S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1248–1264 (2017) УДК 519.21

DOI 10.17377/semi.2017.14.106 MSC 60J80

МОМЕНТЫ МНОГОМЕРНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ БЕЛЛМАНА–ХАРРИСА С РАЗЛИЧНОЙ СКОРОСТЬЮ УБЫВАНИЯ ХВОСТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ ЧАСТИЦ

В.А. ВАТУТИН, В.А. ТОПЧИЙ

Abstract. A multitype indecomposable, nonperiodic, critical Bellman-Harris branching process is considered. It is assumed that the types of the process may be splitted into two classes. A particle whose type belongs to the first class has a finite expected life-length, while the expected life-length of a particle whose type belongs to the second class is infinite.

Assuming that the tail of the life-length distribution of a particle with type from the second class is regularly varying at infinity with parameter depending on the type, we investigate the asymptotic behavior of the first and second moments for the number of particles of all types as well as the increments of the first moments. Our proofs are based on the asymptotic properties of some renewal matrices defined in terms of certain characteristics of the initial Bellman-Harris branching process.

Keywords: multitype critical Bellman-Harris branching process, limit theorems, regularly varying functions, asymptotics of moments.

Vatutin, V.A., Topchii, V.A., Moments of multitype critical Bellman–Harris processes in which tails of life-length distributions of particles have different orders.

Работа поддержана: ПФИ РАН № I.28П “Математические задачи современной теории управления”, проект № 0014-2016-0023 “Динамика популяций, описываемых ветвящимися процессами” (Ватутин В.А.) и ПФНИ СО РАН № I.1.3. “Асимптотические методы теории вероятностей и математической статистики и их приложения”, проект № 0314-2016-0009 “Развитие стохастических, аналитических и численных методов исследования математических моделей динамики популяций, биомедицинских процессов и механики вязких жидкостей” (Топчий В.А.).

Поступила 28 октября 2017 г., опубликована 30 ноября 2017 г.

1. Введение

В работе рассматривается ветвящийся процесс Беллмана–Харриса $\mathbf{Z}(t) = \big(Z_1(t), \ldots, Z_n(t)\big)$ с n типами частиц, где $Z_i(t)$ – число частиц типа $i \in \{1, 2, \ldots, n\} =: \mathcal{I}$ в процессе в момент $t \geq 0$. Неформальное описание такого процесса выглядит следующим образом. Процесс начинается в момент $t = 0$ с некоторой совокупности $\mathbf{Z}(0) = \big(Z_1(0), \ldots, Z_n(0)\big)$ частиц различных типов нулевого возраста. Частица типа i имеет случайную продолжительность жизни τ_i с функцией распределения $G_i(t)$, $G_i(0) = 0$, и в конце жизни производит (независимо от поведения других частиц) случайные количества ξ_{ij} потомков $j-$го типа с совместным распределением, задаваемым производящей функцией

$$f_i(\mathbf{s}) = f_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) := \mathbb{E}\Big[s_1^{\xi_{i1}} s_2^{\xi_{i2}} \cdot \ldots \cdot s_n^{\xi_{in}}\Big] =: \mathbb{E}\mathbf{s}^{\boldsymbol{\xi}_i},$$

где $\mathbf{s} := (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in [0, 1]^n$, $\boldsymbol{\xi}_i = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in})$. Новорожденные частицы эволюционируют в дальнейшем независимо друга и предыстории процесса со стохастическими свойствами, присущими их типам.

Важными характеристиками процесса Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц являются $n-$мерные векторы

$$\mathbf{G}(t) := \big(G_1(t), G_2(t), \ldots, G_n(t)\big), \ \mathbf{f}(\mathbf{s}) = \big(f_1(\mathbf{s}), f_2(\mathbf{s}), \ldots, f_n(\mathbf{s})\big)$$

(здесь и далее мы не указываем явно, являются ли эти векторы векторами-строками или векторами-столбцами: в каждом конкретном случае это будет ясно из контекста). С этими векторами мы свяжем величины

$$m_{ij} := \mathbb{E}\xi_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{s})}{\partial s_j}\bigg|_{\mathbf{s}=\mathbf{1}}, \ b^i_{jk} := \mathbb{E}\xi_{ij}(\xi_{ik} - \delta_{kj}) = \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{s})}{\partial s_j \partial s_k}\bigg|_{\mathbf{s}=\mathbf{1}}, \tag{1}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, и матрицы

$$\mathbf{M}(t) := \big(m_{ij} G_i(t)\big)_{i,j\in\mathcal{I}}, \ \mathbf{M} = \mathbf{M}(\infty) := \big(m_{ij}\big)_{i,j\in\mathcal{I}}.$$

Описанный выше процесс Беллмана–Харриса с n типами частиц называется критическим, если максимальное собственное значение матрицы $\mathbf{M}$ (ее перронов корень) равно 1. Описание свойств процессов Беллмана–Харриса органически связано с теорией восстановления (см. [1], [2]). Первые существенные шаги в исследовании критических процессов Беллмана–Харриса были сделаны в работе [3]. В ней было введено условие $o(t^{-2})$ на асимптотическое поведение хвостов распределений продолжительности жизни частиц, сохраняющее в условных предельных теоремах ягломовского типа аналогию с марковским случаем. Если это условие нарушено, то у критических процессов Беллмана–Харриса появляются качественно новые асимптотические свойства. Ряд таких свойств для критических процессов Беллмана–Харриса с правильно меняющимися тяжелыми хвостами распределений продолжительности жизни частиц изучен в статьях [4] и [5]. В этих работах основные свойства процессов описаны в терминах самого тяжелого хвоста среди распределений продолжительности жизни частиц.

Исследования свойств неразложимых критических процессов Беллмана–Харриса с двумя типами частиц, распределения продолжительностей жизни частиц в которых подчиняются условиям $\mathbb{P}(\tau_1 > t) = o(t^{-2})$ и $\mathbb{P}(\tau_2 > t) = t^{-\beta} l(t)$, где $-\beta \in [-1, 0)$, а функция $l(t)$ медленно меняется на бесконечности, были начаты в работах [6] и [7]. Оказалось, что, несмотря на неразложимость рассматриваемого процесса, вероятность наличия частиц первого типа в отдаленные моменты времени бесконечно мала по сравнению с вероятностью невырождения всего процесса. В этой ситуации при доказательстве условных предельных теорем ягломовского типа, описывающих невырожденное совместное распределение частиц двух типов, пришлось использовать условие $Z_1(t) > 0$, вероятность которого при $t \to \infty$ пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью события $Z_1(t)+Z_2(t) > 0$, использующегося в стандартных теоремах ягломовского типа в качестве условия. Заметим, что ряд частных результатов для подобных процессов, связанных с каталитическими случайными блужданиями по целочисленным решеткам, был установлен в [8]. Исследования ветвящихся процессов с двумя типами частиц и несоизмеримыми хвостами продолжительностей жизни частиц опирались на свойства функций (матриц) восстановления и их приращений первого и второго порядка, доказанные в [9] и [10]. В работе [11] были получены аналогичные результаты для матриц восстановления любой размерности. Разработанные в упомянутой статье методы позволяют начать исследования локальных свойств неразложимых критических процессов Беллмана–Харриса с любым числом несоизмеримых по порядку хвостов распределений продолжительности жизни частиц разных типов. Анализ этих локальных свойств и является основной целью данной работы.

2. Определения и узловые представления

В дальнейшем нам понадобится ряд обозначений, связанных с $n-$мерными векторами и матрицами.

Символы $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$ будут использоваться (в зависимости от контекста) одновременно как для $n-$мерных вектор-строк, так и для вектор-столбцов.

Пусть $1_{\{A\}}$ – индикатор множества A, т.е. функция, равная 1 на множестве A и 0 в противном случае, а $\mathbf{I} = \mathbf{I}_n := \left(\delta_{ij}\right)_{i,j\in\mathcal{I}}$ – $n-$мерная единичная матрица.

Всюду далее считаем, что матрица $\mathbf{M} = \left(m_{ij}\right)_{i,j\in\mathcal{I}}$ неразложима и непериодична, т.е. (см. следствие из [12, гл. 13, §1]) существует $m_0 \geq 1$ такое, что $\mathbf{M}^{m_0} > 0$.

Класс неразложимых и непериодических матриц с неотрицательными элементами, для которых перронов корень равен 1, обозначим $\mathcal{B}_1$. Будем предполагать, что $\mathbf{M} \in \mathcal{B}_1$. Согласно теореме Фробениуса [12, гл. 13, §2] это предположение влечет существование левого и правого собственных векторов $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ и $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ таких, что

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{u},\ \mathbf{v}\mathbf{M} = \mathbf{v},\ (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 1,\ \mathbf{u} > \mathbf{0},\ \mathbf{v} > \mathbf{0},\ (\mathbf{v}, \mathbf{1}) = 1. \tag{2}$$

Отметим, что для $\mathbf{M} \in \mathcal{B}_1$ верны соотношения $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}) = 0$ и $m_{ii} < 1$ при $i \in \mathcal{I}$. Последнее следует из леммы 2 книги [12, гл. 13, §2]. В самом деле, если в неразложимой матрице $\mathbf{M}$ с максимальным собственным числом 1 все элементы, исключая диагональные, заменить на 0, то максимальное собственное число уменьшится, но с другой стороны, оно будет равно $\max_{i\in\mathcal{I}} m_{ii}$. Подробное описание свойств матриц $\mathbf{M} \in \mathcal{B}_1$ приведено в [11].

Обозначим через $\mathcal{L}$ класс всех знакопостоянных функций, определенных на множестве $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \bigcup\{0\}$ и медленно меняющихся на бесконечности, и для $i \in \mathcal{I}$ положим $\mathfrak{q}_i(t) := 1 - G_i(t)$.

Разобьем множество $\mathcal{I}$ типов частиц на два класса: к первому из них мы отнесем типы с конечным математическим ожиданием времени жизни частиц, а ко второму – типы с бесконечным математическим ожиданием времени жизни частиц.

Точнее, будем считать, существует $0 \leq n_0 < n$ такое, что

1) $\mathbb{E}\tau_i < \infty$ при $i \in \mathcal{I}_0 := \{1, 2, \ldots, n_0\}$ ($\mathcal{I}_0 := \emptyset$ при $n_0 = 0$);

2) $\mathbb{E}\tau_i = \infty$ при $i \in \mathcal{I}_1 := \{n_0 + 1, \ldots, n\}$ и, кроме того,

$$1 - G_i(t) = \mathfrak{q}_i(t) = t^{-\beta_i}\ell_i(t),\ \beta_i \in (0, 1], \tag{3}$$

где $\ell_i(t) \in \mathcal{L}$;

3) для любого $s \in \mathcal{I}_1$ и всех $1 \leq i \leq s$ существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} \mathfrak{q}_i(t)/\mathfrak{q}_s(t) =: l_{i;s} \in [0, \infty), \tag{4}$$

что, в частности, приводит к соотношению $\mathfrak{q}_i(t) = O\big(\mathfrak{q}_s(t)\big)$.

Заметим, что условия 1) – 3) влекут неравенства $\beta_i \geq \beta_s$ для $n_0 + 1 \leq i \leq s \leq n$. Кроме того, если $i \in \mathcal{I}_0$ и $\beta_s < 1$, то соотношение (4) с $l_{i;s} = 0$ выполняется автоматически.

Для $j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq j_k$ обозначим

$$l_{j_1, j_2, \dots, j_s; j_k} := \sum_{i=1}^{s} l_{j_i; j_k},$$

а для $i \in \mathcal{I}$ положим

$$\mu_i(t) := \int_0^t \mathfrak{q}_i(w) \mathrm{d}w, \quad \mu_i := \mu_i(\infty) \leq \infty.$$

Напомним, что $\mu_i < \infty$ при $i \in \mathcal{I}_0$ и $\mu_j = \infty$ при $j \in \mathcal{I}_1$. Для удобства изложения будем считать, что $n_0 > 0$. В случае $\mathcal{I}_0 = \emptyset$ приводимые далее рассуждения будут выглядеть значительно проще.

Одним из важных условий, используемых нами ниже, является условие конечности вторых моментов (см. (1)) численности потомства частиц всех типов, которое будет удобно записать в интегральном виде

$$B := \frac{1}{2} \sum_{i,j,k \in \mathcal{I}} v_i b^i_{jk} u_j u_k < \infty. \tag{5}$$

Пусть $\boldsymbol{\delta}_i = (\delta_{1i}, \dots, \delta_{ni})$, $\mathbb{E}_i(\cdot) := \mathbb{E}\left[\cdot | \mathbf{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}_i\right]$ и $\mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | \mathbf{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}_i)$.

Для критических процессов Беллмана–Харриса опишем асимптотику моментов $\mathbb{E}_i Z_j(t) =: P_{ij}(t)$, $\mathbb{E}_i Z_j^2(t) =: P^{(2)}_{ij}(t)$ и приращений для $P_{ij}(t)$ при условиях, позволяющих применять теоремы 1 – 4 из работы [11].

Введем матрицы

$$\mathbf{G}_{\mathbf{I}}(t) = \big(G_i(t)\delta_{ij}\big)_{i,j \in \mathcal{I}}, \quad \mathbf{P}(t) := \big(P_{ij}(t)\big)_{i,j \in \mathcal{I}}, \quad \mathbf{P}^{(2)}(t) := \big(P^{(2)}_{ij}(t)\big)_{i,j \in \mathcal{I}},$$

и для $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in [0,1]^n$ определим производящие функции

$$F_i(t; \mathbf{s}) := \mathbb{E}_i s_1^{Z_1(t)} \cdot \ldots \cdot s_n^{Z_n(t)} := \mathbb{E}_i \mathbf{s}^{\mathbf{Z}(t)}, \ \mathbf{F}(t; \mathbf{s}) := \big(F_1(t; \mathbf{s}), \dots, F_n(t; \mathbf{s})\big).$$

Для векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ положим

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} := (x_1 y_1, \dots, x_n y_n).$$

Стандартные рассуждения, используемые, например, при доказательстве теоремы 1 §1 и теоремы 1 §2 монографии [1, гл. VIII], приводят к системе интегральных уравнений

$$\mathbf{F}(t; \mathbf{s}) = \mathbf{s} \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{G}(t)) + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{F}(t-w, \mathbf{s})) \otimes \mathrm{d}\mathbf{G}(w), \ t \geq 0. \tag{6}$$

Нам будет удобно считать, что $\mathbf{F}(t; \mathbf{s}) \equiv 0$ при $t < 0$.

Учитывая, что

$$P_{ij}(t) = \mathbb{E}_i Z_j(t) = \frac{\partial F_i(t, \mathbf{s})}{\partial s_j}\bigg|_{\mathbf{s}=\mathbf{1}}, \quad P^{(2)}_{ij}(t) = \mathbb{E}_i Z_j^2(t) = \frac{\partial^2 F_i(t, \mathbf{s})}{\partial s_j^2}\bigg|_{\mathbf{s}=\mathbf{1}} + P_{ij}(t),$$

после дифференцирования обеих частей уравнения (6) один или два раза по s_j при $\mathbf{s} = \mathbf{1}$ получаем

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{I}(t) - \mathbf{G}_{\mathbf{I}}(t) + \int_0^t \mathrm{d}\mathbf{M}(u) \mathbf{P}(t-u) \tag{7}$$

и

$$\mathbf{P}^{(2)}(t) = \mathbf{I}(t) - \mathbf{G}_{\mathbf{I}}(t) + \mathbf{T}(t) + \int_0^t \mathrm{d}\mathbf{M}(u) \mathbf{P}^{(2)}(t-u), \tag{8}$$

где $\mathbf{I}(t) = 1_{\{t\geq 0\}}\mathbf{I}$, а $\mathbf{T}(t) := \big(T_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^{n}$ — матрица с элементами

$$T_{ij}(t) := \sum_{l,m=1}^{n} b_{lm}^{i} \int_0^t P_{lj}(t-u)P_{mj}(t-u)\mathrm{d}G_i(u). \tag{9}$$

Равенства (7) и (8) являются многомерными уравнениями восстановления и их решения можно выразить с помощью матрицы восстановления $\mathbf{U}(t)$, определенной далее в (19) (см. так же [1, §9, гл.VIII]),

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{U} * (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{\mathbf{I}}(\cdot))(t), \tag{10}$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(t) = \mathbf{P}(t) + \mathbf{U} * \mathbf{T}(t). \tag{11}$$

Как будет ясно из последующего изложения, асимптотика функций $P_{ij}(t)$ слабо зависит от типа начальной частицы, но может качественно отличаться при разных j.

Приведем узловые определения и допущения и сформулируем основные результаты данной статьи, а затем докажем их, существенно обобщая методы работ [6] и [10], в которых исследовался случай $\mathcal{I}_0 = \{1\}$ и $\mathcal{I}_1 = \{2\}$.

Условимся считать в дальнейшем (если не оговорено иное), что в соотношениях типа $a(t) = O(b(t))$ или $a(t) = o(b(t))$, $a(t) \sim b(t)$ или $\lim a(t) = a$ параметр $t \to \infty$.

Так как $\mu_i = \infty$ для $i \in \mathcal{I}_1$, то условие (3) влечет

$$\mu_i(t) = \begin{cases} (1-\beta_i)^{-1} t^{1-\beta_i} \ell_i(t)(1+o(1)), & \text{при} \quad \beta_i \in (0,1), \\ \ell_{1i}(t), & \text{при} \quad \beta_i = 1, \end{cases} \tag{12}$$

где $\ell_{1i}(t) \in \mathcal{L}$, $\ell_{1i}(t) := \int_0^t \ell_i(u)u^{-1}\mathrm{d}u \to \infty$ и $\ell_i(t) = o\big(\ell_{1i}(t)\big)$, если $t \to \infty$ (см., например, лемму и теорему 1 из [13, гл. VIII, §9], соответственно).

В работе [11] были даны определения ряда классов распределений для матриц восстановления специального вида в терминах правильного изменения самых тяжелых хвостов среди распределений $G_i(t)$, $i \in \mathcal{I}$. Для описания тонких свойств ветвящихся процессов кроме правильного изменения самых тяжелых хвостов необходимо требовать и правильное изменение более легких хвостов у распределений, имеющих бесконечное среднее.

В работе [11] при исследовании свойств матриц восстановления использовался подход, опирающийся на свойства зарядов. В данной статье, в отличие от [11], техника работы с зарядами в явном виде не используется, однако при ссылках на [11] мы этот термин будем иногда упоминать. При этом в контексте настоящей работы зарядом мы называем линейную комбинацию двух функций распределения с непересекающимися носителями.

Для унифицирования приведенных далее определений, ориентированных на $G_i(t)$, выделим некоторую функцию распределения $G_0(t)$ с бесконечным средним и с хвостом $q(t)$ вида

$$1 - G_0(t) = q(t) := t^{-\beta}\ell(t), \tag{13}$$

где $\ell(t) \in \mathcal{L}$ и $\beta \in (0,1]$. Для хвостов других функций распределения вместо символа $q(\cdot)$ будет использоваться символ $\mathfrak{q}(\cdot)$, возможно, с индексами.

Следующие далее определения мы будем применять для $q(t) = \mathfrak{q}_i(t)$ с $i \in \mathcal{I}_1$.

Определение 1. *Множество функций распределения $G(t) = 1 - \mathfrak{q}(t)$ на $\mathbb{R}^+$ с конечным первым моментом обозначим через $\mathcal{G}_0^-$. Скажем, что функция $G(t)$ из множества $\mathcal{G}_0^-$ принадлежит множеству $\mathcal{G}_{0,q}$, если для функции $q(t)$ из* (13) *и некоторой постоянной $\Delta > 0$ выполнено условие*

$$G(t+\Delta) - G(t) = o\big(q(t)t^{-2}\big). \tag{14}$$

Отметим, что, из справедливости соотношения (14) (как и из приведенного ниже условия (18)) при некотором $\Delta > 0$ следует его выполнение и при всех $\Delta > 0$.

Определение 2. *Скажем, что функция распределения $G(t)$ на $\mathbb{R}^+$ принадлежит классу $\mathcal{G}_{1,q}$, если*

$$1 - G(t) = \mathfrak{q}(t) = \big(c + o(1)\big)q(t) \tag{15}$$

для некоторого $c \in [0, \infty)$.

Скажем, что функция распределения $G(t)$ принадлежит классу $\mathcal{G}_{1,q}^+$, если $G(t) \in \mathcal{G}_{1,q}$ и в случае выполнения условия (13) *с $\beta \in (0, 0.5]$ найдутся постоянные C и T_0 такие, что при $t \geq T_0$ и любом фиксированном $\Delta > 0$*

$$G(t + \Delta) - G(t) \leq C\Delta t^{-\beta-1}\ell(t) = C\Delta q(t)t^{-1}. \tag{16}$$

Отметим, что классы $\mathcal{G}_{1,q}$ и $\mathcal{G}_{1,q}^+$ включают в себя как распределения с бесконечным средним, удовлетворяющие условиям (15) и (или) (16), так и все распределения из $\mathcal{G}_0^- \subseteq \mathcal{G}_{1,q}$ для любых $q(t)$ из (13) в случае $\beta \in (0, 1)$. Если же $\beta = 1$, то для сохранения асимптотики хвоста распределения из $\mathcal{G}_{1,\mathfrak{q}}$ и $\mathcal{I}_1$ при свертке с распределением из $\mathcal{I}_0$ будем требовать для последнего одновременного включения в $\mathcal{G}_0^-$ и в $\mathcal{G}_{1,\mathfrak{q}}$.

Определение 3. *Скажем, что функция распределение $G(t)$ из множества $\mathcal{G}_{1,q}$ принадлежит классу $\mathcal{G}_{2,q}$, если она имеет абсолютно непрерывную плотность $g(t)$ и, кроме того, для функции $q(t)$ из условия* (13) *подчиняется ограничениям:*

1) *в случае $\beta \in (0, 0.5]$ существуют постоянные C и T_0 такие, что*

$$\big|g(t)\big| \leq Ct^{-\beta-1}\ell(t) = Cq(t)t^{-1}$$

при всех $t \geq T_0$;

2) *в случае $\beta \in (0.5, 1]$ функция $|g'(t)|$ интегрируема и равномерно ограничена, причем*

$$g'(t) = -\big(c + o(1)\big)(\beta + 1)\beta t^{-\beta-2}\ell(t) = -\big(c + o(1)\big)(\beta + 1)\beta q(t)t^{-2}.$$

Зафиксируем $\gamma \in (0, 1]$ и при помощи функции $G_0(t) \in \mathcal{G}_{2,q}$ из (13) введем монотонную функцию $\mathcal{N}_\gamma(t)$, обладающую свойствами

$$\mathcal{N}_\gamma^{-(\beta+2)\gamma^{-1}}(t)\ell\Big(\mathcal{N}_\gamma^{\gamma^{-1}}(t)\Big) \sim t^{-\beta}\ell(t) \text{ и } \mathcal{N}_\gamma(t) = t^{\frac{\beta\gamma}{\beta+2}}\ell_{\mathcal{N}_\gamma}(t), \tag{17}$$

где $\ell_{\mathcal{N}_\gamma}(t) \in \mathcal{L}$. Существование такой функции, а также ее асимптотическая единственность были обоснованы в работе [11] (абзац, предшествующий определению 4, содержащий соотношения (16) и (17)).

Определение 4. *Пусть $q(t)$ — хвост функции распределения $G_0(t) \in \mathcal{G}_{2,q}$ из* (13), *а функция $\mathcal{N}_\gamma(t)$ определена соотношениями* (17). *Скажем, что функция распределения $G(t)$ из множества $\mathcal{G}_{0,q}$ принадлежит множеству $\mathcal{G}_{0,q}^+$, если она удовлетворяет условиям:*

1) *в случае $\beta \in (0, 0.5]$ существуют постоянные $c^* > 0$, $T > 0$ и $\gamma \in (0, 1]$ такие, что*

$$G(t) - G(t - y\mathcal{N}_\gamma(t)) \leq c^* y t^{-\beta-3}\ell(t)$$

при всех $y \in \big[1, 10t^{\beta\gamma}\big]$, $t \geq T$;

2) *в случае $\beta \in (0.5, 1)$ существует постоянная $\gamma \in \big(0, \min\{1, (1 - \beta)(\beta + 2)/\beta\}\big]$ такая, что*

$$G(t) - G(t - y\mathcal{N}_\gamma(t)) = o\big(yt^{-\beta-3}\ell(t)\big)$$

при всех $y \in \big[1, 10t^{\beta\gamma}\big]$;

3) *в случае $\beta = 1$ найдется $\Delta > 0$ такое, что*

$$G(t + \Delta) - G(t) = o\big(t^{-4}\ell(t)\big). \tag{18}$$

Замечание. Очевидно, что для включения распределения в $\mathcal{G}_{0,q}^+$ необходимо выполнения условия: найдется такое $\Delta > 0$, что при всех $\beta \in (0, 1]$

$$G(t + \Delta) - G(t) = q(t)t^{-3}\big(O(1)1_{\{\beta\in(0,0.5]\}} + o(1)1_{\{\beta\in(0.5,1]\}}\big).$$

Определение 5. *Скажем, что функция распределения $G(t)$ из множества $\mathcal{G}_{2,q}$ принадлежит множеству $\mathcal{G}_{3,q}$, если она имеет абсолютно непрерывную плотность $g(t)$ и, кроме того, для функции $q(t)$ из условия (13) подчиняется следующим ограничениям:*

1) *в случае $\beta \in (0, 0.5]$ верна оценка*

$$\left|g'(t)\right| \leq C(t+1)^{-\beta-2}\ell(t);$$

2) *в случае $\beta \in (0.5, 1]$ функция $g'(t)$ абсолютно непрерывна, $|g''(t)|$ интегрируема и равномерно ограничена и верно представление*

$$g''(u) = \big(c + o(1)\big)(\beta+2)(\beta+1)\beta t^{-\beta-3}\ell(t);$$

3) *в случае $\beta = 1$ в дополнение к ограничениям предшествующего пункта справедливы соотношения $\ell_*(t) := |\ell'(t)|t \in \mathcal{L}$,*

$$\ell_G(t) = \big(c + o(1)\big)\ell(t), \quad \ell_{G,*}(t) = \big(c + o(1)\big)|\ell'(t)t = \big(c + o(1)\big)\ell_*(t),$$

где $\ell_G(t) := t(1 - G(t))$, а $\ell_{G,*}(t) := |\ell'_G(t)|t$, и

$$\ell'_*(t)t = o\big(\ell_*(t)\big),\ \ell'_{G,*}(t)t = o\big(\ell_*(t)\big).$$

При исследовании свойств моментов процессов Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц мы будем иметь дело с многомерными уравнениями восстановления. В связи с этим напомним, что свертка $\mathbf{C}(t) = \mathbf{A} * \mathbf{B}(t) = \big(C_{ij}(t)\big)_{i,j\in\mathcal{I}}$ матриц $\mathbf{A}(t) = \big(A_{ij}(t)\big)_{i,j\in\mathcal{I}}$ и $\mathbf{B}(t) = \big(B_{ij}(t)\big)_{i,j\in\mathcal{I}}$ определяется соотношениями

$$C_{ij}(t) := \sum_{k\in\mathcal{I}} A_{ik} * B_{kj}(t).$$

Аналогично определяется свертка не обязательно квадратных матриц.

Обозначим $\mathbf{M}^{*0}(t) := \mathbf{I}(t)$ и введем матрицу восстановления для матрицы $\mathbf{M}(t)$ при помощи равенства

$$\mathbf{U}(t) = \big(U_{ij}(t)\big)_{i,j\in\mathcal{I}} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}^{*k}(t). \tag{19}$$

При этом считаем, что все матрицы из (19) нулевые при $t < 0$. Очевидно, что при $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{I}(t) + \mathbf{M} * \mathbf{U}(t).$$

Анализ свойств этого многомерного уравнения восстановления существенно облегчается при использовании преобразования Лапласа

$$\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{M}}(\lambda) = \big(\delta_{ij} - m_{ij}\widehat{G}_i(\lambda)\big)_{i,j\in\mathcal{I}}$$

матрицы $\mathbf{I}(t) - \mathbf{M}(t)$, где $\widehat{G}_i(\lambda)$ — преобразование Лапласа распределения $G_i(t)$. В этих обозначениях преобразование Лапласа матрицы восстановления $\mathbf{U}(t)$ имеет вид (см. [11, (31)])

$$\widehat{\mathbf{U}}(\lambda) = \big(\widehat{U}_{ij}(\lambda)\big)_{i,j=1}^{n} = \big(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{M}}(\lambda)\big)^{-1} = \left(\frac{\big(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{M}}(\lambda)\big)^{(i)}_{(j)}}{\det\big(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{M}}(\lambda)\big)}\right)_{i,j=1}^{n}, \tag{20}$$

где в последнем равенстве записана стандартная формула обращения матрицы, в которой $\big(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{M}}(\lambda)\big)^{(i)}_{(j)}$ является алгебраическим дополнением к элементу матрицы $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{M}}(\lambda)$, стоящему на пересечении j-й строки и i-го столбца. Очевидно, что функция $\big(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{M}}(\lambda)\big)^{(i)}_{(j)}$ является линейной комбинацией различных произведений функций $\widehat{G}_k(\lambda)$, $k \in \mathcal{I}$.

Теперь нам необходимо более детально остановиться на некоторых результатах статьи [11]. Прежде всего отметим, что как показано в [11], прообразом преобразования Лапласа $\big(\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{M}}(\lambda)\big)^{(i)}_{(j)}$ (алгебраического дополнения), равного умноженному на $(-1)^{i+j}$ определителю матрицы $\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{M}}(\lambda)$, из которой удалены j−я строка и i−й столбец, является функция $\delta_{ji}1_{\{t\ge 0\}}+(-1)^{\delta_{ji}}\mathcal{M}_{ji}(t)$, где $\mathcal{M}_{ji}(t)$ — заряд, явный вид которого при всех $i,j\in\mathcal{I}$ указан в соотношениях [11, (45) и (46)]. Предел $\mathcal{M}_{ji}$ значения такого заряда на бесконечности удовлетворяет условиям (см. соотношения [11, (39) и (40)])

$$1-\mathcal{M}_{ii}>0 \text{ и } \mathcal{M}_{ji}=(1-\mathcal{M}_{jj})u_iu_j^{-1}>0 \text{ при } j\neq i.$$

Из предыдущих рассуждений очевидно, что заряд $\mathcal{M}_{ji}(t)$ является линейной комбинацией функций $G_k(t)$, $k\in\mathcal{I}$, и их различных сверток. Обозначим $\mathcal{M}^d_{ji}(t)$ ту часть заряда $\mathcal{M}_{ji}(t)$, которая является суммой распределений или их сверток с индексами только из $\mathcal{I}_0$, и положим

$$\mathbf{M}^d_0(t):=\big(m_{ij}1_{\{i\in\mathcal{I}_0\}}G_i(t)\big)_{i,j\in\mathcal{I}} \quad\text{и}\quad \widehat{\mathbf{M}^d_0}(\lambda):=\big(m_{ij}1_{\{i\in\mathcal{I}_0\}}\widehat{G}_i(\lambda)\big)_{i,j\in\mathcal{I}}.$$

Вычислим (по тем же правилам, что и ранее, но уже для матрицы $\widehat{\mathbf{M}^d_0}(\lambda)$ вместо $\widehat{\mathbf{M}}(\lambda)$) функции (заряды) $\mathcal{M}^d_{ji}(t)$ и их пределы $\mathcal{M}^d_{ji}$ при $t\to\infty$. Пусть, далее,

$$\mathbf{M}^d(t):=\big(m_{ij}1_{\{i,j\in\mathcal{I}_0\}}G_i(t)\big)_{i,j\in\mathcal{I}} \quad\text{и}\quad \widehat{\mathbf{M}^d}(\lambda):=\big(m_{ij}1_{\{i,j\in\mathcal{I}_0\}}\widehat{G}_i(\lambda)\big)_{i,j\in\mathcal{I}}.$$

Легко проверить, что

$$\big(\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{M}^d}(\lambda)\big)^{(i)}_{(j)}=\big(\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{M}^d_0}(\lambda)\big)^{(i)}_{(j)}$$

и

$$\det\big(\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{M}^d}(\lambda)\big)=\det\big(\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{M}^d_0}(\lambda)\big).$$

Первое из этих соотношений показывает, что прообразы (заряды) рассматриваемых функций совпадают, поскольку при $i,j\in\mathcal{I}_1$ преобразования Лапласа $\big(\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{M}^d_0}(\lambda)\big)^{(i)}_{(j)}$ не зависят от i при $i=j$ и тождественно равны нулю при $i\neq j$, в частности, верны соотношения: $\mathcal{M}^d_{ii}=\mathcal{M}^d_{nn}$, если $i\in\mathcal{I}_1$, и $\mathcal{M}^d_{ji}=0$, если хотя бы один из индексов лежит в $\mathcal{I}_1$ и $i\neq j$. А второе, в сочетании с первым и равенством (20), позволяет утверждать, что матрицы восстановления, порождаемые матрицами $\mathbf{M}^d(t)$ и $\mathbf{M}^d_0(t)$, совпадают.

Решение $\mathbf{U}^d_0(t)$ матричного уравнения восстановления

$$\mathbf{U}^d_0(t)=\mathbf{I}(t)+\mathbf{M}^d*\mathbf{U}^d_0(t)=\mathbf{I}(t)+\mathbf{M}^d_0*\mathbf{U}^d_0(t), \tag{21}$$

или (в терминах преобразований Лапласа)

$$\widehat{\mathbf{U}^d_0}(\lambda)=\big(\widehat{U^d_{0ij}}(\lambda)\big)_{i,j\in\mathcal{I}}=\big(\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{M}^d_0}(\lambda)\big)^{-1},$$

связано с матрицей $\mathbf{U}^d(t)=\big(U^d_{ij}(t)\big)_{i,j\in\mathcal{I}}$, определенной в [11] формулами (27), (131) и (132), следующими соотношениями:

$$U^d_{ij}(t)=U^d_{0ij}(t),\quad U^d_{0ii}(t)=U^d_{ii}(t)+1_{i\in\mathcal{I}_1}1_{\{t\ge 0\}}, \tag{22}$$

где $i\neq j$ и $i,j\in\mathcal{I}$, т.е. только диагональные элементы с номерами из $\mathcal{I}_1$ отличаются на единичный атом в нуле.

Напомним еще одну постоянную, приведенную в формуле (114) из [11],

$$\mathfrak{m}:=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j_1<\ldots<j_k,\\(i_1,\ldots,i_k)\in\mathbb{M}_{j_1,\ldots,j_k}}}(-1)^{k+1+N_{j_1,\ldots,j_k}(i_1,\ldots,i_k)}m_{j_1i_1}\cdot\ldots\cdot m_{j_ki_k}l_{j_1,\ldots,j_k;n},$$

где $\mathbb{M}_{j_1,\ldots,j_k}$ — множество всевозможных перестановок $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ из выбранных натуральных чисел, а $N_{j_1,j_2,\ldots,j_k}(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ — число инверсий в записанной в качестве аргумента перестановке (см. [14, гл. I, §2, п.2] или комментарий перед формулой

(43) в статье [11]). Данная постоянная является коэффициентом пропорциональности для хвоста у прообраза преобразования Лапласа $1-\det\big(\mathbf{I}-\widehat{\mathbf{M}}(\lambda)\big)$ и $\mathfrak{q}_n(t)$ (см. [11, (44)]).

Соотношения (39), (40) и (42) из [11] определяют матрицу $\mathbf{D}=(D_{ij})_{i,j=1}^n$ с положительными элементами

$$D_{ij}:=\mathfrak{m}^{-1}(1-\mathcal{M}_{jj})u_iu_j^{-1}=\begin{cases}\mathfrak{m}^{-1}\mathcal{M}_{ji} & \text{при}\quad i\neq j,\\ \mathfrak{m}^{-1}(1-\mathcal{M}_{ii}) & \text{при}\quad i=j,\end{cases}\tag{23}$$

где u_i задаются соотношением (2).

3. Основные результаты

Вернемся теперь к анализу асимптотических свойств моментов критических ветвящихся процессов с n типами частиц.

Пусть $\Gamma(a)$ и

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\int_0^1(1-u)^{a-1}u^{b-1}\mathrm{d}u$$

— стандартные Гамма и Бета функции Эйлера (см. [13, гл. II, §2]). Положим $\Gamma_0=\Gamma_1=1$ и для $\beta\in(0,1)$

$$\Gamma_\beta:=(\beta\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta))^{-1}=(1-\beta)^{-1}\beta^{-1}\pi^{-1}\sin\pi\beta.$$

Математические ожидания числа частиц различных типов в критических процессах Беллмана–Харриса удовлетворяют многомерным уравнениям восстановления (7), и для описания их асимптотики достаточно, в условиях теоремы 1 из [11], правильного изменения хвостов $\mathfrak{q}_i(t)$ при $i\in\mathcal{I}_1$. Ниже, для единообразия записи асимптотических представлений в случае $i\in\mathcal{I}_0$, мы условимся, как и в [11], вместо формального соотношения $\mu_i(t)\sim\mu_i<\infty$ писать просто μ_i и считать, что в такой ситуации $\beta_i=1$.

Теорема 1. *Пусть матрица $\mathbf{M}\in\mathcal{B}_1$, а совокупный носитель набора распределений $G_i(t)$, $i\in\mathcal{I}$, не сосредоточен ни на какой решетке, содержащей* 0. *Если выполнено условие* (4), *$G_i(t)\in\mathcal{G}^+_{1,\mathfrak{q}_n}$ при всех $i\in\mathcal{I}$, и кроме того, $G_i(t)\in\mathcal{G}_0^-\bigcap\mathcal{G}_{1,\mathfrak{q}_n}$ при $i\in\mathcal{I}_0$ и $G_i(t)\in\mathcal{G}_{1,\mathfrak{q}_i}$ при $i\in\mathcal{I}_1$, то*

$$\mathbf{P}(t)\sim\mathbf{D}\mathfrak{D}(t),\tag{24}$$

где матрица $\mathfrak{D}(t)$ диагональна с элементами

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}_{jj}(t)\quad &:=\quad\frac{\Gamma(2-\beta_j)\mu_j(t)\mu_n^{-1}(t)1_{\{\mu_n(t)>1\}}}{\Gamma(2-\beta_n)\Gamma(1-\beta_j+\beta_n)}\sim\frac{\Gamma(1-\beta_j)}{\Gamma(1-\beta_n)\Gamma(1-\beta_j+\beta_n)}\times\\ &\times\begin{cases}\mu_jt^{\beta_n-1}\ell_n^{-1}(t) & \textit{при } \beta_n\neq1,\ j\in\mathcal{I}_0,\\ \mu_j\ell_{1n}^{-1}(t) & \textit{при } \beta_n=1,\ j\in\mathcal{I}_0,\\ t^{\beta_n-\beta_j}\ell_n^{-1}(t)\ell_j(t) & \textit{при } \beta_n,\beta_j\neq1,\ j\in\mathcal{I}_1,\\ t^{\beta_n-1}\ell_n^{-1}(t)\ell_{1j}(t) & \textit{при } \beta_n<\beta_j=1,\ j\in\mathcal{I}_1,\\ \ell_{1n}^{-1}(t)\ell_{1j}(t) & \textit{при } \beta_n=\beta_j=1,\ j\in\mathcal{I}_1.\end{cases}\end{aligned}\tag{25}$$

Положим $\mathbf{U}^c(t):=\mathbf{U}(t)-\mathbf{U}^d(t)$, где матрица $\mathbf{U}^d(t)$ определена соотношениями (21) и (22), и запишем матрицу $\mathbf{P}(t)$ как сумму $\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}^d(t)+\mathbf{P}^c(t)$, где

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^d(t)=\big(P^d_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^n:=\mathbf{U}^d*\big(\mathbf{I}-\mathbf{G}_\mathbf{I}(\cdot)\big)(t),\\ \mathbf{P}^c(t)=\big(P^c_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^n:=\mathbf{U}^c*\big(\mathbf{I}-\mathbf{G}_\mathbf{I}(\cdot)\big)(t).\end{aligned}\tag{26}$$

Наша цель – изучить (при ряде дополнительных ограничений) асимптотические свойства приращений введенных функций.

Поскольку функции $\mathcal{M}_{nn}(t)$ и $\mathcal{M}^d_{nn}(t)$ являются линейными комбинациями некоторых распределений, то они являются функциями ограниченной вариации и, следовательно, представимы в виде разности двух монотонных функций с непересекающимися носителями. В статье [11] показано, что, если все $G_i(t)$ для $i\in\mathcal{I}_0$ принадлежат одному из классов $\mathcal{G}_0^-$, или $\mathcal{G}_{0,\mathfrak{q}_n}$, или $\mathcal{G}^+_{0,\mathfrak{q}_n}$, или $\mathcal{G}_{1,\mathfrak{q}_n}$, то функцию $\mathcal{M}^d_{nn}(t)$ можно представить в виде

$$\mathcal{M}^d_{nn}(t) = a_{n1}G_{n1}(t) - a_{n2}G_{n2}(t), \tag{27}$$

где $a_{n1}, a_{n2} \in [0,\infty)$, а распределения $G_{n1}(t)$ и $G_{n2}(t)$ принадлежат тому же классу, что и исходные функции, и имеют непересекающиеся носители. В цитируемой работе совокупность функций (зарядов), являющихся линейной комбинацией двух распределений, принадлежащих любому из определенных здесь классов $\mathcal{G}^*$ с непересекающиеся носителями обозначается $\overline{\mathcal{G}}^*$, т.е. так же, как и класс для распределений из разложения, но с чертой сверху.

Приведем теорему 4 из [11] в удобных для данной работы терминах.

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{M} \in \mathcal{B}_1$ и задана невозрастающая последовательность постоянных $\beta_i \in (0,1]$ и распределений $G_i(t) = 1 - \mathfrak{q}_i(t)$ таких, что $G_i(t) \in \mathcal{G}_{3,\mathfrak{q}_n}$ при $i \in \mathcal{I}_1$ и $G_i(t) \in \mathcal{G}^+_{0,\mathfrak{q}_n}$ при $i \in \mathcal{I}_0$, а для $\mathcal{M}^d_{nn}(t)$ из представления* (27) *выполняется неравенство $a_{n1} + a_{n2} =: a_{n0} < 1$.*

Тогда матрица восстановления и ее плотность $\mathbf{u}^c(t)$ абсолютно непрерывны при $t > 0$, причем

$$\big(\mathbf{u}^c(t)\big)' \sim \beta_n\Gamma_{\beta_n}\big(\mu_n^{-1}(t)\big)'\mathbf{D} \sim \begin{cases} -\dfrac{\beta_n(1-\beta_n)^2\Gamma_{\beta_n}}{t^{2-\beta_n}\ell_n(t)}\mathbf{D} & \text{при } \beta_n \in [0,1), \\ -t^{-1}\ell_n(t)\ell_{1n}^{-2}(t)\mathbf{D} & \text{при } \beta_n = 1. \end{cases} \tag{28}$$

Более того, для всех $i, j \in \mathcal{I}$

$$U^d_{ij}(t) \in \overline{\mathcal{G}}^+_{0,\mathfrak{q}_n}.$$

Напомним, что по определению (подробнее см. [11]) компоненты матрицы $\mathbf{U}^c(t)$ и их производные абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}^+$, причем в нуле атомы имеются только у диагональных элементов с номерами из множества $\mathcal{I}_1$. По определению функции $P_{ij}(t)$ имеют единичный атом в нуле при $i = j$, в то время как при $i \neq j$ атомов в нуле нет. Для удобства в представлении $P_{ii}(t) = P^d_{ii}(t) + P^c_{ii}(t)$ мы будем относить соответствующие единичные атомы к заряду $P^d_{ii}(t)$ при $i \in \mathcal{I}_0$ и к заряду $P^c_{ii}(t)$ при $i \in \mathcal{I}_1$.

Опираясь на теорему 2, мы докажем следующее утверждение, являющееся основным результатом данной работы. Напомним, что мы условились считать, что $\mu_j(t) \equiv \mu_j$ и $\beta_j = 1$ для $j \in \mathcal{I}_0$.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 2, то*

1) *при любых $i, j \in \mathcal{I}$ верны соотношения*

$$P^d_{ij}(t) \in \overline{\mathcal{G}}^+_{0,\mathfrak{q}_n} \subseteq \overline{\mathcal{G}}_{0,\mathfrak{q}_n},\ \ P^d_{ij}(t) = \big(O(1)1_{\{\beta\in(0,0.5]\}} + o(1)1_{\{\beta\in(0.5,1]\}}\big)\mathfrak{q}_n(t)t^{-2}, \tag{29}$$

причем $P^d_{ij}(t) \equiv 0$, если либо $i \in \mathcal{I}_1$, либо $j \in \mathcal{I}_1$;

2) *компоненты $P^c_{ij}(t)$ абсолютно непрерывны при $t > 0$;*

3) *если $\ell'_j(t) = o(\ell_j(t)/t)$ для всех $j \in \mathcal{I}_1$ и, кроме того, $\ell_{*j}(t) := \ell'_j(t)t \in \mathcal{L}$ в случае $\beta_j = 1$, то*

$$\big(\mathbf{P}^c(t)\big)' \sim \mathbf{D}\mathfrak{D}'_0(t), \tag{30}$$

где матрица $\mathfrak{D}'_0(t)$ диагональная с элементами

$$\mathfrak{d}'_{0j}(t) = \frac{\Gamma(2-\beta_j)\big(\mu_j(t)\mu_n^{-1}(t)\big)'}{\Gamma(2-\beta_n)\Gamma(1-\beta_j+\beta_n)} + \delta_{jn}(t), \tag{31}$$

а $\delta_{jn}(t) = o\big(\mu_j(t)\big(\mu_n^{-1}(t)\big)'\big) + o\big(\mathfrak{q}_j(t)\mu_n^{-1}(t)\big)$. Асимптотические представления для производной $\big(\mu_j(t)\mu_n^{-1}(t)\big)'$ приведены далее в соотношениях (50) *и* (51).

Опишем асимптотику вторых моментов для численности частиц различных типов. Интегралы

$$\int_0^\infty \mu_n^{-2}(t)\mu_j^2(t)\mathrm{d}t \text{ и } \int_0^\infty \mathfrak{d}_j^2(t)\mathrm{d}t \tag{32}$$

могут сходиться (одновременно) только при $\gamma_j := 2\beta_n - 2\beta_j \le -1$, что возможно лишь для $\beta_n \in (0, 0.5]$. Совокупность индексов j, для которых интегралы из (32) сходятся, обозначим $\mathcal{I}_2$.

Для $j \in \mathcal{I}_2$ и $l, m, i \in \mathcal{I}$ введем параметры

$$D_{lm}^{ij} := \int_0^\infty \int_0^t P_{lj}(t-u)P_{mj}(t-u)\mathrm{d}G_i(u)\mathrm{d}t, \ S_{ij}^* := \sum_{l,m=1}^n b_{lm}^i D_{lm}^{ij}, \tag{33}$$

которые, как будет доказано далее, являются конечными постоянными, а для $j \in \mathcal{I}\backslash\mathcal{I}_2$ и $l, m, i \in \mathcal{I}$ положим (см. (23))

$$S_{ij} := \sum_{l,m=1}^n b_{lm}^i D_{lj} D_{mj}. \tag{34}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1, $b_{lm}^i < \infty$ при всех $i, l, m \in \mathcal{I}$ и, кроме того, в случае $j \in \mathcal{I}_1$ и $\beta_j > 0.5$ для любого фиксированного $\Delta > 0$ справедлива оценка*

$$G_j(t+\Delta) - G_j(t) = o\big(t^{-1}\big). \tag{35}$$

Тогда для всех $i, j \in \mathcal{I}$ справедливы соотношения

$$P_{ij}^{(2)}(t) \sim \begin{cases} \mathbb{S}_{ij}\mu_n^{-1}(t)t\mathfrak{d}_j^2(t) & \text{при} \quad j \in \mathcal{I}\setminus\mathcal{I}_2, \ \gamma_j > -1, \\ \mathbb{S}_{ij}^1\mu_n^{-1}(t)\displaystyle\int_0^t \mathfrak{d}_j^2(u)\mathrm{d}u & \text{при} \quad j \in \mathcal{I}\setminus\mathcal{I}_2, \ \gamma_j = -1, \\ \mathbb{S}_{ij}^*\mu_n^{-1}(t) + D_{ij}\mathfrak{d}_{jj}(t) & \text{при} \quad j \in \mathcal{I}_2, \end{cases} \tag{36}$$

где

$$\mathbb{S}_{ij} = \beta_n\Gamma_{\beta_n}\sum_{s=1}^n D_{is}S_{sj}B(1+\gamma_j, \beta_n), \ \mathbb{S}_{ij}^1 = \beta_n\Gamma_{\beta_n}\sum_{s=1}^n D_{is}S_{sj}, \ \mathbb{S}_{ij}^* = \beta_n\Gamma_{\beta_n}\sum_{s=1}^n D_{is}S_{sj}^*.$$

Замечание. Предложенные методы доказательства позволяют получить асимптотику $\mathbb{E}_i Z_j^k(t)$ для $k > 2$ при почти неизменных условиях из теоремы 1 на продолжительности жизни частиц разных типов и условии конечности моментов того же порядка k для численностей потомства одной частицы.

4. Доказательство основных результатов

Для распределения $G(t)$ неотрицательной случайной величины и постоянной $a \in (0, 1]$ положим

$$U_{aG}(t) := \sum_{k=0}^\infty a^k G^{*k}(t), \ t \ge 0.$$

В частности, функция $U_G(t) := U_{1G}(t)$ будет функцией восстановления для распределения $G(t)$. Понятие функцией восстановления может быть введено (такой же формулой) и для зарядов $F(t)$, преобразование $1 - \widehat{F}(\lambda)$ которых сохраняет знак на полуоси $\lambda \ge 0$ (см. [11]). При этом функция $U_F(t)$ может быть как ограниченной, так и правильно меняющейся с неотрицательным параметром.

Для формулировки теоремы 5 нам необходимо напомнить теорему 4 работы [9], в которой анализировались интегралы сверточного типа относительно некоторой меры $V(t)$.

Лемма 1. *Пусть $V(t) > 0$ монотонно возрастающая функция, для которой найдутся такие $c > 0$, $\beta \in (0,1]$ и $\ell_v(t) \in \mathcal{L}$, что при любом фиксированном $\Delta > 0$*

$$V(t) - V(t-\Delta) \sim \Delta c \mu_v^{-1}(t), \tag{37}$$

где $\mu_v^{-1}(t) = t^{\beta-1}\ell_v^{-1}(t)$.

Если $P(t) := t^{-\gamma}\ell_p(t)$ с $\gamma \in [0,1)$, а $p(t) = o(t^{-1})$ — функция, непосредственно интегрируема по Риману на $[0,\infty]$, то

$$\int_0^t P(t-u)\mathrm{d}V(u) \quad \sim \quad ct^{-\gamma}l_p(t)t\mu_v^{-1}(t)\int_0^1 (1-u)^{-\gamma}u^{\beta-1}\mathrm{d}u, \tag{38}$$

$$\int_0^t p(t-u)\mathrm{d}V(u) \quad \sim \quad c\mu_v^{-1}(t)\int_0^\infty p(u)\mathrm{d}u. \tag{39}$$

Если $P(t) = t^{-1}\ell_p(t)$, то

$$\int_0^t P(t-u)\mathrm{d}V(u) \sim c\mu_v^{-1}(t)\int_0^t u^{-1}\ell_p(u)\mathrm{d}u. \tag{40}$$

Замечание. Как было указано в личном письме Peter Kevei авторам работы [9], соотношение (39) (соответствующее соотношению (32) работы [9]) верно лишь при дополнительном ограничении $p(t) = o(t^{-1})$, которое не было упомянуто в формулировке теоремы 4 цитируемой работы. В приведенной выше лемме 1 это условие имеется.

Доказательство теоремы 1. Применим лемму 1 для вычисления асимптотики функции $P_{ij}(t)$ в зависимости от включения $j-$го типа частиц во множество $\mathcal{I}_0$ или во множество $\mathcal{I}_1$.

Запишем матричное представление (10) поэлементно

$$P_{ij}(t) = U_{ij} * (1 - G_j(\cdot))(t) = \int_0^t \mathfrak{q}_j(t-u)\mathrm{d}U_{ij}(u),\ i,j = 1,\cdots,n. \tag{41}$$

Приведем утверждение теоремы 1 из [11].

Теорема 5. *Пусть матрица $\mathbf{M} \in \mathcal{B}_1$, а и $G_i(t)$, $i \in \mathcal{I}$, — набор распределений, удовлетворяющих условию (4), таких, что $G_i(t) \in \mathcal{G}_0^-$ при $i \in \mathcal{I}_0$ и $G_i(t) \in \mathcal{G}_{1,\mathfrak{q}_n}$ при $i \in \mathcal{I}$.*

Тогда при $\beta \in (0,1]$

$$\mathbf{U}(t) \sim \Gamma_{\beta_n} t\mu_n^{-1}(t)\mathbf{D}, \tag{42}$$

где матрица $\mathbf{D}$ определена соотношениями (23).

Если совокупный носитель набора распределений $G_i(t)$, $i \in \mathcal{I}$, не сосредоточен ни на какой решетке, содержащей 0, и $G_i(t) \in \mathcal{G}_{1,\mathfrak{q}_n}^+$ при всех $i \in \mathcal{I}$, то при любом фиксированном $\Delta > 0$ верно представление

$$\mathbf{U}(t+\Delta) - \mathbf{U}(t) \sim \Delta\beta_n\Gamma_{\beta_n}\mu_n^{-1}(t)\mathbf{D}. \tag{43}$$

Условия теорем 1 и 5 различаются ограничениями $G_i(t) \in \mathcal{G}_{1,\mathfrak{q}_i}$ (в первой из них) и $G_i(t) \in \mathcal{G}_{1,\mathfrak{q}_n}$ (во второй) для $i \in \mathcal{I}_1$. Очевидно, что второе из этих условий является более слабым.

Запишем соотношение (43) в поэлементном виде

$$U_{ij}(t+\Delta) - U_{ij}(t) \sim \Delta\beta_n\Gamma_{\beta_n}\mu_n^{-1}(t)D_{ij}, \tag{44}$$

что является аналогом асимптотического соотношения (37) из леммы 1.

Для $i \in \mathcal{I}_0$ при замене условия (37) на (44) представление (39) принимает следующий вид

$$P_{ij}(t) \sim \mu_j\beta_n\Gamma_{\beta_n}\mu_n^{-1}(t)D_{ij},\ i \in \mathcal{I},\ j \in \mathcal{I}_0. \tag{45}$$

Поскольку

$$\int_0^1 (1-u)^{-\beta_j} u^{\beta_n - 1} \mathrm{d}u = \Gamma(1-\beta_j)\Gamma(\beta_n)\Gamma^{-1}(1-\beta_j+\beta_n)$$

при $\beta_j < 1$ (см. (2.5) [13, гл. II, §2]), то, подставляя явное выражение для $\Gamma(\beta_n)$, мы можем при $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{I}_1$, $\beta_j < 1$ переписать соотношение (38) в терминах исследуемых функций следующим образом

$$P_{ij}(t) \sim D_{ij} \frac{\Gamma(2-\beta_j)\mu_j(t)}{\mu_n(t)\Gamma(2-\beta_n)\Gamma(1-\beta_j+\beta_n)}. \tag{46}$$

Для $\beta_j = 1$ и $j \in \mathcal{I}_1$ соотношение (40) приводит к тому же асимптотическому представлению (46) (с $\beta_j = 1$).

Соотношения (25) легко получаются из (45), (46), (12) и того, что $\Gamma(2-\beta_j) = (1-\beta_j)\Gamma(1-\beta_j)$ при $\beta_j < 1$ и $\Gamma(2-\beta_j) = \Gamma(1-\beta_j) = 1$ при $\beta_j = 1$. □

Доказательство теоремы 3. Приведем для $j, i \in \mathcal{I}$ поэлементную запись матричных определений (26), аналогичную (41),

$$P^d_{ij}(t) = U^d_{ij} * (1-G_j(\cdot))(t) = 1_{\{i,j\in\mathcal{I}_0\}} U^d_{ij} * (1-G_j(\cdot))(t), \tag{47}$$

$$P^c_{ij}(t) = U^c_{ij} * (1-G_j(\cdot))(t). \tag{48}$$

Первая часть соотношений (29) является следствием определения (47), завершающей части теоремы 2 и определения 4, а вторая немедленно следует из определения 4 и того, что функция $\mathfrak{q}_n(t)t^{-3}$ правильно меняется на бесконечности, и, таким образом,

$$\int_t^\infty \mathfrak{q}_n(u)u^{-3}\mathrm{d}u \sim (\beta_n+2)^{-1}\mathfrak{q}_n(t)t^{-2}$$

по теореме 1 [13, гл. VIII, §9].

Дифференцируя обе части тождества (48) и учитывая, что $u^c_{ij}(+0) = 0$, а функция $1_{\{j\in\mathcal{I}_1\}}(U^c_{ij}(t) - \delta_{ij}1_{\{t\ge 0\}})$ не имеет атома в нуле, получаем

$$P^{c\,\prime}_{ij}(t) = u^c_{ij} * (1-G_j(\cdot))(t) - 1_{\{j\in\mathcal{I}_1\}} g_j(t) =: p^c_{ij}(t) + p^{c,0}_{ij}(t). \tag{49}$$

Формула для производной от дроби

$$\left(\frac{\mu_j(t)}{\mu_n(t)}\right)' = \frac{\mathfrak{q}_j(t)}{\mu_n(t)} - \frac{\mu_j(t)\mathfrak{q}_n(t)}{\mu_n(t)}$$

с учетом равенств (12) и (4) приводит при $j \in \mathcal{I}_1$ к оценкам

$$\left(\frac{\mu_j(t)}{\mu_n(t)}\right)' = \begin{cases} -\dfrac{(1-\beta_n)(\beta_j-\beta_n)\ell_j(t)}{(1-\beta_j)\ell_n(t)t^{1-\beta_n+\beta_j}}\big(1+o(1)\big) & \text{при } \beta_n < \beta_j < 1, \\ -\dfrac{(1-\beta_n)^2\big(\ell_{1j}(t) + O\big(\ell_j(t)\big)\big)}{t^{2-\beta_n}\ell_n(t)} & \text{при } \beta_n < \beta_j = 1, \\ o\left(\dfrac{\ell_j(t)}{\ell_n(t)t}\right) & \text{при } \beta_j = \beta_n < 1, \\ \dfrac{\ell_j(t)\ell_{1n}(t) - \ell_n(t)\ell_{1j}(t)}{t\ell^2_{1n}(t)} & \text{при } \beta_j = \beta_n = 1. \end{cases} \tag{50}$$

Если $j \in \mathcal{I}_0$, то в силу условия $G_j(t) \in \mathcal{G}_0^- \bigcap \mathcal{G}_{1,\mathfrak{q}_n}$ имеем

$$\big(\mu_j(t)\mu_n^{-1}(t)\big)' = \mu_j\big(\mu_n^{-1}(t)\big)' \sim \mu_j \begin{cases} -(1-\beta_n)^2\ell_n^{-1}(t)t^{\beta_n-2} & \text{при } \beta_n < 1, \\ -\ell_n(t)\ell_{1n}^{-2}(t)t^{-1} & \text{при } \beta_n = 1. \end{cases} \tag{51}$$

Перейдем к исследованию функции $P^{c\,\prime}_{ij}(t)$ из (49). Начнем с оценки слагаемого $p^{c,0}_{ij}(t)$. Условие $G_j(t) \in \mathcal{G}_{3,\mathfrak{q}_n}$ при $j \in \mathcal{I}_1$ и $\beta_n \in (0,1]$ означает, что

$$p^{c,0}_{ij}(t) = O\big(t^{-\beta_n-1}\ell_n(t)\big) = o\big(\big(\mu_n^{-1}(t)\big)'\big). \tag{52}$$

По теореме 2 функция ${u_{ij}^c}'(t) \sim D_{ij}\beta_n\Gamma_{\beta_n}\big(\mu_n^{-1}(t)\big)'$ правильно меняется с показателем $\beta_n - 2$, причем, $u_{ij}^c(t) \to 0$ как при $t \to \infty$, так и при $t \to +0$. Если $j \in \mathcal{I}_0$, то из условия $G_j(t) \in \mathcal{G}_{0,\mathfrak{q}_n}$ следует оценка $1 - G_j(t) = o\big(t^{-2}\mathfrak{q}_n(t)\big)$. Поэтому

$$p_{ij}^c(t) \sim \mu_j {u_{ij}^c}'(t) \sim \mu_j D_{ij}\beta_n\Gamma_{\beta_n}\big(\mu_n^{-1}(t)\big)'. \tag{53}$$

Асимптотика функции $\big(\mu_n^{-1}(t)\big)'$ легко извлекается из соотношения (51).

Используя определения и формулу (53) для $\beta_n \in (0,1]$, предыдущие оценки можно переписать в виде

$$p_{ij}^c(t) \sim D_{ij}\frac{\mu_j\Gamma(2-\beta_j)\big(\mu_n^{-1}(t)\big)'}{\Gamma(2-\beta_n)\Gamma(1-\beta_j+\beta_n)} \sim D_{ij}\frac{\Gamma(2-\beta_j)(\mu_j(t)\mu_n^{-1}(t))'}{\Gamma(2-\beta_n)\Gamma(1-\beta_j+\beta_n)},$$

что завершает доказательство (31) и теоремы 3 в случае $j \in \mathcal{I}_0$.

Если же $j \in \mathcal{I}_1$, то из определений (49) следует, что

$$p_{ij}^c(t) = \int_0^t {u_{ij}^c}'(t-u)\mathfrak{q}_j(u)\mathrm{d}u,$$

или

$$tp_{ij}^c(t) = \int_0^t (t-u){u_{ij}^c}'(t-u)\mathfrak{q}_j(u)\mathrm{d}u$$

$$+ \quad \int_0^t {u_{ij}^c}'(t-u)u\mathfrak{q}_j(u)\mathrm{d}u =: I_1(t) + I_2(t). \tag{54}$$

Оценим первый интеграл из (54), используя лемму 1 с $V(t) := \int_0^t \mathfrak{q}_j(u)\mathrm{d}u$ или, что тоже самое, $V'(t) = \mathfrak{q}_j(t)$ и $P(t) := t{u_{ij}^c}'(t) \sim D_{ij}t\beta_n\Gamma_{\beta_n}\big(\mu_n^{-1}(t)\big)'$. В наших условиях, при $\beta_j < 1$ утверждение (38) соответствует соотношению

$$I_1(t) \sim D_{ij}t^2\mathfrak{q}_j(t){u_{ij}^c}'(t)\int_0^1 (1-t)^{-\beta_j}t^{\beta_n-1}\mathrm{d}t, \tag{55}$$

а при $\beta_j = 1$ утверждение (39) соответствует соотношению

$$I_1(t) \sim D_{ij}t{u_{ij}^c}'(t)\ell_{1j}(t). \tag{56}$$

Используя определения, (12), (55) и асимптотическое соотношение $u\mathfrak{q}_j(u) \sim (1-\beta_j)\mu_j(u)$, справедливое при $\beta_j < 1$, можно, по аналогии с (46), записать оценку

$$I_1(t) = D_{ij}\frac{t\mu_j(t)\Gamma(2-\beta_j)\big(\mu_n^{-1}(t)\big)'}{\Gamma(2-\beta_n)\Gamma(1-\beta_j+\beta_n)} + o\big(t\mu_j(t)\big(\mu_n^{-1}(t)\big)'\big). \tag{57}$$

Перейдем к оценке интеграла $I_2(t)$. Если $\beta_j < 1$, то, учитывая явный вид входящих в $I_2(t)$ подынтегральных правильно меняющихся функций, нетрудно заключить, что $I_2(t) = O\big(t^{\beta_n-\beta_j-1}\ell_n^{-1}(t)\ell_j(t)\big)$, а при замене в $\mathfrak{q}_j(t)$ медленно меняющейся функции $\ell_j(t)$ на $o\big(\ell_j(t)\big)$ соответствующий аналог $I_2(t)$ оценивается сверху величиной $o\big(t^{\beta_n-\beta_j-1}\ell_n^{-1}(t)\ell_j(t)\big)$. Согласно условиям теоремы $\ell_j'(t) = o\big(\ell_j(t)t^{-1}\big)$ или $\big(t\mathfrak{q}_j(t)\big)' \sim (1-\beta_j)\mathfrak{q}_j(t)$. Поэтому при $\beta_j < 1$ мы можем воспользоваться леммой 1 с $P(t) = u_{ij}^c(t) \sim D_{ij}t\beta_n\Gamma_{\beta_n}\mu_n^{-1}(t)$ и $V(t) = t\mathfrak{q}_j(t)$ или $V'(t) \sim (1-\beta_j)\mu_j'(t)$.

Те же аргументы, что и при доказательстве (57), примененные к $I_2(t)$ после интегрирования по частям и использования соотношения (38), приводят к оценке

$$I_2(t) = -\int_0^t u_{ij}^c(t-u)\mathrm{d}(u\mathfrak{q}_j(u)) \sim D_{ij}\frac{\Gamma(2-\beta_j)t\mu_j'(t)\mu_n^{-1}(t)}{\Gamma(2-\beta_n)\Gamma(1-\beta_j+\beta_n)}. \tag{58}$$

Если же $\beta_j = 1$, то по определению $t\mathfrak{q}_j(t) = \ell_j(t)$, $\ell_{*j}(t) = \ell_j'(t)t \in \mathcal{L}$ и, как отмечено после определения $\mu_i(t)$, верна оценка $\ell_{*j}(t) = o\big(\ell_j(t)\big)$. Поэтому интеграл $I_2(t)$ будет эквивалентен интегралу с такими же подынтегральными функциями, но взятым по промежутку $[0, \epsilon t]$ с фиксированным значением $\epsilon \in (0,1)$, то есть

$$I_2(t) = -\int_0^t u_{ij}^c(t-u)(u\mathfrak{q}_j(u))'\mathrm{d}u \sim -u_{ij}^c(t)\ell_j(t) \sim D_{ij}\frac{t\mu_j'(t)\mu_n^{-1}(t)}{\Gamma(2-\beta_n)\Gamma(\beta_n)}, \tag{59}$$

что совпадает с (58) при подстановке туда $\beta_j = 1$. При этом погрешность округления будет иметь порядок $o\big(t\mu_j'(t)\mu_n^{-1}(t)\big) = o\big(t\mathfrak{q}_j(t)\mu_n^{-1}(t)\big)$.

Объединяя оценки (52), (54), (55), (56), (57) и (58), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} P_{ij}^{c}{}'(t) &= p_{ij}^c(t) + O\big(t^{-\beta_j-1}\ell_j(t)\big) = o\big(\mu_j'(t)\mu_n^{-1}(t)\big) + o\big(\mu_j(t)\big(\mu_n^{-1}(t)\big)'\big) \\ &+ D_{ij}\frac{\Gamma(2-\beta_j)(\mu_j(t)\mu_n^{-1}(t))'}{\Gamma(2-\beta_n)\Gamma(1-\beta_j+\beta_n)}, \end{aligned} \tag{60}$$

что в силу оценок $\ell_j(t) = O\big(\ell_n(t)\big)$ и $\ell_{1j}(t) = O\big(\ell_{1n}(t)\big)$ при $j \in \mathcal{I}_1$ и $\beta_j = \beta_n$ завершает доказательство теоремы 3 и соответствует сохранению эквивалентности (24) при замене $P_{ij}(t)$ на эквивалентную абсолютно непрерывную функцию $P_{ij}^c(t)$ и формальном дифференцировании выражений в правой и левой частях. □

Доказательство теоремы 4. Используя представление (8), найдем оценки для элементов матрицы $\mathbf{P}^{(2)}(t)$. Для этого нам нужно описать свойства функций $T_{ij}(t)$, определенных в (9).

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, в случае, когда $j \in \mathcal{I}_1$ и $\beta_n > 0.5$, верна оценка* (35).

Тогда при $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{I}_2$

$$T_{ij}(t) = O\big(t^{-1}\mathfrak{q}_n(t)\big) + O\big(\mathfrak{d}_{jj}^2(t)\big) = o\big(t^{-1}\big), \ \int_0^t T_{ij}(u)\mathrm{d}u \to S_{ij}^*, \tag{61}$$

а при $j \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_2$ верны соотношения

$$T_{ij}(t) \sim S_{ij}\mathfrak{d}_{jj}^2(t). \tag{62}$$

Доказательство. Согласно теореме 1, для любых $s,k \in \mathcal{I}$ функции $P_{sj}(t)P_{kj}(t) \sim D_{sj}D_{kj}\mathfrak{d}_{jj}^2(t) = O(1)$ будут правильно меняющимися с показателем $\gamma_j = 2\beta_n - 2\beta_j \in (-2,0]$. При любом фиксированном $\epsilon \in (0,1)$ для соответствующего интеграла от этих правильно меняющихся функции верна оценка

$$\int_0^{(1-\epsilon)t} P_{sj}(t-u)P_{kj}(t-u)\mathrm{d}G_i(u) \sim P_{sj}(t)P_{kj}(t) \sim D_{sj}D_{kj}\mathfrak{d}_{jj}^2(t). \tag{63}$$

Кроме этого, в силу условий леммы 2

$$\begin{aligned} \int_{(1-\epsilon)t}^t P_{sj}(t-u)P_{kj}(t-u)\mathrm{d}G_i(u) &= O(1)\int_{(1-\epsilon)t}^t \mathfrak{d}_{jj}^2(t-u)\mathrm{d}G_i(u) \\ = O(1)\int_0^t \mathfrak{d}_{jj}^2(u)\mathrm{d}u &\sup_{u\in[(1-\epsilon)t,t]}\big(G_i(u+1)-G_i(u)\big). \end{aligned} \tag{64}$$

Далее, для $j \in \mathcal{I}_2$ и $i,l,m \in \mathcal{I}$ верны оценки

$$D_{lm}^{ij} = O(1)\int_0^\infty \int_0^t \mathfrak{d}_{jj}^2(t-u)\mathrm{d}G_i(u)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_u^\infty \mathfrak{d}_{jj}^2(t-u)\mathrm{d}t\mathrm{d}G_i(u) < \infty.$$

Из последних трех соотношений и определений (9) и (33) следует (61).

В случае $j \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_2$ при $\beta_n \in (0, 0.5]$ последний сомножитель в (64) оценивается величиной $O\big(t^{-1}\mathfrak{q}_n(t)\big)$, а при $\beta_n \in (0.5, 1]$ имеет порядок $O\big(t^{-1}\big)$ в силу (35). Поэтому для $j \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_2$ соотношение (64) влечет оценку

$$\int_{(1-\epsilon)t}^t P_{sj}(t-u)P_{kj}(t-u)\mathrm{d}G_i(u) = o\big(\mathfrak{d}_{jj}^2(t)\big),$$

что с учетом (63), (9) и (34) приводит к (62) и завершает доказательство леммы. □

Запишем формулу (11) в поэлементном виде:

$$P_{ij}^{(2)}(t) = P_{ij}(t) + \sum_{s=1}^n U_{is} * T_{sj}(t). \tag{65}$$

Воспользовавшись леммами 1 и 2 и теоремами 5 и 1, для $j \in \mathcal{I}_2$ получаем представление

$$U_{is} * T_{sj}(t) \sim \beta_n \Gamma_{\beta_n} \mu_n^{-1}(t) D_{is} S^*_{sj},$$

которое в силу (65) и (24) и завершает доказательство третьей части соотношений (36). Следует отметить, что слагаемое с сомножителем $\mathfrak{d}_{jj}(t)$ в третьей строке (36) существенно только при $j \in \mathcal{I}_0$, так как в этом случае $\mathfrak{d}_{jj}(t) = \mu_j \mu_n^{-1}(t)$. Для других значений j упомянутое слагаемое бесконечно мало относительно первого слагаемого.

В случае $j \in \mathcal{I} \backslash \mathcal{I}_2$ сходные рассуждения и оценка (62) приводят к асимптотическим соотношениям

$$U_{is} * T_{sj}(t) \sim S_{sj} \int_0^t \mathfrak{d}^2_{jj}(t-u) \mathrm{d}U_{is}(u)$$

$$\sim \begin{cases} D_{is} S_{sj} \beta_n \Gamma_{\beta_n} \dfrac{t \mathfrak{d}^2_{jj}(t)}{\mu_n(t)} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^{\gamma_j} \mathrm{d}u}{u^{1-\beta_n}}, & \text{при}\, \gamma_j > -1, \\ D_{is} S_{sj} \beta_n \Gamma_{\beta_n} \mu_n^{-1}(t) \displaystyle\int_0^t \mathfrak{d}^2_j(u) \mathrm{d}u, & \text{при}\, \gamma_j = -1, \end{cases} \tag{66}$$

где $\gamma_j = 2\beta_n - 2\beta_j$. Напомним, что мы полагаем $\beta_j = 1$ при $j \in \mathcal{I}_0$.

Учитывая, что при $\gamma_j > -1$ интеграл в первой строке правой части (66) является Бета функцией $B(1+\gamma_j, \beta_n)$, и объединяя (66) и (65), убеждаемся в справедливости утверждений, содержащихся в первых двух строках формулы (36). $\square$

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за внимательное изучение работы и ряд полезных критических замечаний.

References

[1] B.A. Sevast'yanov, *Branching processes*, Nauka, Moscow, 1971. (Russian) *Verzweigungsprozesse*, Akademie Verlag, Berlin (1974). Zbl 0238.60001

[2] K.B. Athreya, P.E. Ney, *Branching processes*, Springer, Berlin 1972. MR0373040

[3] M.I. Goldstein, *Critical age-dependent branching processes: Single and multitype*, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., **17** (1971), 74–88. MR0278402

[4] V.A. Vatutin, *Discrete limit distributions of the number of particles in a Bellman-Harris branching process with several types of particles*, Theory Probab. Appl., **24**:3 (1979), 509–520. MR0541363

[5] V.A. Vatutin, *On a class of the critical multitype Bellman-Harris branching processes*, Theory Probab. Appl., **25**:4 (1981), 760–771. MR0636776

[6] V.A. Vatutin, V.A. Topchii, *Critical Bellman-Harris branching processes with long-living particles*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **282**:1 (2013), 243–272. MR3308595

[7] V. Vatutin, A. Iksanov, V. Topchii, *A Two-Type Bellman–Harris process initiated by a large number of particles.* Acta Applicandae Mathematicae, **138**:1 (2015), 279–312. MR3365590

[8] V.A. Vatutin, V.A. Topchii, *Catalytic branching random walks in $\mathbb{Z}^d$ with branching at the origin*, Siberian Advances in Mathematics, **23**:2 (2013), 123–153. MR2961768

[9] V.A. Vatutin, V.A. Topchii, *A key renewal theorem for heavy tail distributions with $\beta \in (0, 0.5]$*, Theory Probab. Appl., **58**:2 (2014), 333–342. MR3300564

[10] V.A. Topchii, *Two-dimensional renewal theorems with weak moment conditions and critical Bellman–Harris branching processes*, Discrete Mathematics and Applications, **26**:1 (2016), 51–69. MR3468386

[11] V.A. Topchii, *Renewal matrix connected with branching process having life-length tails of different order*, Mathematical Proceedings (Matematicheskie trudy), **20**:2 (2017), 139–192. (Russian)

[12] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Moscow: Nauka, 1967. (Russian)

[13] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol II*, New York: Wiley, 1966. MR0210154

[14] V.A Il'in, E.G. Poznyak, *Linear Algebra*, Moscow: Nauka–Fizmatlit, 1999. (Russian)

[15] G.M. Fikhtengol'ts, *A Course in Differential and Integral Calculus. Vol. I*, Moscow: Nauka, 1966. (Russian)

Vladimir Alekseevich Vatutin
Steklov Mathematical Institute RAS,
Gubkin str. 8,
119991, Moscow, Russia
E-mail address: vatutin@mi.ras.ru

Valentin Alekseevich Topchii
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: topchij@ofim.oscsbras.ru