $Chu(S - Act, D)$, следует, что $t'(e' \otimes g'(x)) = r(f'(e')\otimes x)$. С другой стороны, из того, что $\bar{x} = g(x)$, следует, что $t(u(e')\otimes \bar{x}) = t(u(e')\otimes g(x))$. Так как (f, g) – преобразование категории $Chu(S - Act, D)$, то $t(u(e') \otimes g(x)) = r((f \circ u)(e') \otimes x)$. Поскольку $f' = f \circ u$, то $r((f \circ u)(e') \otimes x) = r(f'(e') \otimes x)$. Таким образом, $t'(e' \otimes v(\bar{x})) = t(u(e') \otimes \bar{x})$. Следовательно, (u, v) – преобразование категории $Chu(S - Act, D)$. Ясно, что преобразование (u, v) – единственное преобразование, удовлетворяющее равенству $(f', g') = (f, g) \circ (u, v)$. □

Теорема 10. *(существование копроизведения и произведения в категории $Chu(S - Act, D)$) Пусть $r_i : A_i \otimes X_i \longrightarrow D$ – объекты категории $Chu(S - Act, D)$, $i \in I$.*

1) Объект $r : \coprod_{i\in I} A_i \otimes \prod_{i\in I} X_i \to D$ категории $Chu(S - Act, D)$, где $r(a \otimes x) = r_i(a \otimes x(i))$ для любых $i \in I$, $a \in A_i$, $x \in \prod_{i\in I} X_i$, является копроизведением объектов r_i, $i \in I$, категории $Chu(S - Act, D)$.

2) Объект $r : \prod_{i\in I} A_i \otimes \coprod_{i\in I} X_i \to D$ категории $Chu(S - Act, D)$, где $r(a \otimes x) = r_i(a(i) \otimes x)$ для любых $i \in I$, $a \in \prod_{i\in I} A_i$, $x \in X_i$, является произведением объектов r_i, $i \in I$, категории $Chu(S - Act, D)$.

Доказательство. 1) Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

2) Доказательство следует из пункта 1) и автодуальности категории $Chu(S-Act, D)$. □

Теорема 11. *(существование расслоенной суммы и расслоенного произведения в категории $Chu(S-Act, D)$) Пусть $r_1 : A_1\otimes X_1 \longrightarrow D$, $r_2 : A_2\otimes X_2 \longrightarrow D$ и $s : B \otimes Y \longrightarrow D$ – объекты категории $Chu(S - Act, D)$.*

1) Если $(f_1, g_1) : s \longrightarrow r_1$, $(f_2, g_2) : s \longrightarrow r_2$ – преобразования категории $Chu(S - Act, D)$, то расслоенная сумма пары $((f_1, g_1), (f_2, g_2))$ – это S-пространство Чу

$$t : A_1 \sqcup_B A_2 \otimes X_1 \times_Y X_2 \longrightarrow D,$$

где $t(a_i/\mu(f_1, f_2) \otimes (x_1, x_2)) = r_i(a_i \otimes x_i)$, с морфизмами $(q_{A_i}, p_{X_i}) : r_i \to t$, где $q_{A_i}(a_i) = a_i/\mu(f_1, f_2)$, $p_{X_i}(x_1, x_2) = x_i$, для любых $a_i \in A_i$, $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ $(i \in \{1, 2\})$.

2) Если $(f_1, g_1) : r_1 \longrightarrow s$, $(f_2, g_2) : r_2 \longrightarrow s$ *– преобразования категории* $Chu(S - Act, D)$, *то расслоенное произведение пары* $((f_1, g_1), (f_2, g_2))$ *– это* S*-пространство Чу*

$$t : A_1 \underset{B}{\times} A_2 \otimes X_1 \underset{Y}{\sqcup} X_2 \longrightarrow D,$$

где $t((a_1, a_2) \otimes x_i/\mu(g_1, g_2)) = r_i(a_i \otimes x_i)$, *с морфизмами* $(p_{A_i}, q_{X_i}) : t \to r_i$, *где* $p_{A_i}(a_1, a_2) = a_i$, $q_{X_i}(x_i) = x_i/\mu(g_1, g_2)$, *для любых* $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, $x_i \in X_i$ $(i \in \{1, 2\})$.

Доказательство. 1) Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

2) Доказательство следует из пункта 1) и автодуальности категории $Chu(S-Act, D)$. □

Так как наличие произведений и уравнителей (соответственно, копроизведений и коуравнителей) влечет наличие пределов (соответственно, копределов) [7], то из теорем 9, 10, 11 получается

Теорема 12. *Пусть* $F : K \to Chu(S - Act, D)$ *– функтор, где* K *– малая категория. Тогда существует предел* $LimF$ *и копредел* $ColimF$ *функтора* F.

References

[1] Barr M. *-Autonomous Categories // Lecture Notes in Math.; V. 752. Berlin: Springer-Verlag. 1979.

[2] Barr M., *-Autonomous categories, with an appendix by Po Hsiang Chu // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1. 1991. P. 159-178.

[3] Barr M., Wells C., Category Theory for Computing Science, Prentice Hall international series computer science Spectrum Book. Prentice Hall. 1998.

[4] Gould V., Mikhalev A. V., Palyutin E. A., and Stepanova A. A., *Model-theoretic properties of free, projective, and flat S-acts*, Journal Math. Sci. New York, **164**:2 (2010), 195—227. MR2533598

[5] Kilp, M., Knauer, U. and A.V. Mikhalev, *Monoids, Acts and Categories*, Walter De Gruyter, Berlin, 2000. MR1751666

[6] Kilp M., Knauer U., *On torsionless and Dense Acts*, Semigroup Forum, **63**:3 (2001), 396–414. MR1851819

[7] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd. edition, Berlin: Springer, 1997.

[8] Pratt V. R., *Chu Spaces*, Notes for School on Category Theory and Applications, Textos Mat. Ser. B Coimbra: Univ. Coimbra, **21** (1999), 39—100. MR1774536

[9] Skurikhin E.E., Sukhonos A.G., *Grothendieck Topologies on Chu Spaces*, Siberian Advances in Mathematics, **19**:3 (2009), 192–210. MR2655021

[10] Stepanova A.A., *Axiomatizability and completeness of the class of injective acts over a commutative monoid or a group*, Siberian Mathematical Journal, **56**:3 (2015), 516—525. MR3442809

A. A. Stepanova
Institute of Applied Mathematics,
Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
690920, Vladivostok, Russia
E-mail address: stepltd@mail.ru

E.E. Skurihin
Institute of Applied Mathematics,
Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
690920, Vladivostok, Russia
E-mail address: eeskur@gmail.com

A.G. Sukhonos
Institute of Applied Mathematics,
Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
690920, Vladivostok, Russia
E-mail address: agsukh@mail.ru