S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1265–1278 (2017) УДК 519.21

DOI 10.17377/semi.2017.14.107 MSC 60K37

О СТРУКТУРЕ УСЛОВНЫХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ЧИСЛО ПОСЕЩЕНИЙ

А.И. САХАНЕНКО, С.Г. ФОСС

Abstract. We consider a sample path of a random walk on the integers with bounded local times, conditioned on the event that it hits a high level. Under an auxiliary assumption, we obtain representations for its distribution in terms of the corresponding limiting sequence. Then we prove limiting results as the high level grows. In particular, we generalize results for a simple symmetric random walk obtained earlier by Benjamini and Berectycki (2010).

Keywords: random walk, bounded local times, conditioned random walk, regenerative process, potential regeneration.

1. Введение

Рассмотрим случайное блуждание

$$S_t = S_0 + \sum_{j=1}^{t} \xi_j = S_{t-1} + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots,$$

на множестве целых чисел $\mathcal{Z}$, где $\{\xi_j\}$ — независимые и одинаково распределенные целочисленные случайные величины, не зависящие от начального значения S_0. Введем в рассмотрение случайные величины

$$L_t(x) = \sum_{j=0}^{t} \mathbf{1}\{S_j = x\}, \quad x \in \mathcal{Z}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

Sakhanenko, A.I., Foss, S.G., On a structure of a conditioned random walk on the integers with bounded local times.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 17-11-01173.

Поступила 26 сентября 2017 г., опубликована 30 ноября 2017 г.

которые подсчитывают число посещений состояния x до момента времени t (эти случайные величины еще называют локальными временами пребывания в соответствующих состояниях). Предположим, что для каждого состояния $x \in \mathcal{Z}$ число его возможных посещений ограничено сверху пределом $H(x) \geq 0$. Пусть

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \ : \ L_t(S_t) > H(S_t)\} \tag{2}$$

— это первый момент времени, когда число посещений какого-либо состояния превышает его верхний предел (мы следуем далее стандартным соглашениям, что $\inf \emptyset = \infty$ и $\sup \emptyset = -\infty$). Если τ^* конечно, мы предполагаем, что случайное блуждание "погибает" (или "замерзает") в момент времени τ^*.

Пусть

$$\tau(x) = \inf\{t \geq 0 \ : \ S_t \geq x\} \tag{3}$$

— время достижения случайным блужданием множества $[x, \infty)$. Введем события

$$B_x^* = \{\tau(x) < \tau^*\} = \{S_t \geq x \quad \text{при некотором} \quad t < \tau^* \leq \infty\}. \tag{4}$$

Рассмотрим условное распределение последовательности $\{S_t\}_{0 \leq t \leq \tau(n)}$ при условии, что событие B_n^* произошло при достаточно большом n. Другими словами, нас интересуют вероятностные характеристики случайного блуждания в момент достижения им высокого уровня при условии, что оно все еще не погибло.

Нас особо интересуют условия сходимости, при $n \to \infty$, этого условного распределения к безусловному распределению некоторой "предельной" случайной последовательности $\{\overline{S}_i\}$. Более точно: нас интересуют условия, при которых сходимость

$$\mathbf{P}((S_0, \ldots, S_k) \in A \mid B_n^*) \to \mathbf{P}((\overline{S}_0, \ldots, \overline{S}_k) \in A), \tag{5}$$

имеет место при любых целых $k = 0, 1, 2, \ldots$ для всех множеств $A \subset \mathcal{Z}^{k+1}$.

Наше внимание к этой тематике привлекла работа [1], в которой рассматривалось простое симметричное случайное блуждание со скачками $+1$ и -1. Мы рассматриваем существенно более общие распределения приращений случайного блуждания (см замечание 1 ниже) и развиваем несколько иные методы исследования.

Первой целью настоящей работы является описание единого подхода к изучению целого класса целочисленных случайных блужданий с ограничениями на количество посещений. Мы сначала исследуем структуру случайного блуждания $\{S_t\}$ и выделяем в нем две последовательности вероятностей. Затем мы приводим явный алгоритм построения совместных распределений предельной случайной последовательности $\{\overline{S}_t\}$. После этого мы показываем, что это предельное блуждание с необходимостью имеет относительно простую регенерирующую структуру. Наконец, что самое интересное, мы получаем представление для нужного нам условного распределения последовательности $\{S_t\}_{0 \leq t \leq \tau(n)}$ через некоторое более простое распределение, связанное с построенным предельным случайным блужданием $\{\overline{S}_t\}$. Такое представление позволяет получить ряд новых результатов. Это представление имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}((S_0, \ldots, S_k) \in A \mid B_n^*) = \mathbf{P}((\overline{S}_0, \ldots, \overline{S}_k) \in A \mid \overline{B}_n), \tag{6}$$

для любых целых $n \geq k = 0, 1, 2, \dots$ и любых множеств $A \subset \mathcal{Z}^{k+1}$, где

$$\overline{B}_x = \{\overline{S}_{\overline{\tau}(x)} = x = \inf_{t \geq \overline{\tau}(x)} \overline{S}_t\} \qquad \text{при} \qquad \overline{\tau}(x) = \inf\{t \geq 0 : \overline{S}_t \geq x\}. \tag{7}$$

Ясно, что определение (7) проще, чем (4), потому что на случайную последовательность $\{\overline{S}_t\}$ в (7) не накладывается никаких ограничений на число посещений каких-либо состояний.

В следующем параграфе 2 мы введем основные предположения о модели, обсудим некоторые свойства этой модели, опишем предельный процесс и затем сформулируем основные результаты. В параграфе 3 приведены их доказательства.

2. Основные результаты

2.1. **Основные предположения.** Вот основные три предположения, которые будут использованы в работе.

(**A1**). Приращения случайного блуждания $\{\xi_t : \ t \geq 1\}$ — независимые и одинаково распределенные целочисленные случайные величины, которые имеют “непрерывное сверху” распределение:

$$\sum_{k=-\infty}^{1} \mathbf{P}(\xi_1 = k) = 1 \quad \text{and} \quad \mathbf{P}(\xi_1 = 1) > 0. \tag{8}$$

(**A2**). Случайная величина S_0 не зависит от последовательности $\{\xi_t : t \geq 1\}$ и

$$\mathbf{P}(S_0 = m_0) > 0 \quad \text{для некоторого} \quad m_0 \leq 0. \tag{9}$$

(**A3**). Величины $\{H(x) \geq 0 : x \in \mathcal{Z}\}$ — неотрицательны,

$$\sup_x H(x) < \infty \qquad \text{и} \qquad H(x) = L_0 \geq 1 \quad \forall\ x \geq m_0 \tag{10}$$

для некоторой константы $L_0 < \infty$.

Если выполняются все условия ($A1$), ($A2$) и ($A3$), то мы будем говорить далее, что справедливо предположение (**A**).

Из (8) – (10) следует, что

$$\mathbf{P}(B_n^*) \geq \mathbf{P}(B_{m_0}^*)\mathbf{P}^{n-m_0}(\xi_1 = 1) > 0 \quad \text{при всех} \quad n \geq 0 \geq m_0, \tag{11}$$

поскольку $\mathbf{P}(B_{m_0}^*) > 0$ ввиду (9) и $\mathbf{P}(\xi_1 = 1) > 0$ в силу (8).

Замечание 1. *В [1] авторы рассматривают частный случай простого симметричного случайного блуждания, которое начинается с $S_0 = 0$, с постоянными верхними пределами для числа посещений:*

$$\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = 1/2 = \mathbf{P}(\xi_1 = -1), \quad H(x) = L_0 = const \quad for\ all \quad x \in \mathcal{Z}, \tag{12}$$

и с несколько отличными от наших ограничениями, скажем $\widetilde{L}_t(x)$, на количества посещений состояния x:

$$\widetilde{L}_t(x) = \sum_{j=1}^{t} \mathbf{1}\{S_j = x\} = L_t(x) - \mathbf{1}\{S_0 = x\}.$$

Их модель может рассматриваться как частный случай нашей модели с заменой их величин $S_t = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ на наши $S_{t-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j$. Другими словами, их модель сводится к нашей с $m_0 = -1$, если предположить, что величина $S_0 = \xi_0$ имеет то же распределение, что и ξ_1 из (12).

2.2. **Дополнительные обозначения и определения.** Введем несколько обозначений, которые будут часто использоваться в работе. Для произвольной бесконечной целочисленной последовательности $y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$ при всех $n \geq k \geq 0$ мы будем полагать

$$\tau(n|y) := \inf\{t \geq 0 : y_t \geq n\}, \quad \lambda(k,n|y) := \inf_{t\in[\tau(k|y),\tau(n|y)]}(y_t - y_{\tau(k|y)}),$$

$$\eta(k,n|y) := \sum_{x=k}^{n} \mathbf{1}\{\lambda(x,n|y) = 0\} - 1, \qquad y(n) = (y_0, \dots, y_n).$$

Мы далее будем говорить, что уровень x является разделяющим уровнем последовательности $y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$, если

$$\tau(x|y) < \infty \qquad \text{и} \qquad \lambda(x,n|y) = 0 \quad \forall\; n > x. \tag{13}$$

Отметим, что определение (13) можно переписать также в виде:

$$\min_{t<\tau(x|y)} y_t < x = y_{\tau(x|y)} \leq \inf_{t>\tau(x|y)} y_t.$$

Отметим, что если $\lambda(x,n|y) = 0$ при некотором фиксированном $n \geq x$, то такой уровень x может и не быть разделяющим уровнем для бесконечной последовательности $y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$. Поэтому такие уровни x мы будем называть n-разделяющими уровнями.

Нетрудно понять, что

$$\lambda(n,n|y) = 0 \quad \text{и} \quad \eta(k,n|y) \geq 0 \quad \forall\; k \leq n, \quad \text{если} \quad \tau(n|y) < \infty.$$

Таким образом, при $\tau(n|y) < \infty$ и $k \leq n$ величина $\eta(k,n|y) \geq 0$ считает число n-разделяющих уровней на промежутке $[k,n)$.

Для любого события B мы будем использовать следующее обозначение:

$$\mathbf{P}_0(B) := \mathbf{P}(B \,|\, S_0 = 0,\ H(x) = 0\ \forall x < 0,\quad H(x) = L_0\ \forall x \geq 0). \tag{14}$$

2.3. **Скрытые свойства исходного случайного блуждания.** При $0 \leq k \leq n$ введем следующие события:

$$R(k|n) := \{\tau(n) < \tau^*,\ \lambda(k,n) = 0\} = B_n^* \cap \{\lambda(k,n) = 0\}, \tag{15}$$

где

$$\lambda(k,n) := \lambda(k,n|S) = \inf_{t\in[\tau(k),\tau(n)]}(S_t - S_{\tau(k)}).$$

Свойство 1. *Если справедливо предположение* (A), *то*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau(n) = N < \tau^*, \tau(k) = K, \lambda(k,n) = 0, (S_0,\dots,S_K) \in A, (\xi_{K+1},\dots,\xi_N) \in C) \\ = \mathbf{P}(\tau(k) = K < \tau^*, (S_0,\dots,S_K) \in A)\times \\ \times\mathbf{P}_0(\tau(n-k) = N-K < \tau^*, (\xi_1,\dots,\xi_{N-K}) \in C), \end{aligned} \tag{16}$$

для любых целых $N > K \geq 0$, $n > k \geq 0$ *и всех множеств* $A \subset \mathcal{Z}^{K+1}$, $C \subset \mathcal{Z}^{N-K}$.

Свойство 1 показывает, что если происходит событие $R(k|n)$, то n-разделяющий уровень k делит начальное случайное блуждание на две части, которые независимы в определенном смысле. Это неочевидное свойство позволяет предположить, что изучаемое блуждание обладает некоторой структурой, которую мы выявим ниже в Теореме 1. При описании этой структуры важную роль будет играть величина:

$$\eta^*(n) := \sum_{x=0}^{n} \mathbf{1}\big(R(x|n)\big) - 1. \tag{17}$$

Отметим, что если событие B_n^* не происходит, то $\eta^*(n) = -1$. И наоборот,

$$\eta^*(n) = \eta(0, n|S) \geq 0, \qquad \text{если происходит событие} \quad B_n^*.$$

Таким образом, величина $\eta^*(n)$ подсчитывает число n-разделяющих уровней на промежутке $[0, n)$ в случае, когда произошло событие B_n^*. Кроме того

$$B_n^* = \{\eta^*(n) \geq 0\} = \bigcup_{j=0}^{n} \{\eta^*(n) = j\}. \tag{18}$$

Замечание 2. *Подчеркнем еще раз, что если, скажем, x, является n-разделяющим уровнем, то x может не быть m-разделяющим уровнем при некотором $m > n$. Например, если событие B_n^* произошло, то $x = n$ всегда является последним n-разделяющим уровнем и остается $(n+1)$-разделяющим уровнем тогда и только тогда, когда или $\xi_{n+1} = 1$, либо $\xi_{n+1} = \dots = \xi_{n+k} = 0$, но $\xi_{n+k+1} = 1$ для некоторого $k \in [1, L_0]$.*

Таким образом, n-разделяющим уровни из (15) являются только “потенциальными” разделяющими уровнями, которые с ростом времени могут перестать быть разделяющими уровнями бесконечной траектории случайного блуждания.

2.4. **Дополнительное предположение.** Мы увидим в дальнейшем, что следующие два набора вероятностей

$$\{\mathbf{P}_0(\eta^*(k) = 1), \quad k \geq 1\} \quad \text{и} \quad \{\mathbf{P}(\eta^*(m) = 0), \quad m \geq 0\} \tag{19}$$

будут играть ключевую роль при изучении свойств начального случайного блуждания $\{S_t\}$. Нам потребуется предположение:

(**Q**) Существует число $q > 0$, удовлетворяющее следующим трем свойствам:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_0(\eta^*(k) = 1)/q^k = 1, \tag{20}$$

$$1 \leq \mu := \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}_0(\eta^*(k) = 1)/q^k < \infty, \tag{21}$$

$$0 < \psi_0 := \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(\eta^*(m) = 0)/q^m < \infty. \tag{22}$$

Предположение (Q) выполняется в условиях работы [1], которые были описаны в замечании 1. В следующем утверждении мы несколько ослабим эти условия

Свойство 2. *Пусть выполнено предположение (A) и, кроме того,*

$$\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = \mathbf{P}(\xi_1 = -1) = 1/2 \qquad \text{и} \qquad S_0 \leq 0.$$

Тогда предположение (Q) также имеет место.

Замечание 3. *Предлагаемый в работе подход сводит доказательство приводимой далее основной Теоремы 1 и ее следствий к более технической задаче о проверке условий из (Q). Однако эта техническая задача далеко не простая. В настоящее время мы ее умеем решать еще в нескольких случаях, кроме перечисленных в свойстве 2. Однако из-за значительного объема доказательств этих результатов мы решили выделить их в отдельную статью, которая будет опубликована позже.*

2.5. **Построение трансформированного блуждания.** При выполнении условий (20) и (22) мы теперь опишем совместное распределение бесконечной последовательности $\{\overline{S}_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ случайных величин, которая будет играть роль предельного процесса для нашей начальной последовательности $\{S_t, t = 0, \dots, \tau^*\}$. Мы получим совместное распределение величин $\{\overline{S}_t\}$ как специальный частный случай хорошо известного преобразования Крамера совместного распределения величин $\{S_t\}$.

Это построение нам удобно разбить на три шага.

Сначала мы определим распределение случайного вектора $(\overline{\nu}_0, \overline{T}_0, \overline{Z}_0)$ имеющего случайную длину, полагая

$$\mathbf{P}(\overline{\nu}_0 = m) := \mathbf{P}(\eta^*(m) = 0)/(\psi_0 q^m) > 0, \quad m \geq 0; \tag{23}$$

$$\mathbf{P}\left(\overline{T}_0 = l, \,|\, \overline{\nu}_0 = m\right) = \mathbf{P}\left(\tau(m) = l, \,|\, \eta^*(m) = 0\right) > 0, \quad l, m \geq 0; \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(\overline{S}_0 = z_0, \dots, \overline{S}_l = z_l \,|\, \overline{\nu}_0 = m, \, \overline{T}_0 = l\right) \\ &:= \mathbf{P}\left(S_0 = z_0, \dots, S_l = z_l \,|\, \eta^*(m) = 0, \, \tau(m) = l\right), \quad l, m \geq 0, \end{aligned} \tag{25}$$

для любых целых чисел $z_0, \dots, z_l$. Из предположения (22) следует, что распределение случайной величины $\overline{\nu}_0$ в (23) является собственным и, значит, собственным будет и распределение случайного вектора $(\overline{\nu}_0, \overline{T}_0, \overline{Z}_0)$, имеющего случайную длину.

Далее, введем в рассмотрение не зависящую от $(\overline{\nu}_0, \overline{T}_0, \overline{Z}_0)$ бесконечную последовательность

$$(\Delta_i \overline{\nu}, \Delta_i \overline{T}, \Delta_i \overline{Z}), \quad i = 1, 2, \dots \tag{26}$$

состоящую из *независимых случайных векторов*, имеющих случайные длины. Их распределения мы определим следующим образом:

$$\mathbf{P}(\Delta_i \overline{\nu} = k) = \mathbf{P}_0(\eta^*(k) = 1)/q^k > 0, \qquad i, k \geq 1; \tag{27}$$

$$\mathbf{P}\left(\Delta_i \overline{T} = l \,|\, \Delta_i \overline{\nu} = k\right) = \mathbf{P}_0\left(\tau(k) = l \,|\, \eta^*(k) = 1\right) > 0, \quad i, k, l \geq 1; \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(\Delta_i \overline{Z}_1 = z_1, \dots, \Delta_i \overline{Z}_l = z_l \,|\, \overline{\nu}_{i-1} = n, \, \Delta_i \overline{\nu} = k, \, \overline{T}_{i-1} = j, \, \Delta_i \overline{T} = l\right) \\ &:= \mathbf{P}_0\left(\xi_1 = z_1, \dots, \xi_l = z_l \,|\, \eta^*(k) = 1, \, \tau(k) = l\right), \quad i, k, l \geq 1, \end{aligned} \tag{29}$$

для любых целых чисел $z_0, \dots, z_l$. Из формул (27) – (29) очевидно, что *независимые* случайные вектора в (26) еще и одинаково распределены. Из предположения (20) вытекает, что распределения случайных величин $\Delta_i \overline{\nu}$ в (27) являются собственными, а значит собственными будут и распределения всех случайных векторов из (26), имеющих случайные длины. Заметим еще, что некоторые вероятности в (25) и (29) могут быть равны 0.

Наконец, введем случайные величины:

$$\overline{\nu}_k := \overline{\nu}_0 + \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \overline{\nu} > \overline{\nu}_{k-1}, \quad \overline{T}_k := \overline{T}_0 + \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \overline{T} > \overline{T}_{k-1}, \quad k \geq 1; \tag{30}$$

$$\overline{\xi}_j = \overline{S}_j - \overline{S}_{j-1},\ 1 \leq j \leq \overline{T}_0; \quad \overline{\xi}_{j+\overline{T}_{i-1}} := \Delta_i \overline{Z}_j,\ 1 \leq j \leq \Delta_i \overline{T},\ i \geq 1;$$

и определим нужную нам бесконечную случайную последовательность:

$$\overline{S}_t = \overline{S}_0 + \sum_{j=1}^{t} \overline{\xi}_j, \quad t = 1, 2, \ldots. \tag{31}$$

Таким образом, мы построили совместные распределения бесконечной последовательности $\{\overline{S}_t, t = 0, 1, 2, \ldots\}$ случайных величин с собственными распределениями и частично описали в (30) и (31) ее структуру. Подчеркнем, что это построение возможно только при выполнении условий (20) и (22). Если же дополнительно предположить, что справедливо еще и (21), то из (27) мы немедленно находим, что :

$$1 \leq \mu = \mathbf{E}\Delta_1 \overline{\nu} < \infty, \quad \mathbf{P}(\Delta_1 \overline{\nu} = 1) = \mathbf{P}(\eta^*(1) = 1)/q \geq \mathbf{P}(\xi_1 = 1)/q > 0. \tag{32}$$

2.6. **О структуре трансформированного блуждания.** Заметим, что в (29) построены бесконечные последовательности $\{\overline{\nu}_i\}$ and $\{\overline{T}_i\}$ собственных целочисленных случайных величин, для которых

$$0 \leq \overline{\nu}_0 < \overline{\nu}_1 < \cdots < \overline{\nu}_n < \ldots, \quad 0 \leq \overline{T}_0 < \overline{T}_1 < \cdots < \overline{T}_n < \ldots. \tag{33}$$

Из процедуры построения (23) - (29) вытекает, что построенная случайная последовательность $\{\overline{S}_t\}$ принимает те же возможные значения, что и $\{S_t\}$, но с другими вероятностями (отличающимися от исходных лишь умножением их на некоторые положительные случайные числа). Из этого факта следует, в частности, что

$$\max\{\overline{S}_t : t < \overline{T}_i\} < \overline{S}_{\overline{T}_i} = \overline{\nu}_i = \min\{\overline{S}_t : \overline{T}_i \leq t \leq \overline{T}_{i+1}\}, \quad i = 0, 1, \ldots. \tag{34}$$

А поскольку соотношения (34) выполняются для всех уровней $\overline{\nu}_0 < \overline{\nu}_1 < \ldots$, то это означает, что все эти уровни — разделяющие.

Более того, эти уровни разбивают временную ось на интервалы

$$\overline{T}_i := \overline{\tau}(\overline{\nu}_i) \leq t \leq \overline{\tau}(\overline{\nu}_{i+1}) = \overline{T}_{i+1}$$

и, по построению, приращения случайной последовательности $\{\overline{S}_t\}$ независимы на различных таких интервалах. По этой причине мы можем разделяющие уровни $\{\overline{\nu}_i\}$ называть уровнями регенерации (или обновления). И можем говорить, что трансформированное блуждание $\{\overline{S}_t\}$ имеет регенерирующую структуру.

Отметим еще

Свойство 3. *Случайные уровни $\{\overline{\nu}_i\}$ в (33) — это все неотрицательные разделяющие уровни трансформированного блуждания $\{\overline{S}_t\}$. В частности,*

$$\overline{B}(n) = \{\overline{\nu}_j = n \quad \textit{для некоторого} \quad j\} = \bigcup_{j=0}^{n} \{\overline{\nu}_j = n\}. \tag{35}$$

Напомним, что событие $\overline{B}(n)$ было определено в (7).

2.7. **Основные результаты.** Формально, следующее утверждение содержит формулу обращения для распределений исходного случайного блуждания в терминах трансформированного блуждания. Однако, на самом деле оно позволяет выявлять многие скрытые свойства распределений исходного случайного блуждания.

Теорема 1. *Пусть справедливы предположения* (A) *и* (Q)*. Тогда*

$$\mathbf{P}((S_0,\dots,S_k)\in A,\ \eta^*(n)=m)=\psi_0 q^n\mathbf{P}((\overline{S}_0,\dots,\overline{S}_k)\in A,\ \overline{\nu}(m)=n), \tag{36}$$

для любого множества $A\subset\mathcal{Z}^{k+1}$ *при всех целых* $n\ge k\ge 0$ *и* $m\ge 0$.

Поскольку $\eta^*(n)\le n$ и $\overline{\nu}(m)\ge m$ с вероятностью 1, то при $m>n$ равенство (36) также имеет место, поскольку обе части в нем обращаются в нуль.

Легко видеть, что в силу (18), при всех $A\subset\mathcal{Z}^{k+1}$

$$\mathbf{P}((S_0,\dots,S_k)\in A,\ B_n^*)=\sum_{m=0}^{n}\mathbf{P}((S_0,\dots,S_k)\in A,\ \eta(n)=m).$$

Аналогично, ввиду (35)

$$\mathbf{P}((\overline{S}_0,\dots,\overline{S}_k)\in A,\ \overline{B}_n)=\sum_{m=0}^{n}\mathbf{P}((\overline{S}_0,\dots,\overline{S}_k)\in A,\ \overline{\nu}(m)=n). \tag{37}$$

Суммируя теперь по m обе части равенства (36) мы находим, что доказано

Следствие 1. *Если верны предположения* (A) *и* (Q)*, то*

$$\mathbf{P}((S_0,\dots,S_k)\in A,\ B_n^*)=\psi_0 q^n\mathbf{P}((\overline{S}_0,\dots,\overline{S}_k)\in A,\ \overline{B}_n) \tag{38}$$

для любых множеств $A\subset\mathcal{Z}^{k+1}$ *при всех целых* $n\ge k\ge 0$*. В частности,*

$$\mathbf{P}(B_n^*)=\psi_0 q^n\mathbf{P}(\overline{B}_n)\quad \forall\ n\ge 0 \tag{39}$$

и равенство (6) *имеет место.*

Действительно, разделив (38) на (39) мы получим (6).

Далее, из (37) мы находим, что

$$V_n:=\mathbf{P}(\overline{B}(n)\,|\,\overline{\nu}_0=0)=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}(\overline{\nu}_j=n\,|\,\overline{\nu}_0=0)=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}\left(\sum\nolimits_{i=0}^{j}\Delta_i\overline{\nu}=n\right)$$

является функцией восстановления, соответствующей процессу восстановления, построенному по последовательности независимых и одинаково распределенных целочисленных случайных величин $\{\Delta_i\overline{\nu}\ge 1\}$. В этом случае вероятности

$$U_n:=\mathbf{P}((\overline{S}_0,\dots,\overline{S}_k)\in A,\ \overline{B}_n)=\mathbf{P}(\overline{A}_k,\ \overline{B}_n),\quad \text{где}\quad \overline{A}_k:=\{(\overline{S}_0,\dots,\overline{S}_k)\in A\},$$

удовлетворяют уравнению восстановления:

$$U_n=\mathbf{P}(\overline{A}_k,\overline{B}_n)=\sum_{m=k}^{n}\mathbf{P}(\overline{A}_k,\overline{\nu}_k=m)\cdot\mathbf{P}(\overline{B}_n|\overline{\nu}_k=m)=\sum_{m=k}^{n}\mathbf{P}(\overline{A}_k,\overline{\nu}_k=m)V_{n-m}.$$

Теперь из локальной теоремы восстановления, с учетом (32), мы имеем:

$$V_n\to 1/\mu,\quad U_n\to\sum_{m=k}^{\infty}\mathbf{P}(\overline{A}_k,\ \overline{\nu}_k=m)/\mu=\mathbf{P}(\overline{A}_k)/\mu. \tag{40}$$

Подстановка (40) в (38) и (39) приводит к следующему утверждению

Следствие 2. *В предположениях теоремы* 1*, для всех* $k \geq 0$ *и любых* $A \subset \mathcal{Z}^k$

$$\mathbf{P}((S_0, \dots, S_k) \in A,\ B_n^*)/q^n \to \psi_0 \mathbf{P}((\overline{S}_0, \dots, \overline{S}_k) \in A)/\mu. \tag{41}$$

В частности,

$$\mathbf{P}(\overline{B}_n) \to 1/\mu \quad \textit{и} \quad \mathbf{P}(B_n^*)/q^n \to \psi_0/\mu, \tag{42}$$

а потому (5) *также справедливо.*

Приведенные выше простые доказательства следствий 1 и 2 показывают силу теоремы 1.

Замечание 4. *В работе* [1] *для доказательства утверждения, аналогичного Следствию 2, использовались прямые комбинаторные выкладки, которые неприменимы в нашем более общем случае.*

3. Доказательства

3.1. **Предварительные замечания.** При доказательствах утверждений нам будет удобно иметь дело со случайными блужданиями, стартующими в моменты времени $t = j \geq 0$, а не в момент $t = 0$. При этом мы будем использовать следующие обозначения:

$$S_{j,t} := S_{j+t} - S_j, \quad \tau_j(n) = \inf\{t \geq 0 : S_{j,t} \geq n\}, \quad \Lambda_j(n) := \inf_{t \in [0, \tau_j(n)]} S_{j,t},$$

при $j, n, t \geq 0$. Введем далее случайную величину

$$h_j(k, l) := L_0 - \sup_{0 \leq x \leq l} \sum_{t=0}^{\tau_j(l)} \mathbf{1}\{k + S_{j,t} = x\}, \quad j, k \geq 0, \quad l \geq 1. \tag{43}$$

Для j, k и l из (43) имеем:

$$\{\tau(k + l) < \tau^*, \tau(k) = j, \Lambda_j(l) = 0\} = \{\tau(k) = j < \tau^*, \Lambda_j(l) = 0, h_j(k, l) \geq 0\}. \tag{44}$$

Равенство (44) следует из того факта, что если событие $\{\tau(k) = j, \Lambda_j(l) = 0\}$ произошло, то наше случайное блуждание в течение времени $t < j$ посещало только состояния из интервала $(-\infty, k)$, тогда как в течение следующего временного интервала $t \in [j, j + \tau_j(l)]$ блуждание посещало состояния из интервала $[k, k + l]$, который не имеет общих точек с предыдущим интервалом.

3.2. **Доказательство свойства 1.** Введем следующие события:

$$A_K := \{(S_0, \dots, S_K) \in A)\}, \quad C_K(N) := \{(\xi_{K+1}, \dots, \xi_N) \in C)\},$$
$$\tilde{A}_K(k) := \{\tau(k) = K < \tau^*\}, \quad \tilde{C}_K(k, l) := \{\Lambda_K(l) = 0, h_K(k, l) \geq 0\}$$

при K, k и l из (43), и введем также событие D, для которого имеется несколько эквивалентных представлений:

$$D := \{\tau(n) < \tau^*, \tau(k) = K, \lambda(k, n) = 0\} = \{\tau(n) < \tau^*, \tau(k) = K, \Lambda_K(n - k) = 0\}$$
$$= \{\tau(k) = K < \tau^*, \Lambda_K(n - k) = 0, h_K(k, n - k) \geq 0\} = \tilde{A}_K(k) \cap \tilde{C}_K(k, n - k).$$

Здесь мы использовали свойство (44).

Заметим, что события A_K и $\tilde{A}_K(k)$ принадлежат σ-алгебре, порожденной случайными величинами S_0 и $\{\xi_t, 1 \leq t \leq K\}$, тогда как события $C_K(N)$ и

$\tilde{C}_K(k,l)$ принадлежат независимой σ-алгебре, порожденной $\{\xi_t,\, t > K\}$. Следовательно, $A_K \cap \tilde{A}_K(k)$ и $C_K(N) \cap \tilde{C}_K(k, n-k)$ являются независимыми событиями и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(D \cap A_K \cap C_K(N)) &= \mathbf{P}(\tilde{A}_K(k) \cap \tilde{C}_K(k, n-k) \cap A_K \cap C_K(N)) \\ &= \mathbf{P}(\tilde{A}_K(k) \cap A_K) \cdot \mathbf{P}(\tilde{C}_K(k, n-k) \cap C_K(N)). \end{aligned} \tag{45}$$

По условию ($A3$) мы имеем постоянные ограничения для числа посещений при $t \geq 0$. А поскольку сдвиги случайного блуждания во времени и в пространстве сохраняют меру, то мы может заменить случайное блуждание $\{S_{K,t}\}$, которое начинается с уровня k, на случайное блуждание $\{S_t\}$, начинающееся с уровня $S_0 = 0$, чтобы получить:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{C}_K(k, n-k) \cap C_K(N)) &= \mathbf{P}(\tilde{C}_0(0, n-k) \cap C_0(N-K)) \\ &= \mathbf{P}_0(\tau(n-k) < \tau^*,\, C_0(N-K)). \end{aligned} \tag{46}$$

Таким образом, из (45) и (46) следует, что

$$\mathbf{P}(D \cap A_K \cap C_K(N)) = \mathbf{P}(\tilde{A}_K(k) \cap A_K) \cdot \mathbf{P}_0(\tau(n-k) < \tau^*,\, C_0(N-K)). \tag{47}$$

Итак, (16) доказано, так как оно совпадает с (47) с точностью до обозначений.

3.3. **Основная лемма.** Нам далее будет удобно использовать векторные обозначения:

$$S(l) := (S_0, \ldots, S_l), \quad \overline{S}(l) := (\overline{S}_0, \ldots, \overline{S}_l), \quad y(l) := (y_0, \ldots, y_l),$$
$$\xi_j(l) := (\xi_{j+1} \ldots, \xi_{j+l}), \quad \overline{\xi}_j(l) := (\overline{\xi}_{j+1} \ldots, \overline{\xi}_{j+l}), \quad x_j(l) := (x_{j+1} \ldots, x_{j+l}).$$

Используя формулу произведения вероятностей, мы можем извлечь из (23) – (25) следуюшие равенства:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(\overline{\nu}_0 = m,\, \overline{T}_0 = l,\, \overline{S}(l) = y(l)\right) = \mathbf{P}\left(\eta^*(m) = 0,\, \tau(m) = l,\, S(l) = y(l)\right) \\ &\quad = \mathbf{P}\left(\tau(m) = l < \tau^*,\, S(l) = y(l),\, \eta(0, m|y) = 0\right), \qquad l, m \geq 0, \end{aligned} \tag{48}$$

для любых целых $y_0, \ldots, y_l$. Подчеркнем, что здесь событие $\{\eta(0, m|y) = 0\}$ имеет вероятность 0 или 1 в зависимости от выбора последовательности y.

Нам потребуется

Свойство 4. *Пусть верны предположения* (A) *и* (Q). *Тогда*

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\overline{\nu}(m) = n, \overline{T}(m) = N, \overline{S}(N) = y(N)) \\ &\quad = \mathbf{P}(\tau(n) = N < \tau^*, S(N) = y(N), \eta(0, n|y) = m)/(\psi_0 q^n) \end{aligned} \tag{49}$$

для любых целых $N, m, n, y_0, \ldots, y_N$.

Доказательство. Не уменьшая общности далее будем предполагать, что

$$N \geq n \geq m \geq 0 \qquad \text{и} \qquad \tau(n|y) = N. \tag{50}$$

Действительно, если хотя бы одно условие в (49) нарушено, то равенство (49) справедливо очевидным образом, поскольку в этом случае обе части в (49) обращаются в нуль.

Для доказательства (49) при предположении (50) будем использовать индукцию по m. Если $m = 0$, то (49) следует непосредственно из (48). Далее, предположим, что утверждение леммы доказано для некоторого $m - 1 \geq 0$ и мы хотим доказать его для данного m. Фиксируем некоторые числа $y_0, \ldots, y_N$, удовлетворяющие всем условиям из (50), у которых $\eta(0, n|y) = m$. Поскольку

$m \geq 1$, то используя определение (2.2) величины $\eta(0, n|y)$, мы можем найти числа

$$k := \max\{j < n : \lambda(j, n|y) = 0\} \in [0, n), \qquad K := \tau(k|y).$$

Нетрудно понять, что при сделанных предположениях

$$\lambda(k, n|y) = 0, \quad \eta(k, n|y) = 1, \quad \eta(0, k|y) = m - 1 < m. \tag{51}$$

Последнее неравенство в (51) позволяет нам воспользоваться индукционным предположением и получить:

$$\overline{p}_k := \mathbf{P}(\overline{\nu}(m-1) = k, \overline{T}(m-1) = K, \overline{S}(K) = y(K)) = p_k/(\psi_0 q^k), \tag{52}$$

где

$$\begin{aligned} p_k &:= \mathbf{P}(\tau(k) = K < \tau^*, S(K) = y(K), \eta(0, k|y) = m - 1) \\ &= \mathbf{P}(\tau(k) = K < \tau^*, S(K) = y(K)), \end{aligned} \tag{53}$$

поскольку условие $\eta(0, k|y) = m - 1$ выполняется автоматически ввиду (51).

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \{\overline{S}(N) = y(N)\} &= \{\overline{S}(K) = y(K), \overline{\xi}_{K+1} = x_{K+1}, \dots, \overline{\xi}_N = x_N\} \\ &= \{\overline{S}(K) = y(K), \overline{\xi}_K(N - K) = x_K(N - K)\} \quad \text{при} \quad x_j := y_j - y_{j-1}. \end{aligned} \tag{54}$$

Используя (51) и (54), имеем

$$\overline{p}_n := \mathbf{P}(\overline{\nu}(m) = n, \overline{T}(m) = N, \overline{S}(N) = y(N)) = \mathbf{P}(\overline{A}_k \cap \overline{C}_{k,n}), \tag{55}$$

где

$$\overline{A}_k := \{\overline{\nu}(m-1) = k, \overline{T}(m-1) = K, \overline{S}(K) = y(K)\},$$
$$\overline{C}_{k,n} := \{\Delta_m(\overline{\nu}) = n - k, \Delta_m(\overline{T}) = N - K, \overline{\xi}_K(N - K) = x_K(N - K)\}.$$

Из процедуры построения трансформированного блуждания вытекает, что событие $\overline{C}_{k,n}$ не зависит от события $\overline{A}_k$. Значит

$$\overline{p}_n = \mathbf{P}(\overline{A}_k \cap \overline{C}_{k,n}) = \mathbf{P}(\overline{A}_k) \cdot \mathbf{P}(\overline{C}_{k,n}) = \overline{p}_k \mathbf{P}(\overline{C}_{k,n}). \tag{56}$$

Далее, из формул (27) – (29) при $M := N - K$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\overline{C}_{k,n}) &= \mathbf{P}_0(\tau(n-k) = M, \eta^*(n-k) = 1, \xi_0(M) = x_K(M))/(\psi_0 q^{n-k}) \\ &= \mathbf{P}_0(\tau(n-k) = M < \tau^*, \xi_0(M) = x_K(M))/(\psi_0 q^{n-k}), \end{aligned}$$

ибо условие $\eta(0, k|y) = m - 1$ автоматически следует из (51).

Рассмотрим наконец правую часть в (49). Применяя (51), находим

$$\begin{aligned} p_n &:= \mathbf{P}(\tau(n) = N < \tau^*, S(N) = y(N), \eta(0, n|y) = m) \\ &= \mathbf{P}(\tau(n) = N < \tau^*, \tau(k) = K,\ \lambda(k, n|y) = 0,\ S(N) = y(N)), \end{aligned}$$

поскольку условия $\eta(0, n|y) = m$ и $\lambda(k, n|y) = 0$ автоматически вытекают из (51). Теперь по аналогии с (54)

$$\{S(N) = y(N)\} = \{S(K) = y(K), \xi_K(N - K) = x_K(N - K)\}.$$

Следовательно, при $M = N - K$,

$$p_n = \mathbf{P}(\tau(n) = N < \tau^*, \tau(k) = K, \lambda(k, n) = 0, S(K) = y(K), \xi_K(M) = x_K(M)). \tag{57}$$

Применим теперь свойство 1. Подставляя (57) в (16), получаем

$$p_n = \mathbf{P}(\tau(k) = K < \tau^*, S(K) = y(K)) \cdot \mathbf{P}_0(\tau(n-k) = M < \tau^*, \xi_K(M) = x_K(M))$$

при $M = N - K$. Используя еще (53) и определение (55) вероятности $\mathbf{P}(\overline{C}_{k,n})$, имеем

$$p_n = p_k \mathbf{P}(\overline{C}_{k,n}) q^{n-k}. \tag{58}$$

Применяя теперь последовательно (56), (52) и (58), мы получаем, что

$$\overline{p}_n = \overline{p}_k \mathbf{P}(\overline{C}_{k,n}) = \frac{p_k}{\psi_0 q^k} \mathbf{P}(\overline{C}_{k,n}) = \frac{p_n}{\psi_0 q^k \cdot q^{n-k}} = \frac{p_n}{\psi_0 q^n}.$$

Но эта формула совпадает с требуемой (49) с точностью до обозначений. □

3.4. **Доказательства свойства 3 и теоремы 1.** Из свойства 4 вытекает, что при всех $m \geq 0$

$$\mathbf{P}(\overline{\nu}(m) = n, \eta(0, n|\overline{S}) > m) = \sum_{N=n}^{\infty} \mathbf{P}(\overline{T}(m) = N, \overline{\nu}(m) = n, \eta(0, n|\overline{S}) > m) \tag{59}$$

$$= \sum_{N=n}^{\infty} \sum_{y(N):\eta(0,n|y)>m} \mathbf{P}(\tau(n) = N < \tau^*, S(N) = y(N), \eta(0, n|y) = m)/(\psi_0 q^n).$$

Поскольку события $\eta(0, n|y) > m$ и $\eta(0, n|y) = m$ несовместны, то все вероятности в (59) равны нулю. Значит, при $\overline{\nu}(m) = n$ у блуждания $\{\overline{S}_t\}$ на промежутке $[0, n)$ не более m уровней могут быть n-разделяющими. Но случайные уровни $\{\overline{\nu}_i, i = 1, \ldots, m-1\}$ — это по построению m-разделяющие уровни на этом же промежутке, и их уже ровно m. Следовательно, никаких других n-разделяющих уровней на этом на промежутке быть не может. А других настоящих разделяющих уровней на этом на промежутке не может быть подавно.

Свойство 3 доказано. Приступим теперь к выводу теоремы 1. Для $n \geq k \geq 0$ и $n \geq m \geq 0$ имеем

$$\mathbf{P}(S(k) \in A,\ \eta^*(n) = m) = \sum_{N=n}^{\infty} \mathbf{P}(\tau(n) = N, S(k) \in A,\ \eta^*(n) = m) \tag{60}$$

$$= \sum_{N=n}^{\infty} \sum_{y(N):y(k)\in A} \mathbf{P}(\tau(n) = N, S(N) = y(N), \eta^*(n) = m).$$

Аналогично,

$$\mathbf{P}(\overline{S}(k) \in A,\ \overline{\nu}(m) = n) = \sum_{N=n}^{\infty} \mathbf{P}(\overline{T}(m) = N, \overline{S}(k) \in A, \overline{\nu}(m) = n) \tag{61}$$

$$= \sum_{N=n}^{\infty} \sum_{y(N):y(k)\in A} \mathbf{P}(\overline{T}(m) = N, \overline{S}(N) = y(N), \overline{\nu}(m) = n).$$

Но из свойства 4 с учетом определений (2.2) и (17) величин $\eta(0, n|y)$ и $\eta^*(n)$ следует, что при всех $N \geq n \geq m \geq 0$ для любых $y(N)$ справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\tau(n) = N, S(N) = y(N), \eta^*(n) = m)\\ &= \mathbf{P}(\tau(n) = N < \tau^*, S(N) = y(N), \eta(0, n|y) = m)\\ &= \psi_0 q^n \mathbf{P}(\overline{T}(m) = N, \overline{S}(N) = y(N), \overline{\nu}(m) = n).\end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в (60) и учитывая (61), мы немедленно находим требуемое равенство (36) в Теореме 1.

3.5. **Доказательство свойства 2.** В замечании 1 была описана идея, как результаты из [1] могут быть представлены как частный случай наших. Здесь мы приводим другой способ: достаточно положить

$$(62)\qquad S_0 = 0, \qquad \text{и} \qquad H(x) = H_{L_0}(x) := L_0 + \mathbf{1}_{\{x=0\}} \qquad \forall\, x \in \mathcal{Z}$$

с необычной функцией $H(x) \le L_0 + 1$.

Заметим, что в [1] условия (Q) были проверены в предложении 20 с некоторой константой ψ_0, которую мы здесь обозначим через $\psi(L_0)$, так как она зависит от L_0. Подчеркнем, что условия (20) и (21) совпадают в случаях, описанных в [1] и в свойстве 2, так как $H(x) = L_0$ для всех $x > 0$ в обоих случаях.

Таким образом, в свойстве 2 нам осталось лишь проверить (22). Воспользуемся следующими двумя соображениями. Во-первых, все вероятности вида $\mathbf{P}(\eta^*(n) = 0)$ не уменьшатся, если в предположении $(A2)$ мы величину $S_0 \le 0$ заменим на $S_0 = 0$. Действительно, в этом случае к событию $\{\eta^*(n) = 0\}$ добавятся траектории, которые начинались на уровне $x = S_0 < 0$, но не доходили до уровня $x = 0$.

Во-вторых, все вероятности $\mathbf{P}(\eta^*(n) = 0)$ не уменьшатся, если в предположении $(A3)$ мы функцию $H(x)$ заменим на большую, а именно, на:

$$(63)\qquad \forall\, x \in \mathcal{Z} \quad H_L(x) = L + \mathbf{1}_{\{x=0\}}, \quad \text{где} \quad L := \sup_x H(x) \ge L_0.$$

Действительно, при уменьшении числа ограничений новые траектории могут добавиться к событию $\{\eta^*(n) = 0\}$.

Итак, в соответствии с условиями из свойства 2 в нашем случае сумма в предположении (22) мажорируется аналогичной суммой в [1] с $\psi_0 = \psi(L)$. Здесь мы используем еще тот факт, что наша функция $H(x) = H_L(x)$ из (63) совпадает с функцией $H(x) = H_{L_0}(x)$ из (62) при замене числа L на L_0. $\square$

References

[1] I. Benjamini, N. Berectycki, *Random paths with bounded local time*, Journal of the European Mathematical Society, **12**:4 (2010), 819–854. MR2654081

[2] I. Benjamini, N. Berectycki, *An integral test for the transience of a Brownian path with limited local time*, Annales de l'Institut Henri Poincare - Probabilites et Statistiques, **47**:2 (2011), 539–558. MR2814422

[3] N. Berestycki, P. Moerters, N. Sidorova, *A conditioning principle for Galton-Watson trees*, $http://arxiv.org/abs/1006.2315$

[4] M. Kolb, M. Savov, *Transience and recurrence of a Brownian path with limited local time and its repulsion envelope*, $http://arxiv.org/abs/1312.4131$

Alexander Sakhanenko
Novosibirsk State University,
Pirogova Street, 1,
630090, Novosibirsk, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics,
Acad. Koptyug avenue, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: aisakh@mail.ru

Sergey Foss
Novosibirsk State University,
Pirogova Street, 1,
630090, Novosibirsk, Russia
Heriot-Watt University,
Riccarton Campus,
EH14 4AS, Edinburgh, UK;
E-mail address: s.foss@hw.ac.uk