S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1238–1247 (2017) УДК 512.552.13
DOI 10.17377/semi.2017.14.105 MSC 16X99

МИНИМАЛЬНО ПОЛНЫЕ АССОЦИАТИВНЫЕ АРТИНОВЫ КОЛЬЦА

Т. В. ПАВЛОВА

Abstract. We study complete associative rings. We give an exhaustive description of minimally complete associative Artin rings.

Keywords: associative ring, Artin ring, complete ring, reduced ring, minimally complete ring, Galois ring.

1. Введение

Теория абелевых групп дает яркий пример развитой структурной теории. При этом важную роль в ней играют понятия полной (делимой) и редуцированной группы. Аддитивная абелева группа G является полной, если для любого $g \in G$ и любого простого числа p, в группе разрешимо уравнение $px = g$. Группа, не содержащая ненулевых полных подгрупп, называется редуцированной. Оказалось, к определениям этих понятий возможен другой подход, использующий теорию многообразий групп. А именно, абелева группа будет полной тогда и только тогда, когда она не имеет гомоморфизмов на неединичные группы из атомов решетки многообразий абелевых групп, которые исчерпываются многообразиями $\mathcal{A}_p$ абелевых групп экспоненты p по всем простым p.

Это дало возможность Л. М. Мартынову определить в [1] аналоги этих понятий для произвольных (универсальных) алгебр. Поскольку решетка $L(\mathcal{V})$ подмногообразий любого многообразия $\mathcal{V}$ алгебр является атомной, естественно назвать алгебру из $\mathcal{V}$ полной, если у нее нет гомоморфизмов на неодноэлементные алгебры из атомов решетки $L(\mathcal{V})$. Алгебра, не имеющая неодноэлементных полных подалгебр, называется редуцированной. Неодноэлементная алгебра называется минимально полной, если любая её собственная подалгебра является редуцированной.

Pavlova, T. V., Minimally complete associative Artin rings.

Поступила 6 мая 2017 г., опубликована 28 ноября 2017 г.

Хорошо известно, что минимально полные абелевы группы с точностью до изоморфизма исчерпываются аддитивной группой поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и квазициклическими группами $\mathbf{C}_{p^\infty}$ по всем простым p. При этом любая полная абелева группа является прямой суммой минимально полных абелевых групп. Как и для абелевых групп, в случае произвольных алгебр понятие полноты оказывается тесно связанным с понятием чистоты. Например, любая полная алгебра всегда является всюду чистой, любая минимально полная алгебра является простой по чистоте алгеброй и т. д. [2]. Поэтому Л. М. Мартыновым была сформулирована следующая проблема: охарактеризовать минимально полные алгебры данного многообразия алгебр (проблема 10 в [1] или 3.10 в [2]).

В дальнейшем понятие минимальной полноты исследовалось разными авторами для модулей, полугрупп, ассоциативных колец и унаров [3]–[9]. Данная работа продолжает исследование минимально полных асссоциативных колец, начатое в [8], и дает исчерпывающее описание минимально полных ассоциативных артиновых колец. Тем самым, для этого класса колец отмеченная проблема решается полностью.

2. Используемые обозначения, определения и утверждения

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основного результата статьи, приведем используемые обозначения, определения и необходимые утверждения.

Под кольцом далее будем понимать ассоциативное кольцо. Кольцо называется *артиновым слева*, если оно удовлетворяет условию минимальности для левых идеалов. Артиново слева кольцо будем называть артиновым, двусторонний идеал — идеалом, полупростое по Джекобсону кольцо — полупростым. Без ссылок на источники будем использовать известные факты о том, что радикал Джекобсона $J(R)$ артинова кольца R нильпотентен (см., например, [10], с. 25, теорема 1.3.1), а полупростое артиново кольцо есть конечная прямая сумма колец матриц над подходящими телами (см., например, [10], с. 51, теорема 2.1.6). Кольцо, совпадающее со своим квадратом, называем идемпотентным.

Под n, m, k, если не оговорено противное, будем понимать натуральные числа, под p, q — простые числа, под μ, η — произвольные кардинальные числа. Посредством $\mathbf{C}_{p^\infty}$ обозначаем квазициклическую группу типа p^∞. Z_n — это кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}$ по модулю n, F_{p^n} — конечное поле из p^n элементов, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Кольцо всех квадратных матриц порядка n над кольцом R называем кольцом матриц порядка n и обозначаем $M_n(R)$. Кольцо, полученное из аддитивной абелевой группы A введением нулевого умножения или заменой умножения кольца A на нулевое умножение, обозначаем A^0. Под R^+ понимаем аддитивную группу кольца R. Знаком $\oplus$ обозначаем прямую сумму колец (групп).

Факторкольцо $Z_{p^n}[x]/(f(x))$, где $f(x)$ — унитарный многочлен степени k, образ которого при естественном гомоморфизме $Z_{p^n}[x] \to Z_p[x]$ является неприводимым над Z_p многочленом, называется *кольцом Галуа* характеристики p^n и порядка p^{nk}. Кольцо Галуа с точностью до изоморфизма определяется числами p, n и k и обозначается $GR(p^n, k)$. Очевидно, $GR(p^n, 1) \cong Z_{p^n}$, $G(p, k) \cong F_{p^k}$. Как следует из основного результата статьи, минимально полные кольца тесно связаны с классом колец Галуа, которые играют особую роль в структурной теории конечных ассоциативных колец [11]–[14] и в приложениях, см. например, [15]–[17].

В соответствии с терминологией, введенной в [1], ассоциативное кольцо называтся *полным*, если оно не имеет гомоморфизмов на ненулевые кольца из атомов решетки многообразий ассоциативных колец, которые исчерпываются сериями многообразий $\mathcal{Z}_p := var\{px = 0, xy = 0\}$ и $\mathcal{F}_p := var\{px = 0, x^p = x\}$ по всем простым p. Кольцо будем называть $\mathcal{Z}_p$-полным ($\mathcal{F}_p$-полным), если оно не имеет гомоморфизмов на ненулевые кольца из многообразий $\mathcal{Z}_p$ ($\mathcal{F}_p$). Ясно, что кольцо будет полным тогда и только тогда, когда оно является $\mathcal{Z}_p$-полным и $\mathcal{F}_p$-полным для всех простых p. Заметим, гомоморфный образ $\mathcal{Z}_p$-полного ($\mathcal{F}_p$-полного) кольца также является $\mathcal{Z}_p$-полным ($\mathcal{F}_p$-полным) кольцом. Согласно [1], кольцо, не имеющее ненулевых полных подколец, называем *редуцированным*. Понятно, что кольцо, принадлежащее какому-либо атому, $\mathcal{Z}_p$ или $\mathcal{F}_p$, будет редуцированным. Нулевое кольцо является одновременно полным и редуцированным. Ненулевое полное кольцо называется *минимально полным*, если любое его собственное ненулевое подкольцо не является полным (равносильно, является редуцированным).

Если для многообразия $\mathcal{V}$ колец через $\mathcal{V}(R)$ обозначать $\mathcal{V}$-вербал кольца R, т. е. наименьший идеал из всех идеалов кольца R, факторкольца по которым принадлежат $\mathcal{V}$, то для многообразий $\mathcal{Z}_p$ и $\mathcal{F}_p$ можно указать явные формулы для вычисления соответствующих вербалов: $\mathcal{Z}_p(R) = pR+R^2$, $\mathcal{F}_p(R) = pR+R_p$, где R_p — идеал, порожденный элементами вида $x^p - x$ для всех x из R. Кольцо R будет полным тогда и только тогда, когда $\mathcal{Z}_p(R) = R$ и $\mathcal{F}_p(R) = R$ для всех простых p. Из формул нахождения $\mathcal{Z}_p$- и $\mathcal{F}_p$-вербалов следует, что если аддитивная группа R^+ кольца R является полной, т. е. $pR = R$ для всех простых p, то кольцо R будет полным. Заметим также, что кольцо, совпадающее со своим квадратом, будет $\mathcal{Z}_p$-полным по всем простым p.

Для удобства чтения приведем известные факты о взаимосвязи структуры кольца и структуры его аддитивной группы, на которые будем ссылаться в данной работе (Л. Фукс, [18]):

Лемма 1. ([18], лемма 117.1, следствие A, с. 326) *Максимальная делимая подгруппа аддитивной группы R^+ кольца R является идеалом кольца.*

Теорема 1. ([18], теорема 122.4, с. 349) *Группа A является аддитивной группой некоторого артинова кольца тогда и только тогда, когда она имеет вид:*

$$A = \left(\oplus_\mu \mathbb{Q}^+\right) \oplus \left(\oplus_{i=1}^n \mathbf{C}_{p_i^\infty}\right) \oplus \left(\oplus_\eta Z^+_{p_j^{k_j}}\right)$$

причем $p_j^{k_j}|m$, где m — фиксированное целое число, μ, η — произвольные кардинальные числа.

Лемма 2. ([18], лемма 122.5, с. 349) *Квазициклические подгруппы артинова кольца лежат в аннуляторе кольца.*

Теорема 2. ([18], теорема 122.7, с. 350) *Всякое артиново кольцо R является теоретико-кольцевой прямой суммой некоторого артинова кольца без кручения S и конечного числа артиновых p_i-колец T_{p_i}, соответствующих различным простым числам p_i:*

$$R = S \oplus T_{p_1} \oplus ... \oplus T_{p_k}$$

Теорема 3. ([18], теорема 123.3, с. 353) *Левые идеалы артинова кольца удовлетворяют условию максимальности в том и только том случае, когда это кольцо не содержит квазициклических подгрупп.*

Также неоднократно будем использовать следующие утверждения о минимально полных кольцах, доказанные ранее в работе [8] (Л. М. Мартынов, Т. В. Павлова):

Лемма 3. ([8], лемма 6) *Минимально полное кольцо R с ненулевым умножением, совпадает со своим квадратом.*

Лемма 4. ([8], лемма 12) *Полупростое артиново кольцо R является минимально полным тогда и только тогда, когда когда оно изоморфно либо полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, либо конечному полю F_{p^q} для некоторых простых чисел p и q, либо кольцу $M_2(F_p)$ для некоторого простого p.*

Лемма 5. ([8], лемма 13) *Гомоморфный образ минимально полного конечного кольца является минимально полным кольцом.*

Лемма 6. ([8], лемма 15) *Конечное кольцо R с условиями $R^2 = R$, $p^k R = O$ для некоторых p и k является минимально полным тогда и только тогда, когда R/pR — минимально полное кольцо.*

Теорема 4. ([8], теорема 1)

1) Минимально полные нильпотентные кольца исчерпываются кольцом $\mathbb{Q}^0$ и кольцами $\mathbf{C}^0_{p^\infty}$ по всем простым p.

2) Простое кольцо с единицей является минимально полным тогда и только тогда, когда оно изоморфно либо полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, либо конечному полю F_{p^q}, либо кольцу $M_2(F_p)$ для некоторых простых p и q.

3) Конечное кольцо R является минимально полным тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим квадратом, его аддитивная группа R^+ является p-группой для некоторого простого числа p, $J(R) = pR$ и либо $R/pR \cong F_{p^q}$, либо $R/pR \cong M_2(F_p)$, где p, q — простые числа.

3. Минимально полные артиновы кольца

Основной целью раздела является описание минимально полных артиновых слева колец. Перед формулировкой и доказательством основного результата докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 7. *Если артиново кольцо R совпадает со своим квадратом и его аддитивная группа R^+ является полной, то R^+ — группа без кручения.*

Доказательство. Как уже упоминалось, всякая полная абелева группа является прямой суммой минимально полных абелевых групп, изоморфных аддитивной группе $\mathbb{Q}^+$ поля рациональных чисел и квазициклическим группам $\mathbf{C}_{p^\infty}$ по всем простым p. Из теоремы 1 следует, что $R^+ \cong (\oplus_\mu \mathbb{Q}^+) \oplus \left(\oplus_{i=1}^n \mathbf{C}_{p_i^\infty}\right)$. В этом случае, согласно теореме 2, кольцо R есть прямая сумма идеалов S и C, где $S^+ \cong \oplus_\eta \mathbb{Q}^+$ и $C^+ \cong \oplus_{i=1}^n \mathbf{C}_{p_i^\infty}$, причем $C \subseteq Ann\, R$ по лемме 2. Тогда $R^2 = (S \oplus C)^2 = S^2 = R$, т. е. $R = S$ и поэтому R^+ — группа без кручения. □

Лемма 8. *Если аддитивная группа R^+ артинова кольца R полная и без кручения, то группы $J(R)^+$ и $(R/J(R))^+$ также полные и без кручения.*

Доказательство. Для любого натурального числа n рассмотрим множество J_n всех решений уравнений вида $nx = j$ в кольце R, где j пробегает идеал $J(R)$, т. е. $J_n = \cup_{j\in J(R)}\{x \in R \mid nx = j\}$. Легко понять, что J_n — идеал в R. Так как все элементы $j \in J(R)$ нильпотентны, а R^+ — группа без кручения, то J_n — нильидеал. Следовательно, $J_n \subseteq J(R)$, т. е. в группе $J(R)^+$ для любого $j \in J(R)^+$ разрешимо уравнение $nx = j$. В силу произвольности выбора числа n, группа $J(R)^+$ — полная и без кручения, как подгруппа группы R^+ без кручения.

Группа $(R/J(R))^+$ — полная как факторгруппа полной группы. Если для некоторого натурального n имеет место $n\bar{r} = \bar{0}$ в группе $\overline{R} = (R/J(R))^+$, т. е. $nr \in J(R)$ для некоторого $r \in R$, то в силу полноты группы $J(R)^+$ найдется $x \in J(R)^+$ такой, что $nx = nr$. Отсюда $n(x-r) = 0$. Поскольку $J(R)^+$ — группа без кручения, заключаем, что $x = r$, т. е. $r \in J(R)$ или $\bar{r} = \bar{0}$. Таким образом, $(R/J(R))^+$ — группа без кручения. □

Лемма 9. *Любое кольцо R с условием $p^nR = (0)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, будет $\mathcal{Z}_q$-полным и $\mathcal{F}_q$-полным по всем простым $q \neq p$.*

Доказательство. Так как q и p^n взаимно просты, то $qk + p^nm = 1$ для некоторых $k, m \in \mathbb{Z}$. Тогда $r = (qk + p^nm)r = q(kr)$ для всех $r \in R$, т. е. $qR = R$. Отсюда следует $\mathcal{Z}_q$-полнота и $\mathcal{F}_q$-полнота кольца R. □

Лемма 10. *Всякое нилькольцо R является $\mathcal{F}_p$-полным по всем простым p.*

Доказательство. Для всякого элемента r кольца R найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $r^m = 0$. Если f — гомоморфизм кольца R на кольцо из многообразия $\mathcal{F}_p$, то $f(r) = [f(r)]^p$, тогда $f(r) = [f(r)]^p = [[f(r)]^p]^p = [f(r)]^{p^2} = \ldots = [f(r)]^{p^n}$ для некоторого n, такого, что $p^n \geq m$. Получаем, $f(r) = f(r^{p^n}) = f(r^m \cdot r^{p^n-m}) = f(r^m) \cdot f(r^{p^n-m}) = 0 \cdot f(r^{p^n-m}) = 0$, т. е. f — нулевой гомоморфизм. □

Лемма 11. *Если I — нильпотентный идеал кольца R с условием $p^nR = (0)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то для всякого редуцированного подкольца K кольца R, соответствующий ему гомоморфный образ $\overline{K}$ в кольце $\overline{R} = R/I$ будет также кольцом редуцированным.*

Доказательство. Пусть I — нильпотентный идеал, K — редуцированное подкольцо кольца R. Доказательство леммы проведем для случая $I^2 = (0)$. Если, в общем случае, $I \supseteq I^2 \supseteq I^{2^2} \supseteq \ldots \supseteq I^{2^m} = (0)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то в качестве нильпотентного идеала в условии леммы возьмем $I^{2^{m-1}}$, для которого $(I^{2^{m-1}})^2 = (0)$. Тогда из редуцированности K, согласно доказываемому ниже, будет следовать редуцированность соответствующего ему гомоморфного образа K_1 в факторкольце $R/I^{2^{m-1}}$. Аналогично, так как $(I^{2^{m-2}}/I^{2^{m-1}})^2 = (\bar{0})$, из редуцированности K_1 в кольце $R/I^{2^{m-1}}$ будет следовать редуцированность его гомоморфного образа в кольце $(R/I^{2^{m-1}})/(I^{2^{m-2}}/I^{2^{m-1}}) \cong R/I^{2^{m-2}}$, и т. д., на m-м шаге получим редуцированность $\overline{K}$ в кольце R/I.

Заметим, для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что гомоморфный образ $\overline{K} \cong K/K \cap I$ редуцированного подкольца K кольца R не является полным кольцом. Если, в более общем случае, $\overline{K}$ содержит полное подкольцо, то перейдем к рассмотрению прообраза этого подкольца в R.

Пусть подкольцо K редуцировано. Из леммы 9 следует, что $\mathcal{F}_p(K) \neq K$ или $\mathcal{Z}_p(K) \neq K$ для некоторого простого p. Кольцо $K \cap I$ нильпотентно, тогда по лемме 10, оно содержится в ядре любого гомоморфизма на кольца из многообразия $\mathcal{F}_p$. В этом случае, согласно лемме 3 из [19], кольцо K будет $\mathcal{F}_p$-полным тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_p$-полно кольцо $\overline{K} = K/K \cap I$. Таким образом, если $\mathcal{F}_p(K) \neq K$, то $\mathcal{F}_p(\overline{K}) \neq \overline{K}$.

Пусть теперь $\mathcal{F}_p(K) = K$, но $\mathcal{Z}_p(K) \neq K$. Предположим при этом, что $\mathcal{Z}_p(\overline{K}) = p\overline{K} + \overline{K}^2 = \overline{K} \neq (\bar{0})$. Если φ — ограничение естественного гомоморфизма $f : R \to R/I$ на подкольцо K, то $K = pK + K^2 + Ker\,\varphi$, или $K = pK + K^2 + K \cap I$. Тогда $K = p(pK + K^2 + K \cap I) + K^2 + K \cap I = p^2K + K^2 + K \cap I$, точно также, $K = p^2(pK + K^2 + K \cap I) + K^2 + K \cap I = p^3K + K^2 + K \cap I$. Так как $p^nK = (0)$, то на соответствующем шаге получим, что $K = K^2 + K \cap I$. Тогда $K^2 = (K^2 + K \cap I)(K^2 + K \cap I) \subseteq K^4 + K^2(K \cap I) \subseteq K^4 + K^3 = K^3$, поэтому $K^2 = K^3$, т. е. K^2 — идемпотентный идеал подкольца K. Если $K^2 \neq (0)$, то K^2 будет $\mathcal{Z}_p$-полным кольцом и в то же время $\mathcal{F}_p$-полным, как идеал $\mathcal{F}_p$-полного кольца K (см. [20], Предложение 1), а, следовательно, полным кольцом. Последнее невозможно, так как K редуцировано, значит, $K^2 = (0)$ и $K = K^2 + K \cap I = K \cap I$, поэтому $\overline{K} = (\bar{0})$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Следствие 1. *Если R — минимально полное кольцо и $p^nR = (0)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то кольцо R/pR также минимально полное.*

Следствие 2. *Если R — минимально полное артиново кольцо и $p^nR = (0)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то факторкольцо по радикалу Джекобсона $R/J(R)$ также будет минимально полным кольцом.*

Лемма 12. *Если аддитивная группа артинова кольца R является ограниченной группой, т. е. $mR = (0)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то R является конечным кольцом тогда и только тогда, когда факторкольцо по радикалу Джекобсона $R/J(R)$ — конечное кольцо.*

Доказательство. Прямое утверждение леммы очевидно. Обратно, пусть кольцо $R/J(R)$ конечное. Из условия $mR = (0)$ и теоремы 2 следует, что достаточно ограничиться случаем артинова кольца R с условием $p^nR = (0)$ для некоторого натурального n и простого p. Если $J(R) = (0)$, то доказываемое тривиально. Если же $J(R) \neq (0)$, то возьмем ненулевой элемент $j_1 \in J(R)$. Обозначим через ${}_R(j_1)$ главный левый идеал, порожденный j_1, т. е. ${}_R(j_1) = Rj_1 + \mathbb{Z}j_1$, где $\mathbb{Z}j_1$ есть множество всех целых кратных элемента j_1. Если ${}_R(j_1) \neq J(R)$, то возьмем ненулевой элемент $j_2 \in J(R)$ и $j_2 \notin {}_R(j_1)$. Если ${}_R(j_1) + {}_R(j_2) \neq J(R)$, то возьмем $j_3 \in J(R)$, $j_3 \neq 0$ и $j_3 \notin {}_R(j_1) + {}_R(j_2)$, и так далее. Получим строго возрастающую цепочку левых идеалов, содержащихся в $J(R)$:

$$ {}_R(j_1) \subset {}_R(j_1) + {}_R(j_2) \subset {}_R(j_1) + {}_R(j_2) + {}_R(j_3) \subset ... $$

Так как $p^nR = (0)$, то аддитивная группа артинова кольца R не содержит подгрупп, изоморфных квазициклической группе. По теореме 3, в этом случае артиново слева кольцо R является также нетеровым слева, поэтому возрастающая цепочка идеалов стабилизируется на некотором шаге k. Следовательно,

$$ J(R) = {}_R(j_1) + {}_R(j_2) + ... + {}_R(j_k). $$

Кольцо R артиново, следовательно, его радикал Джекобсона нильпотентен: $J^t(R) = (0)$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$. Предположим сначала, что $J^2(R) = (0)$. Для всех $i = 1, ..., k$ рассмотрим гомоморфизмы левых R-модулей $\varphi_i : R \to Rj_i$

по правилу: $\varphi_i : r \mapsto rj_i$ для всех $r \in R$. Так как каждый из гомоморфизмов φ_i сюръективен и $J(R) \subseteq Ker\,\varphi_i$, то из того, что $R/J(R)$ — конечное кольцо, следует, что модули $Rj_i \cong R/Ker\,\varphi_i$ также являются конечными. В то же время, $p^n j_i = 0$ для всех $i = 1, ..., k$, то есть множества $\mathbb{Z}j_i$ также конечные. Поэтому радикал Джекобсона $J(R) = {}_R(j_1) + {}_R(j_2) + ... + {}_R(j_k)$, а, следовательно, и само кольцо R, также являются конечными кольцами.

Если $J^2(R) \neq (0)$, доказанное будет справедливым для кольца $\overline{R} = R/J^2(R)$. Так как $J^2(R) \subseteq J(R)$, то $J(\overline{R}) \cong J(R)/J^2(R)$ и $J^2(\overline{R}) = (\bar{0})$. Тогда из того, что факторкольцо $\overline{R}/J(\overline{R}) \cong (R/J^2(R))/(J(R)/J^2(R)) \cong R/J(R)$ является конечным кольцом, следует, что кольцо $\overline{R} = R/J^2(R)$ также конечное. Если при этом $J^3(R) = (0)$, то для всех сюръективных гомоморфизмов $\varphi_i : R \to Rj_i$ выполняется $J^2(R) \subseteq Ker\,\varphi_i$. Так как кольцо $R/J^2(R)$ конечное, то модули $Rj_i \cong R/Ker\,\varphi_i$ также являются конечными. Тогда и R кольцо конечное.

Если же $J^3(R) \neq (0)$, из того, что кольцо $R/J(R)$ является конечным кольцом, следует, что кольцо $R/J^3(R)$ также конечное. И так далее, рассуждая аналогично, из того, что $R/J^3(R)$ есть конечное кольцо, получим, что $R/J^4(R)$ также конечное кольцо. На шаге t получим, что $R/J^t(R) = R$ является конечным кольцом. □

Следствие 3. *Артиново редуцированное кольцо R будет конечным кольцом.*

Доказательство. Согласно лемме 1 в [21], для любого артинова редуцированного кольца R найдется $m \in \mathbb{N}$, такое, что $mR = (0)$. При этом, по теореме 2 из [21], $R/J(R)$ есть прямая конечная сумма простых конечных полей, то есть $R/J(R)$ — конечное кольцо. Тогда по лемме 12, кольцо R также конечное. □

Лемма 13. *Минимально полное конечное кольцо R содержит единицу.*

Доказательство. Пусть R — минимально полное конечное кольцо. Из п.3 теоремы 4 следует, что $R^2 = R$ и $p^n R = (0)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и простого p, а также $J(R) = pR$. Так как R ненильпотентно, то факторкольцо $\overline{R} = R/J(R) \neq (\bar{0})$ и является кольцом с единицей $\bar{e}$ (см., например, [10], с. 34, следствие 2 теоремы 1.4.2), т. е. $\bar{r}\bar{e} = \bar{e}\bar{r} = \bar{r}$ для всех $\bar{r} \in \overline{R}$. Пусть $a \in R$ — прообраз единицы $\bar{e}$, тогда элемент $a^2 - a \in J(R)$ и поэтому нильпотентен. Так как сам элемент a ненильпотентен, то (см., например, [10], с. 27, лемма 1.3.2) кольцо R содержит идемпотент e, также являющийся прообразом $\bar{e}$.

Рассмотрим пирсовское разложение $R = Re \oplus (R - Re)$ кольца R в прямую сумму левых идеалов относительно идемпотента e. Ясно, что $R - Re \subseteq J(R)$, покажем, что $R = Re$. Так как e — идемпотент, то для всех $x \in Re$ выполняется $x = xe$. Тогда, если $x \in pR \cap Re$, то найдется $r \in R$ такой, что $x = pr$, откуда $x = xe = p(re)$, т. е. $x \in p(Re)$. Следовательно, $pR \cap Re \subseteq p(Re)$, откуда $pR \cap Re = p(Re)$. Для левого идеала Re кольцо $Re/p(Re) = Re/pR \cap Re = Re/J(R) \cap Re \cong (Re + J(R))/J(R) = R/J(R)$ — минимально полное по лемме 5. При этом, так как $e \in eRe$, то $Re \subseteq R \cdot eRe = Re \cdot Re = (Re)^2$. Таким образом, кольцо Re идемпотентное и факторкольцо $Re/p(Re)$ минимально полное, поэтому по лемме 6, кольцо Re также минимально полное. Следовательно, $Re = R$ в силу минимальной полноты R. Получаем, идемпотент e будет правой единицей в R.

Проведя аналогичные рассуждения для разложения Пирса в прямую сумму правых идеалов eR и $R - eR$ относительно идемпотента e, получим, что $R = eR$, то есть e является и левой единицей в кольце R. □

Лемма 14. *Минимально полные кольца матриц над кольцами Галуа исчерпываются кольцами $M_2(GR(p^n,1))$ и $GR(p^n,q)$ по всем простым p и q, $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Ясно, что для всякого кольца Галуа $GR(p^n,k)$ факторкольцо $GR(p^n,k)/pGR(p^n,k) \cong GR(p,k) = F_{p^k}$. Пусть $R = M_m(GR(p^n,k))$ — минимально полное кольцо матриц порядка m над кольцом Галуа. Для любого идеала I кольца R, $M_m(R)/M_m(I) \cong M_m(R/I)$ (см., например, лемму в [22]), тогда кольцо $R/pR \cong M_m(GR(p^n,k))/M_m(pGR(p^n,k)) \cong M_m(GR(p,k)) = M_m(F_{p^k})$. Из п.3 теоремы 4 следует, что $R/pR \cong M_m(F_{p^k})$ изоморфно либо $M_2(F_p)$, либо F_{p^q}, где p и q простые числа. Если $R/pR \cong M_2(F_p) = M_2(GR(p,1))$, то $R \cong M_2(GR(p^n,1)) = M_2(Z_{p^n})$. Если $R/pR \cong F_{p^q} = GR(p,q)$, то $R \cong GR(p^n,q)$. □

Теорема 5. *Ассоциативное артиново кольцо является минимально полным тогда и только тогда, когда оно принадлежит одному из следующих классов:*

1) кольцам с нулевым умножением $\mathbf{C}^0_{p^\infty}$ по всем простым p;

2) полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел;

3) кольцам матриц $M_2(Z_{p^n})$, для всех $n \in \mathbb{N}$, по всем простым p;

4) кольцам Галуа $GR(p^n,q)$, для всех $n \in \mathbb{N}$, по всем простым p и q.

Доказательство. Пусть R — минимально полное артиново кольцо. Если R является кольцом с нулевым умножением, то оно будет полным тогда и только тогда, когда его аддитивная группа R^+ является полной (см. лемму 5 в [23]). Если $R^2 \neq (0)$, то из леммы 3 следует, что $R^2 = R$. Согласно лемме 1, наибольшая полная подгруппа I аддитивной группы кольца R^+ есть идеал кольца. То есть I — полное подкольцо кольца R. В силу минимальной полноты R, либо $I = R$, то есть группа R^+ полная, либо R^+ не содержит ненулевых полных подгрупп. По теореме 1, в этом случае $R^+ \cong \oplus_\eta Z^+_{p_j^{k_j}}$, причем $p_j^{k_j}|m$, где m — фиксированное целое число, т. е. $mR = (0)$. При этом, по теореме 2, R^+ есть прямая сумма своих примарных компонент, являющихся идеалами кольца R.

Таким образом, учитывая, что прямая сумма колец является полным кольцом тогда и только тогда, когда каждое слагаемое есть полное кольцо, получаем, что для минимально полного артинова кольца R возможны только следующие случаи:

(i) $R^2 = (0)$ и R^+ — полная группа.

(ii) $R^2 = R$ и R^+ — полная группа.

(iii) $R^2 = R$ и $p^k R = (0)$ для некоторого простого числа p и $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим эти случаи.

(i) Пусть $R^2 = (0)$ и R^+ — полная группа. Минимально полные кольца с нулевым умножением описаны в п.1 теоремы 4, это кольца $\mathbb{Q}^0$ и $\mathbf{C}^0_{p^\infty}$ по всем простым p. Любая подгруппа этих колец — идеал в кольце и, следовательно, кольцо $\mathbb{Q}^0$ артиновым не является, так как не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Получаем, что в этом случае $R = \mathbf{C}^0_{p^\infty}$ для некоторого простого p, т. е. выполнено условие 1) теоремы 5.

(ii) Пусть $R^2 = R$ и R^+ — полная группа. По лемме 7, R^+ — полная группа без кручения. Тогда по лемме 8, группа $J(R)^+$ также полная, т. е. $J(R)$ будет полным кольцом. Кольцо R — минимально полное и ненильпотентное по предположению. Следовательно, $J(R) = (0)$, т. е. R — полупростое артиново кольцо с аддитивной группой без кручения. По лемме 4, в этом случае кольцо R изоморфно полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, т. е. выполнено условие 2) теоремы 5.

(iii) Пусть $R^2 = R$ и $p^k R = (0)$ для некоторых p и k. По следствию 2, фактор-кольцо $R/J(R)$ также является минимально полным кольцом, артиновым как гомоморфный образ артинова кольца R. Артиновы полупростые минимально полные кольца описаны леммой 4, в данном случае, либо $R/J(R) \cong F_{p^q}$, либо $R/J(R) \cong M_2(F_p)$, где p, q — простые числа. В любом случае, $R/J(R)$ является конечным кольцом. Тогда, как следует из леммы 12, само артиново кольцо R также будет конечным кольцом. По лемме 13, кольцо R является кольцом с единицей. Из теоремы Уилсона о конечных кольцах (см. [13], с. 322, Предложение 6) следует, что R содержит подкольцо K, изоморфное прямой сумме колец матриц над кольцами Галуа, причем $K/pK \cong R/J(R)$. Так как кольцо $R/J(R)$ полное, а $K^2 = K$, то K — полное кольцо тогда и только тогда, когда фактор-кольцо K/pK полное по лемме 6. Получаем, K является полным подкольцом кольца R и поэтому $K = R$ в силу минимальной полноты R. Повторим, прямая сумма колец является полным кольцом лишь только в том случае, когда каждое слагаемое есть полное кольцо, поэтому R изоморфно кольцу матриц над кольцом Галуа. Минимально полные кольца матриц над кольцами Галуа описаны в лемме 14 — это либо $M_2(GR(p^n, 1))$, либо $GR(p^n, q)$ по всем натуральным n и простым p и q. Из этого следуют условия 3) и 4) теоремы 5.

Таким образом, кольцами, указанными в формулировке теоремы, исчерпываются все артиновы минимально полные кольца. □

В заключение автор выражает свою признательность Л. М. Мартынову за ценные советы и помощь в подготовке статьи и А. С. Кузьминой за консультацию по вопросам теории конечных колец. Автор также хотел бы поблагодарить рецензента за полезные замечания, которые способствовали улучшению текста.

References

[1] L. M. Martynov, *On concepts of completeness, reducibility, primarity, and purity for arbitrary algebras*, Universal algebra and its applications (Volgograd, September 6–11, 1999). Works of the International seminar, Volgograd, Peremena, 2000, 179–190 (in Russian).

[2] L. M. Martynov, *Completeness, reducibility, primarity and purity for algebras: results and problems*, Siberian Electr. Math. Reports, **13** (2016), 181–241 (in Russian). MR3506898

[3] A. I. Kornev, *On complete modules*, Abelian Groups and Modules, Tomsk, TGU, **15** (2000), 30–37 (in Russian).

[4] V. V. Ovchinnikov, *On minimally complete modules over commutative local rings*, Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk, OmGPU, **2** (2002), 54–56 (in Russian).

[5] T. Ju. Fink, *Embeddability and minimal completeness of finite semigroups*, Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk, OmGPU, **1** (2001), 20–25 (in Russian).

[6] O. V. Knyazev, T. Ju. Fink, *Minimal complete periodic semigroups with zero which the set of nilelements is not subsemigroup*, Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk, OmGPU, **8** (2009), 12–15 (in Russian).

[7] O. V. Knyazev, *On minimally complete commutative epigroups*, Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk, OmGPU, **10** (2011), 6–8 (in Russian).

[8] L. M. Martynov, T. V. Pavlova *On minimally complete associative rings*, Herald of Omsk University, **1** (2016), 6–13 (in Russian).

[9] T. A. Martynova, *Minimally complete unars*, Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk, OmGPU, **9** (2010), 36–39 (in Russian).

[10] I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, M.:Mir, 1972 (in Russian). Zbl 0256.16001

[11] R. Raghavendran, *Finite associative rings*, Compos. Math., **21** (1969), 195–229. MR0246905

[12] R. S. Wilson, *On the structure of finite rings*, Compozitio Math., **26** (1973), 79–93. Zbl 0248.16009

[13] R. S. Wilson, *On structure of finite rings.* II, Pasific J. Math., **51** (1974), 317–325. Zbl 0317.16009

[14] B. R. McDonald, *Finite rings with identity*, Pure Appl. Math., **28**, Marcel Dekker, New York, 1974. MR0354768

[15] G. Bini, F. Flamini, *Finite commutative rings and their applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2002. MR1919698

[16] V. L. Kurakin, A. S. Kuzmin, A. V. Mikhalev, A. A. Nechaev, *Linear recurring sequences over rings and modules*, Algebra. 2, J. Math. Sci., **76**:2 (1995), 2793—2915. MR1365809

[17] A. A. Nechaev, *Finite rings with applications*, Handb. Algebr., Elsevier/North-Holland, Amsterdam, **5** (2008), 213—320. MR2523453

[18] L. Fuchs, *Infinite Abelian groups*, **2**, M.: Mir, 1977 (in Russian). MR0457533

[19] T. V. Pavlova, *Complete associative Artin rings*, Herald of Omsk University, **1** (2005), 17–19 (in Russian).

[20] A. I. Kornev, *Complete radicals of some group rings*, Sibirsk. Mat. Zh., **48** (2007), 1065–1072; translation in Siberian Math. J., **48** (2007), 857–862. MR2364626

[21] T. V. Pavlova, *On reduced associative Artin rings*, Problemy i perspektivy fiz-mat. i tekhn. obrazovaniya, Ishim, Filial TyumGU v Ishime (2014), 40–46 (in Russian).

[22] T. V. Pavlova, *Complete radical of full ring of matrices over an arbitrary ring*, Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk, OmGPU, **10** (2011), 16–19 (in Russian).

[23] A. I. Kornev, T. V. Pavlova *Characterization of a radical of group rings over finite simple fields*, Sibirsk. Mat. Zh., **45** (2004), 613–623; transl. in Siberian Math. J. 45 (2004), 504-512. MR2078720

Tatiana Veniaminovna Pavlova
Tyumen State University,
Volodarskogo st., 6,
625003, Tyumen, Russian Federation
E-mail address: pavlova-t-v@bk.ru