S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1279–1288 (2017) УДК 512.5
DOI 10.17377/semi.2017.14.108 MSC 17A36

АВТОМОРФИЗМ НАГАТЫ СВОБОДНЫХ НЕАССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР РАНГА ДВА НАД ЕВКЛИДОВЫМИ КОЛЬЦАМИ

А.А. АЛИМБАЕВ, У.У. УМИРБАЕВ

Abstract. We construct an analogue of the Nagata automorphism of free nonassociative algebras and free commutative algebras of rank two over a Euclidean domain and prove that it is wild.

Keywords: polynomial algebra, free nonassociative algebra, tame and wild automorphism, Euclidean domain.

1. Введение

В 1942 году Х.В.Е. Юнг [1] доказал, что все автоморфизмы алгебры многочленов $\mathbf{k}[x, y]$ от двух переменных над полем $\mathbf{k}$ характеристики 0 являются ручными. В 1953 году В. ван дер Калк [2] обобщил этот результат для полей произвольной характеристики.

В 1972 году М. Нагата [3] построил автоморфизм

$$\sigma = (x + 2yw + w^2 z, y + wz, z), w = xz - y^2$$

алгебры многочленов $\mathbf{k}[x, y, z]$ и высказал гипотезу, что этот автоморфизм не является ручным (т.е. является диким). В 2004 году У. Умирбаев и И. Шестаков доказали [4, 5, 6], что автоморфизм Нагаты является диким в случае полей нулевой характеристики.

В работах Л. Макар-Лиманова [7] и А. Чернякевич [8] доказано, что автоморфизмы свободных ассоциативных алгебр ранга 2 являются ручными. Кроме того, ими было доказано, что группы автоморфизмов алгебр многочленов

Alimbaev, A.A., Umirbaev, U.U., The Nagata automorphism of free nonassociative algebras of rank two over Euclidean domains.

Работа поддержана МОН РК (грант 0538/GF4).

Поступила 5 октября 2017 г., опубликована 30 ноября 2017 г.

$\mathbf{k}[x,y]$ и свободной ассоциативной алгебры $\mathbf{k}\langle x,y\rangle$ от двух переменных изоморфны.

Автоморфизмы двупорожденных правосимметричных алгебр над произвольными полями [9] и двупорожденных свободных алгебр Пуассона над полями нулевой характеристики [10] также являются ручными.

В случае свободных ассоциативных алгебр ранга три вопрос о существовании диких автоморфизмов (проблема Кона) был решен У.У. Умирбаевым. Им было доказано [11], что автоморфизм Аника

$$\delta = (x + z(xz - zy), y + (xz - zy)z, z)$$

свободной ассоциативной алгебры $\mathbf{k}\langle x,y,z\rangle$ над полем характеристики 0 является диким.

В 1964 году П. Кон [12] доказал, что автоморфизмы конечно порожденных свободных алгебр Ли над произвольными полями являются ручными. В 1968 году Дж. Левин [13] обобщил этот результат для шрайеровых многообразий алгебр. Напомним, что шрайеровыми являются многообразия всех неассоциативных алгебр [14], коммутативных и антикоммутативных алгебр [15], алгебр Ли [16, 17] и супералгебр Ли [18, 19]. Следовательно, автоморфизмы свободных неассоциативных алгебр, свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр конечного ранга над полями также являются ручными.

Группы автоморфизмов конечно порожденных свободных алгебр над кольцами главных идеалов были исследованы в работах [20], [21]. В частности, один из результатов (Теорема 3, [21]) гласит, что автоморфизмы свободных неассоциативных алгебр над кольцами главных идеалов являются ручными.

В данной работе нами построен пример дикого автоморфизма свободной неассоциативной алгебры и коммутативной алгебры ранга два над евклидовыми кольцами. Этот пример является аналогом автоморфизма Нагаты. Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы приведем необходимые определения и известное представление группы ручных автоморфизмов алгебры $\Phi[x_1,x_2]$ над произвольной областью целостности Φ в виде свободного произведения подгрупп с объединенной подгруппой и сформулируем некоторые полезные утверждения о степени ручных автоморфизмов. В разделе 3 докажем, что всякий ручной автоморфизм алгебры $\Phi[x_1,x_2]$ над евклидовым кольцом Φ является элементарно сократимым. В разделе 4 построен дикий автоморфизм свободных неассоциативных алгебр и свободных коммутативных алгебр ранга 2 над евклидовым кольцом Φ.

2. Представление автоморфизмов алгебры $\Phi[x_1,x_2]$

Пусть Φ — произвольная область целостности и $P = \Phi[x_1,x_2]$ — алгебра многочленов от двух переменных над Φ. Множество всех обратимых элементов Φ обозначим через Φ^*.

Пусть $Aut(P)$ — группа всех автоморфизмов алгебры P. Обозначим через $\phi = (f_1,f_2)$ автоморфизм алгебры P такой, что $\phi(x_i) = f_i$, $1 \le i \le 2$.

Автоморфизмы вида

$$\delta_1 : \begin{cases} x_1 \mapsto \alpha x_1 + f(x_2) \\ x_2 \mapsto x_2 \end{cases}, \quad \delta_2 : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 \\ x_2 \mapsto \beta x_2 + g(x_1) \end{cases},$$

где $\alpha, \beta \in \Phi^*$ называются *элементарными*. Подгруппа $T(P)$ группы $Aut(P)$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется *подгруппой ручных автоморфизмов*. Автоморфизм $\varphi \in Aut(P)$ называется *ручным*, если $\varphi \in T(P)$, иначе φ называется *диким*.

Элементарным преобразованием системы элементов (f_1, f_2) называется замена одного элемента f_i на элемент вида $\alpha f_i + g$, где $\alpha \in \Phi^*, g \in \langle f_j | j \neq i \rangle$.

Запись

$$(f_1, f_2) \to (g_1, g_2)$$

означает, что система элементов (g_1, g_2) получена из системы элементов (f_1, f_2) одним элементарным преобразованием.

Если (f_1, f_2) — ручной автоморфизм алгебры P, то существует последовательность элементарных преобразований вида

$$(x_1, x_2) = (f_1^{(0)}, f_2^{(0)}) \to (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}) \to \ldots \to (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}) = (f_1, f_2).$$

Если

$$\varphi = (f_1, f_2),\ \psi = (g_1, g_2),$$

то произведение в $Aut(P)$ определяется по формуле

$$\varphi \circ \psi = (g_1(f_1, f_2), g_2(f_1, f_2)).$$

Автоморфизм λ алгебры P называется *аффинным*, если

$$\lambda = (a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1, a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2),$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \in \Phi^*,\ a_i, b_i, c_i \in \Phi.$$

Группу аффинных автоморфизмов алгебры P обозначим через $Af_2(\Phi)$.

Автоморфизм μ алгебры P называется *треугольным*, если

$$\mu = (a x_1 + h(x_2), b x_2 + b_1),$$

где $a, b \in \Phi^*,\ b_1 \in \Phi,\ h(x_2) \in \Phi[x_2]$. Через $Tr_2(\Phi)$ обозначим группу треугольных автоморфизмов алгебры $P = \Phi[x_1, x_2]$.

Пусть $\mathbf{k}$ — произвольное поле. Тогда $T(\mathbf{k}[x_1, x_2]) = Aut(\mathbf{k}[x_1, x_2])$[1, 2]. Более того, $Aut(\mathbf{k}[x_1, x_2])$ имеет хорошо известное представление в виде свободного произведения подгрупп с объединенной подгруппой:

Теорема 1. [3] *Группа автоморфизмов алгебры $\mathbf{k}[x_1, x_2]$ является свободным произведением подгрупп аффинных автоморфизмов $Af_2(\mathbf{k})$ и треугольных автоморфизмов $Tr_2(\mathbf{k})$ с объединенной подгруппой $H(\mathbf{k}) = Af_2(\mathbf{k}) \cap Tr_2(\mathbf{k})$, т.е.*

$$Aut(\mathbf{k}[x_1, x_2]) = Af_2(\mathbf{k}) *_{H(\mathbf{k})} Tr_2(\mathbf{k}).$$

Следствие 1. [22] *Пусть Φ — произвольная область целостности. Группа ручных автоморфизмов $T(P)$ алгебры $P = \Phi[x_1, x_2]$ является свободным произведением подгрупп аффинных автоморфизмов $Af_2(\Phi)$ и треугольных автоморфизмов $Tr_2(\Phi)$ с объединенной подгруппой $H(\Phi) = Af_2(\Phi) \cap Tr_2(\Phi)$, т.е.*

$$T(P) = Af_2(\Phi) *_{H(\Phi)} Tr_2(\Phi).$$

Приведем некоторые необходимые для нас факты из доказательств этих утверждений [22, 23].

Множество

$$B_0 = \left\{ \tau = (x_1 + h(x_2), x_2) | h(x_2) \in x_2^2 \Phi[x_2] \right\}$$

является системой представителей левых смежных классов группы $Tr_2(\Phi)$ по подгруппе $Af_2(\Phi) \cap Tr_2(\Phi)$. Заметим, что B_0 включает единицу при $h = 0$.

Пусть A_0 — произвольная фиксированная система представителей (включающая единицу) левых смежных классов группы $Af_2(\Phi)$ по подгруппе $Af_2(\Phi) \cap Tr_2(\Phi)$.

Тогда любой ручной автоморфизм $\phi \in T(P)$ однозначно представим в виде

$$\phi = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k \circ \lambda, \tag{1}$$

где $\sigma_i \in A_0, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \neq id, \tau_i \in B_0, \tau_1, \ldots, \tau_k \neq id, \lambda \in Af_2(\Phi)$.

Если $\phi = (f, g)$, то положим

$$\deg(\phi) = \max\{\deg(f), \deg(g)\}.$$

Предложение 1. [22, 23] *Пусть*

$$\psi = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k = (f, g),$$

где $\sigma_i \in A_0, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \neq id, \tau_i \in B_0, \tau_1, \ldots, \tau_k \neq id,\ \deg(\tau_i) = n_i > 1.$
Тогда

$$\deg(f) = n_1 \cdots n_k,\ \deg(g) = n_1 \cdots n_{k-1},\ \deg(\psi) = n_1 \cdots n_k.$$

3. О сократимости ручных автоморфизмов

Обозначим через $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ множество неотрицательных целых чисел. Целостное кольцо Φ, не являющееся полем, называется *евклидовым* [24], если существует функция $|\cdot| : \Phi \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ (называемая нормой), удовлетворяющая следующим условиям:

E1) для любых $a, b \in \Phi \setminus \{0\}$, $|ab| \geq |a|$, причем равенство имеет место только тогда, когда элемент b обратим;

E2) для любых $a, b \in \Phi$, где $b \neq 0$, существуют такие $q, r \in \Phi$, что $a = bq + r$ и либо $r = 0$, либо $|r| < |b|$.

Положим $e = |1| \in \mathbb{Z}_+$, где $1 \in \Phi$—единица кольца Φ. Имеем $|a| = e$ тогда и только тогда, когда $a \in \Phi^*$.

Основными примерами евклидовых колец являются кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел с абсолютным значением целых чисел и кольцо $\mathbf{k}[x]$ многочленов над полем $\mathbf{k}$ со степенью многочленов. Следовательно, $e = 1$ в кольце $\mathbb{Z}$ и $e = 0$ в кольце $\mathbf{k}[x]$.

Пусть $\Phi[x_1, x_2]$ — алгебра многочленов от двух переменных над евклидовым кольцом Φ. Введем линейный порядок $\geq$ на множестве базисных слов $W = \left\{x_1^l x_2^m | l, m \in \mathbb{Z}_+\right\}$. Положим $x_1 > x_2$. Пусть $\deg$ — обычная функция степени в $\Phi[x_1, x_2]$ и $\deg_{x_i}$ — функция степени по x_i. Если $u, v \in W$, то положим $u < v$, если выполняется одно из следующих условий:

(i) $\deg(u) < \deg(v)$;

(ii) $\deg(u) = \deg(v)$, $\deg_{x_1}(u) < \deg_{x_1}(v)$.

Каждый ненулевой элемент $f \in \Phi[x_1, x_2]$ записывается однозначно в виде

$$f = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n,\ 0 \neq \alpha_i \in \Phi, w_1 > w_2 > \ldots > w_n \in W.$$

Слово w_1 называется старшим словом (мономом) f, а α_1 называется старшим коэффициентом f. Обозначим их через $\overline{f}$ и $lc(f)$ соответственно. Через $f' = \alpha_1 w_1$ обозначим старший член элемента f.

Пусть f — произвольный элемент из $\Phi[x_1, x_2]$. Положим

$$D(f) = (\overline{f}, |lc(f)|)$$

и назовем $D(f)$ показателем элемента f.

Пусть $\varphi = (f_1, f_2)$ — автоморфизм алгебры $\Phi[x_1, x_2]$. Тогда показателем автоморфизма φ назовем

$$D(\varphi) = (u, v, |lc(f_1)| + |lc(f_2)|) \in W^2 \times Z_+,$$

где $\{u, v\} = \left\{\overline{f_1}, \overline{f_2}\right\}$ и $u \geq v$.

Заметим, что D — инвариантно относительно перестановки компонент автоморфизма, т.е.

$$D(f_1, f_2) = D(f_2, f_1).$$

Имеем

$$D(id) = (x_1, x_2, 2e),$$

где $id = (x_1, x_2)$ — тождественный автоморфизм. Более того, $D(f_1, f_2) = (x_1, x_2, 2e)$ тогда и только тогда, когда элементы f_1, f_2 имеют следующий вид:

$$f_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1,\ f_2 = \beta_2 x_2 + \gamma_2, \tag{2}$$

или

$$f_1 = \beta_3 x_2 + \gamma_3,\ f_2 = \alpha_2 x_1 + \beta_4 x_2 + \gamma_4, \tag{3}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3 \in \Phi^*$ и $\beta_1, \beta_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \Phi$.

Обозначим через $\preceq$ лексикографический порядок на множестве $W^2 \times Z_+$. Заметим, что множество $W^2 \times Z_+$ линейно упорядочено относительно $\preceq$.

Автоморфизм $\theta = (f_1, f_2)$ называется *элементарно D-сократимым* (или θ *допускает элементарное D-сокращение*), если существует автоморфизм ψ такой, что $\theta \to \psi$ и $D(\psi) \prec D(\theta)$. Будем говорить, что *автоморфизм ψ является элементарным D-сокращением автоморфизма θ.*

Следствие 2. *Если автоморфизм $\theta = (f_1, f_2)$ допускает элементарное D-сокращение, то $f'_1 \in \langle f'_2 \rangle$ или $f'_2 \in \langle f'_1 \rangle$.*

Доказательство. Допустим, что автоморфизм $\psi = (g_1, g_2)$ такой, что $\theta \to \psi$ и $D(\psi) \prec D(\theta)$, элементарно D-сокращает элемент f_1 автоморфизма θ. Следовательно,

$$g_2 = f_2,\ g_1 = \alpha f_1 + s(f_2),$$

где $\alpha \in \Phi^*, s(f_2) \in \langle f_2 \rangle$. Так как $D(g_1) \prec D(f_1)$, то $\alpha f'_1 + s(f_2)' = 0$. Следовательно, $\alpha f'_1 + s'(f'_2) = 0 \Rightarrow -\alpha f'_1 = s'(f'_2) \Rightarrow f'_1 \in \langle f'_2 \rangle$. Аналогично, если автоморфизм ψ элементарно D-сокращает элемент f_2 автоморфизма θ, то $f'_2 \in \langle f'_1 \rangle$. □

Лемма 1. *Пусть $\pi = (h_1, h_2)$ — автоморфизм алгебры $\Phi[x_1, x_2]$. Если старшие слова элементов h_1, h_2 равны, то автоморфизм π является элементарно D-сократимым.*

Доказательство. Так как $\overline{h_1} = \overline{h_2}$, то без ограничения общности предположим, что $|lc(h_1)| \geq |lc(h_2)|$. По E1) существуют $q, r \in \Phi$ такие, что $lc(h_1) = lc(h_2)q + r$ и либо $r = 0$, либо $|r| < |lc(h_2)|$. Рассмотрим элементарное преобразование

$$\pi = (h_1, h_2) \to (h_1 - qh_2, h_2) = \delta.$$

Имеем $D(h_1) \succ D(h_1 - qh_2)$. Следовательно, $D(\pi) \succ D(\delta)$ и автоморфизм π является элементарно D-сократимым. $\square$

Характеризацию ручных автоморфизмов алгебры $P = \Phi[x_1, x_2]$ дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\phi = (f_1, f_2)$ — ручной автоморфизм алгебры $\Phi[x_1, x_2]$. Если*

$$D(\phi) \succ (x_1, x_2, 2e),$$

то автоморфизм ϕ является элементарно D-сократимым.

Доказательство. По следствию 1 автоморфизм ϕ записывается в виде (1). Рассмотрим случай когда $\lambda = id$. Тогда

$$\phi = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k = (f, g).$$

Положим

$$\psi = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \sigma_k = (p, q).$$

Если $\tau_k = (x_1 + h_k(x_2), x_2)$, то

$$\phi = (p + h_k(q), q) = (f, g).$$

Так как $\deg(\tau_i) = n_i$, то по предложению 1 имеем

$$\deg(\psi) = n_1 \cdots n_{k-1}, \quad \deg(\phi) = n_1 \cdots n_{k-1} n_k,$$

$$\deg(\psi) < \deg(\phi) \text{ и } D(\psi) \prec D(\phi).$$

Поскольку

$$\phi \to \psi,$$

то автоморфизм ϕ является элементарно D-сократимым.

Допустим, что

$$\lambda = (a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1, a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2) \neq id.$$

Положим

$$\omega = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k = (p + h_k(q), q) = (r, s).$$

Тогда по предложению 1 $\deg(r) = n_1 n_2 \cdots n_k > \deg(s) = n_1 n_2 \cdots n_{k-1}$. Следовательно,

$$\phi = \omega \circ \lambda = (a_1 r + b_1 s + c_1, a_2 r + b_2 s + c_2) = (f, g).$$

Более того,

$$r' = h'_k(s').$$

Если $a_1, a_2 \neq 0$, то $\overline{f} = \overline{g}$ и по лемме 1 автоморфизм ϕ элементарно D-сократим.

Если $a_1 = 0$, то $f' = b_1 s'$, $g' = a_2 r' = a_2 h'_k(s)$ и $b_1, a_2 \in \Phi^*$. Тогда имеем, что

$$D(\phi) = (\overline{s}^{n_k}, \overline{s}, |b_1 lc(g)| + |a_2 lc(f)|) = (\overline{s}^{n_k}, \overline{s}, |lc(g)| + |lc(f)|).$$

В этом случае автоморфизм $\psi = (f, g - a_2 h_k({b_1}^{-1} f))$ является элементарным D-сокращением ϕ.

Если $a_2 = 0$, то $f' = a_1 r' = a_1 h'_k(s), g' = b_2 s'$ и $b_2, a_1 \in \Phi^*$. Этот случай симметричен предыдущему. $\square$

Следствие 3. *Ручные и дикие автоморфизмы алгебры $\Phi[x_1, x_2]$ над конструктивным евклидовым кольцом Φ алгоритмически распознаваемы.*

Доказательство. Проведем индукцию по показателю $D(\phi)$ автоморфизма $\phi \in Aut(\Phi[x_1, x_2])$. Если $D(\phi) = (x_1, x_2, 2e)$, то ϕ имеет вид (2) или (3). Следовательно, автоморфизм ϕ является линейным. Так как любая обратимая матрица над евклидовым кольцом является произведением элементарных и диагональных матриц [24], то линейные автоморфизмы являются ручными.

Если автоморфизм ϕ не является элементарно D-сократимым, то ϕ является диким по теореме 2. Если ϕ элементарно D-сократим, по следствию 2 эффективно найдется ϕ' такой, что $D(\phi') \prec D(\phi)$. Очевидно, ϕ является ручным тогда и только тогда, когда ϕ' является ручным автоморфизмом. Так как $D(\phi') \prec D(\phi)$, то индуктивное предположение завершает доказательство. $\square$

4. Аналог автоморфизма Нагаты

Пусть Φ — евклидово кольцо и $0 \neq z \in \Phi \setminus \Phi^*$. Положим, что $K = Q(\Phi)$ — поле частных кольца Φ. Рассмотрим следующую последовательность элементарных преобразований алгебры $K[x_1, x_2]$ над полем частных K :

$$(x_1, x_2) \to (zx_1, x_2) \to (zx_1 - x_2^2, x_2) \to (zx_1 - x_2^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2))$$

$$\to (zx_1 - x_2^2 + (x_2 + z(zx_1 - x_2^2))^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2)) =$$

$$= (z(x_1 + 2x_2(zx_1 - x_2^2) + z(zx_1 - x_2^2)^2), x_2 + z(zx_1 - x_2^2))$$

$$\to (x_1 + 2x_2(zx_1 - x_2^2) + z(zx_1 - x_2^2)^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2)) = \sigma.$$

Мы получили автоморфизм Нагаты σ и он является ручным над K. Заметим, что σ является автоморфизмом алгебры $\Phi[x_1, x_2]$. В своей известной работе [3] М. Нагата доказал, что σ является диким автоморфизмом алгебры $\Phi[x_1, x_2]$, если $\Phi = \mathbf{k}[z]$ — кольцо многочленов от одной переменной z. Следующее следствие является обобщением этого результата на случай произвольного евклидова кольца Φ.

Следствие 4. *Автоморфизм Нагаты*

$$\sigma = (f, g) = (x_1 + 2x_2 w + zw^2, x_2 + zw),\ w = zx_1 - x_2^2,\ 0 \neq z \in \Phi \setminus \Phi^*$$

как автоморфизм алгебры $\Phi[x_1, x_2]$ *над* Φ *является диким.*

Доказательство. Достаточно показать, что σ не является элементарно D-сократимым. Допустим, что σ является элементарно D-сократимым. Тогда по следствию 2, $f' \in \langle g' \rangle$ или $g' \in \langle f' \rangle$. Так как

$$f' = zx_2^4, \quad g' = zx_2^2,$$

то $f' \notin \langle g' \rangle$ и $g' \notin \langle f' \rangle$. Следовательно, автоморфизм σ не является элементарно D-сократимым и по теореме 2 не является ручным. $\square$

Пусть $A = \Phi\langle x_1, x_2\rangle$ — свободная неассоциативная алгебра с множеством свободных порождающих $X = \{x_1, x_2\}$ над евклидовым кольцом Φ. Рассмотрим автоморфизмы алгебры A. Пусть $0 \neq z \in \Phi \setminus \Phi^*$. Применяя те же преобразования, что и при построении автоморфизма σ, в алгебре A получаем

$$\begin{aligned}
&(x_1, x_2) \to (zx_1, x_2) \to (zx_1 - x_2^2, x_2) \to (zx_1 - x_2^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2)) \\
&\quad \to (zx_1 - x_2^2 + (x_2 + z(zx_1 - x_2^2))^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2)) = \\
&(z(x_1 + zx_2x_1 - x_2x_2^2 + zx_1x_2 - x_2^2x_2 + z^3{x_1}^2 - z^2x_1x_2^2 - z^2x_2^2x_1 + zx_2^2x_2^2), \\
&\qquad x_2 + z(zx_1 - x_2^2)) \\
&\to (x_1 + zx_2x_1 - x_2x_2^2 + zx_1x_2 - x_2^2x_2 + z^3{x_1}^2 - z^2x_1x_2^2 - z^2x_2^2x_1 + zx_2^2x_2^2, \\
&\qquad x_2 + z(zx_1 - x_2^2)) \\
&= (x_1 + x_2(zx_1 - x_2^2) + (zx_1 - x_2^2)x_2 + z(zx_1 - x_2^2)^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2)).
\end{aligned}$$

Это дает эндоморфизм

$$\eta = (x_1 + x_2(zx_1 - x_2^2) + (zx_1 - x_2^2)x_2 + z(zx_1 - x_2^2)^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2))$$

алгебры A.

Лемма 2. *Эндоморфизм η является автоморфизмом алгебры $A = \Phi\langle x_1, x_2\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\eta = (b_1, b_2)$. Подалгебра $\Phi\langle b_1, b_2\rangle$, порожденная элементами b_1, b_2 над Φ, является свободной, так как линейные части элементов b_1, b_2 порождают свободную алгебру. Докажем, что $\Phi\langle x_1, x_2\rangle = \Phi\langle b_1, b_2\rangle$. Для этого достаточно показать, что элементы b_1, b_2 порождают всю алгебру $\Phi\langle x_1, x_2\rangle$. Непосредственные вычисления дают

$$zb_1 - b_2^2 = zx_1 - x_2^2 = s_1,$$

$$b_2 - z(zb_1 - b_2^2) = x_2 = s_2,$$

$$zb_1 - b_2 + (b_2 - z(zb_1 - b_2^2))^2 = zx_1 = s_3,$$

$$b_1 - s_2s_3 + s_2s_2^2 - s_3s_2 + s_2^2s_2 - zs_3^2 + zs_3s_2^2 + zs_2^2s_3 - zs_2^2s_2^2 = x_1 = s_4.$$

Отсюда s_1, $s_2 = x_2$, $s_3, s_4 = x_1 \in \Phi\langle b_1, b_2\rangle$, т.е. $x_1, x_2 \in \Phi\langle b_1, b_2\rangle$. Следовательно, $\Phi\langle x_1, x_2\rangle = \Phi\langle b_1, b_2\rangle$. □

Теорема 3. *Автоморфизм η алгебры $A = \Phi\langle x_1, x_2\rangle$ является диким.*

Доказательство. Пусть $\Phi[x, y]$ — алгебра многочленов со множеством свободных порождающих $X = \{x, y\}$ над евклидовым кольцом Φ. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\tau : A \to \Phi[x, y],$$

где $\tau(x_1) = x$ и $\tau(x_2) = y$. Этот гомоморфизм индуцирует гомоморфизм

$$\tau^* : Aut(A) \to Aut(\Phi[x, y]),$$

определенный правилом

$$\tau^*(\psi)(\tau(f)) = (\tau \circ \psi)(f),$$

где $\psi \in Aut(A), f \in A$.

Элементарному автоморфизму алгебры A соответствует элементарный автоморфизм алгебры $\Phi[x, y]$. Так как группа ручных автоморфизмов алгебры A порождается элементарными автоморфизмами алгебры A, то гомоморфный образ ручного автоморфизма алгебры A является ручным автоморфизмом алгебры $\Phi[x, y]$, т.е. τ^* индуцирует гомоморфизм групп ручных автоморфизмов

$$\tau^* : T(A) \longmapsto T(\Phi[x, y]).$$

Так как

$$\tau^*(\eta)(\tau(x_1)) = (\tau \circ \eta)(x_1) = \tau(\eta(x_1)) = \tau(b_1)$$

и

$$\tau^*(\eta)(\tau(x_2)) = (\tau \circ \eta)(x_2) = \tau(\eta(x_2)) = \tau(b_2),$$

то

$$\tau^*(\eta) = (\tau(b_1), \tau(b_2)) = (x + 2y(zx - y^2) + z(zx - y^2)^2, y + z(zx - y^2)) = \sigma$$

есть автоморфизм Нагаты алгебры $\Phi[x, y]$ над Φ. По следствию 4 автоморфизм Нагаты σ алгебры $\Phi[x, y]$ над Φ является диким. Следовательно, η является диким, так как его гомоморфный образ является диким. $\square$

Доказательство теоремы 3 полностью проходит и для свободных неассоциативных коммутативных алгебр. Следовательно, автоморфизм

$$\omega = (x + 2y(zx - y^2) + z(zx - y^2)^2, y + z(zx - y^2)),\ 0 \neq z \in \Phi \setminus \Phi^*,$$

свободной неассоциативно-коммутативной алгебры $B = \Phi_C \langle x, y \rangle$ над евклидовым кольцом Φ также является диким.

References

[1] H.W.E. Jung, *Uber ganze birationale Transformationen der Ebene*, J. Reine Angew. Math., **184** (1942), 161–174. MR0008915

[2] W. van der Kulk, *On polynomial rings in two variables*, Nieuw Arch. Wiskunde (3), **1** (1953), 33–41. MR0054574

[3] M. Nagata, *On the automorphism group of k[x, y]*, Kinokuniya, Tokyo: Kyoto Univ.(Lect. in Math.), 1972. MR0337962

[4] U.U. Umirbaev, I.P. Shestakov, *Subalgebras and automorphisms of polynomial rings*, Dokl. Akad. Nauk, **386**:6 (2002), 745–748. MR2004473

[5] I.P. Shestakov, U.U. Umirbaev, *The Nagata automorphism is wild*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **100**:22 (2003), 12561–12563. MR2017754

[6] I.P. Shestakov and U.U. Umirbaev, *Tame and wild automorphisms of rings of polynomials in three variables*, J. Amer. Math. Soc., **17** (2004), 197–227. MR2015334

[7] L. Makar-Limanov, *The automorphisms of the free algebra of two generators*, Funksional. Anal. i Prilozhen., **4**:3 (1970), 107–108; English translation: in Functional Anal. Appl., **4** (1970), 262–263. MR0271161

[8] A.G. Czerniakiewicz, *Automorphisms of a free associative algebra of rank 2*, I, II, Trans. Amer. Math. Soc., **160** (1971), 393–401; **171** (1972), 309–315. MR0280549; MR0310021

[9] D. Kozybaev, L. Makar-Limanov, U. Umirbaev, *The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras*, Asian-European J. Math., **1**:2 (2008), 243–254. MR2431177

[10] L. Makar-Limanov, U. Turusbekova, U. Umirbaev, *Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables*, J. Algebra, **322**:9 (2009), 3318–3330. MR2567422

[11] U.U. Umirbaev, *The Anick automorphism of free associative algebras*, J. Reine Angew. Math., **605** (2007), 165–178. MR2338130

[12] P.M. Cohn, *Subalgebras of free associative algebras*, Proc. London Math. Soc. (3), **14** (1964), 618–632. MR0167504

[13] J. Lewin, *On Schreier varities of linear algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **132** (1968), 553–562. MR0224663

[14] A.G. Kurosh, *Nonassociative free algebras and free products of algebras*, Mat. Sb., **20** (1947), 239–262. MR0020986

[15] A.I. Shirshov, *Subalgebras of free commutative and free anticommutative algebras*, (Russian) Mat. Sb. (N.S.), **34 (76)** (1954), 81—88. MR0062112

[16] A.I. Shirshov, *Subalgebras of free Lie algebras*, (Russian) Mat. Sb. (N.S.), **33 (75)** (1953), 441–452. MR0059892
[17] E. Witt, *Die Unterringe der freien Lieschen Ringe*, Math. Z., **64** (1956), 195–216. MR0077525
[18] A.A. Mikhalev, *Subalgebras of free colored Lie superalgebras*, Mat. Zametki, **37**:5 (1985), 653–661. MR0797705
[19] A.S. Shtern, *Free Lie superalgebras*, Sibirsk. Mat. Zh., **27**:1 (1986), 170–174.
[20] G.V. Kryazhovskikh, G.P. Kukin, *On subrings of free rings*, Siberian Math. J., **30**:6 (1989), 87–97. MR0847425
[21] G.V. Kryazhovskikh, G.P. Kukin, *Algorithmic properties of free rings*, Siberian Math. J., **32**:6 (1991), 87–99. MR1156748
[22] D. Wright, *The amalgamated free product structure of* $GL_2(k[x_1,...,x_n])$, J. Pure Appl. Algebra, **12** (1978), 235–251. MR0501951
[23] V. Drensky, J.-T. Yu, *Automorphisms of polynomial algebras and Dirichlet series*, J. Algebra, **321** (2009), 292–302. MR2469362
[24] E.B. Vinberg, *A Course in Algebra*, Amer. Math. Soc., 2003. MR1974508

Alibek Alimbaev
Kostanay State Pedagogical Institute,
Tauelsizdik street, 118,
110000, Kostanay, Kazakhstan
E-mail address: alialimbaev@gmail.com

Ualbai Umirbaev
Wayne State University,
656 W. Kirby,
Detroit, MI 48202, USA
E-mail address: umirbaev@math.wayne.edu