S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1307–1316 (2017) УДК 519.213,519.233.22

DOI 10.17377/semi.2017.14.111 MSC 60G51,62F12

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ТОЧКИ РАЗРЫВА ПЛОТНОСТИ

В.Е. МОСЯГИН, Н.А. ШВЕМЛЕР

Abstract. Consider a random sample from the probability density function with exactly one jump point, which depends on an unknown parameter to be evaluated. The local properties of the limiting distribution of the normalized maximum likelihood estimators for the parameter are investigated. The so-called integro-local estimates for this limiting distribution are obtained. As an application it is shown that these estimates allow simplifying the problem of obtaining the rates of convergence for the distributions of the normalized maximum likelihood estimators.

Keywords: Estimation of unknown jump point of a probability density function, maximum likelihood estimators, integro-local estimates, limiting distributions of statistical estimators.

1. Введение. Постановка задачи

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка, состоящая из независимых случайных величин с общей плотностью $f(x, \theta)$ (относительно меры Лебега), зависящей от неизестного параметра $\theta \in \Theta \subset R$ с истинным фиксированным значением θ_0. Предполагается, что функция $f(x, \theta)$ непрерывна по x всюду кроме точки $x(\theta)$, в которой она имеет разрыв первого рода:

$$0 \neq q(\theta) = f(x(\theta) - 0, \theta) \neq f(x(\theta) + 0, \theta) = p(\theta) \neq 0, \quad \theta \in \Theta. \tag{1}$$

Линию разрыва $x(\theta)$ будем считать гладкой с производной $x'(\theta) \neq 0$, $\theta \in \Theta$.

Mosyagin, V.E., Shvemler, N.A., Local properties of the limiting distribution of the statistical estimator for jump point of a density.

Работа поддержана РФФИ (грант РФФИ 15-01-07460а).

Поступила 3 апреля 2017 г., опубликована 4 декабря 2017 г.

Обозначим через θ_n^* оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметра θ_0 (см. [1], с. 360), а через $t_n^* = n(\theta_n^* - \theta_0)$ нормированные ОМП, в которых достигают максимума случайные процессы

$$Y_n(t) = \sum_{i \leqslant n} \ln \left(f\left(X_i, \theta_0 + t/n\right) / f\left(X_i, \theta_0\right) \right), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

В монографии [1] доказано, что при $n \to \infty$ и соответствующих предположениях распределения процессов из (2) сходятся в определенном смысле к распределению процесса

$$\begin{aligned} Z(t) = {} & (p(\theta_0) - q(\theta_0))\, x'(\theta_0) t \\ & - \left(\nu_+ \left(p(\theta_0) x'(\theta_0) t\right) - \nu_- \left(-q(\theta_0) x'(\theta_0) t\right)\right) \ln \left(p(\theta_0)/q(\theta_0)\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\nu_\pm(t)$ — независимые стандартные пуассоновские процессы при $t \geqslant 0$, которые доопределены нулем на отрицательной оси. В [1] также установлен факт сходимости по распределению $t_n^* \Rightarrow t^*$, где предельная величина t^* является моментом достижения максимума процессом (3), а в работе [2] при более жестких условиях, чем в [1, с. 324], была получена оценка скорости этой сходимости:

$$\sup_{|x| < \infty} \left| \mathbf{P}\left(t_n^* < x\right) - \mathbf{P}\left(t^* < x\right) \right| \leqslant O(\ln^2 n/n). \tag{4}$$

Следует отметить, что сам факт сходимости $t_n^* \Rightarrow t^*$ и оценка (4) были установлены без знания явного вида допредельных t_n^* и предельной t^* величин, а также их распределений. Последние обстоятельства существенно затрудняют решение задачи о нахождении оптимальной скорости сходимости:

$$\sup_{|x| < \infty} \left| \mathbf{P}\left(t_n^* < x\right) - \mathbf{P}\left(t^* < x\right) \right| = O(1/n).$$

В недавно опубликованной работе [3] наметился определенный прогресс в этом направлении. Найденные в [3] функция распределения $G(x)$ и функция плотности $g(x)$ случайной величины t^* позволит нам в теореме 2 получить неулучшаемые с точностью до константы экспоненциальные оценки для плотности:

$$\begin{aligned} g(x) &\leqslant C_1 e^{-c_1|x|}, \quad x \leqslant 0, \\ g(x) &\leqslant C_2 e^{-c_2 x}, \quad\ \ x \geqslant 0, \end{aligned}$$

где константы c_1, c_2, C_1, C_2 зависят только от параметров процесса (3). Используя этот результат, в теореме 3 выводятся так называемые интегро-локальные оценки:

$$\mathbf{P}\left(x - \delta^- \leqslant t^* \leqslant x + \delta^+\right) \leqslant \left(\delta^- + \delta^+\right) C e^{-c|x|}, \tag{5}$$

где $\delta^\pm \geqslant 0$, а положительные константы $C = C(\delta^-, \delta^+)$ и c не зависят от x. Отметим, что термин интегро-локальные оценки для выражений вида (5) был позаимствован нами из работы [4].

Относительно несложным доказательствам теорем 2 и 3 способствовал найденный в теореме 1 более простой аналитический вид функции плотности $g(x)$ при $x \leqslant 0$, впервые полученной авторами в [3, теорема 4].

Параграф 4 содержит непосредственное приложение полученных результатов. В теореме 4 будет установлено, что задачу (1) об оценке параметра θ с линией разрыва $x(\theta)$ можно свести к более простой задаче с линией разрыва $x(\theta) \equiv \theta$ для функций $x(\theta)$ с липшицуемой производной $x'(\theta)$.

Договоримся в дальнейшем буквами $c, c_1, c_2, \ldots, C, C_1, C_2, \ldots$ обозначать положительные константы, вообще говоря, разные.

2. Основные предположения и результаты

Во избежание ненужных повторений в формулировках теорем и их доказательств будем считать выполненными следующие условия (см. (1)):

$$x'(\theta) > 0, \quad p(\theta) > q(\theta), \quad \theta \in \Theta. \tag{6}$$

С целью формального упрощения вида процесса $Z(t)$ из (3) введем случайный процесс

$$Y(t) = at - \nu_+(pt) + \nu_-(-qt), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{7}$$

где

$$a = (p(\theta_0) - q(\theta_0))\, x'(\theta_0) / \ln\left(p(\theta_0)/q(\theta_0)\right), \quad p = p(\theta_0)x'(\theta_0), \quad q = q(\theta_0)x'(\theta_0).$$

Очевидно, что

$$Z(t) = \ln\left(p(\theta_0)/q(\theta_0)\right) Y(t).$$

Следовательно, момент t^* достижения максимума процессом $Z(t)$ является также моментом достижения максимума процессом $Y(t)$. Из предположений (6) и неравенства $\ln x < x - 1$ при $x > 0$ вытекают условия:

$$p > a > q > 0, \tag{8}$$

обеспечивающие процессу из (7) отрицательный средний снос.

Определим последовательность $\{\pi_k(q)\}$:

$$\pi_k(q) = \pi_k(q/a) = (qk/a)^{k-1}\, e^{-qk/a}/k!, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Первая теорема упрощает весьма сложный аналитический вид функции распределения $G(x)$, найденной авторами в [3, теорема 4].

Теорема 1. *Функция распределения $G(x)$ случайной величины t^* при $x \leqslant 0$ имеет вид:*

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{(p-a)q}{(p-q)a} - \frac{(a-q)q}{a^2} \int_0^{a|x|} \varphi^-(z,1)\, dz, \\ \varphi^-(z,1) &= \sum_{k=[z]+1}^{\infty} \pi_k(q/a) - e^{bz} \sum_{k=[z]+1}^{\infty} \pi_k(q/a) e^{-bk}, \quad z \geqslant 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $[z]$ – целая часть числа z, $b = \beta(1 - q/p)$, а $\beta > 0$ – единственный положительный корень уравнения

$$\left(1 - e^{-\beta}\right)/\beta = a/p. \tag{11}$$

Для положительных z введем обозначение:

$$\Lambda(z) = z - 1 - \ln z > 0. \tag{12}$$

В следующем утверждении получены оценки для плотности распределения случайной величины t^* неулучшаемые с точностью до константы.

Теорема 2. *Плотность $g(x)$ случайной величины t^* ограничена на числовой прямой и для нее справедливы оценки:*

$$
\begin{aligned}
g(x) &\leqslant (a-q)e^{-\Lambda(q/a)a|x|}, && x \leqslant 0,\\
g(x) &\leqslant \beta a e^{-\Lambda(p/a)ax}, && x \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Локальные свойства функции распределения $G(x)$ отражены в теореме 3.

Теорема 3. *Пусть $\delta^{\pm} \geqslant 0$, $\delta = \delta^- + \delta^+ \leqslant 1/a$. Тогда*

$$
\mathbf{P}\left(x - \delta^- \leqslant t^* \leqslant x + \delta^+\right) \leqslant \delta C e^{-c|x|},
$$

где $c = a \cdot \min\{\Lambda(p/a), \Lambda(q/a)\}$, а константа C не зависит от x и δ.

3. Доказательства теорем

Для упрощения доказательств утверждений из §2 будем считать выполненными соотношения (ср. (8)):

$$
p > a = 1 > q > 0. \tag{13}
$$

Условие (13) не уменьшает общности в силу следующих обстоятельств. Задачу о нахождении параметра θ всегда можно свести к задаче о нахождении параметра $a\theta$. В такой постановке вместо оценки t^* мы будем использовать оценку at^*, которая является моментом достижения максимума процессом (см.(7)):

$$
Y(t/a) = t - \nu_+(tp/a) + \nu_-(-tq/a),
$$

с линейным коэффициентом равным 1. Поэтому без потери общности в доказательствах утверждений будем полагать $a = 1$ и вместо p/a и q/a писать p и q.

Доказательство теорем 1–2 опираются на следующие три леммы.

Лемма 1. *Последовательность $\{\pi_k(q)\}$ из (9) является распределением:*

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k(q) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(qk)^{k-1}e^{-qk}}{k!} = 1, \quad 0 < q < 1.
$$

Последнее равенство останется верным и при граничном значении $q = 1$:

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} = 1.
$$

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из следующей формулы (см. [7], с. 707, формула 4):

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}x^k}{k!} = y, \quad \text{при} \quad x = ye^{-y}, \quad 0 < |y| < 1, \tag{14}
$$

в которую вместо y следует подставить величину $q \in (0,1)$.

Для доказательства второго утверждения леммы заметим, что функция $x = ye^{-y}$ из (14) на множестве $0 < |y| \leqslant 1$ имеет единственный максимум в точке $y = 1$. Следовательно, для членов ряда (14) имеется не зависящая от y суммируемая мажорирующая последовательность:

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}(ye^{-y})^k}{k!} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2} < \infty,
$$

так как $k! > \sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k}$. Тогда из равномерной сходимости ряда (14) на множестве $0 < |y| \leqslant 1$ получаем второе утверждение леммы 1:

$$1 = \lim_{y\to 1-0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k-1}(ye^{-y})^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{y\to 1-0}\frac{k^{k-1}(ye^{-y})^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}.$$

□

Лемма 2. *При* $b = \beta(1 - q/p)$, *где* β *из* (11), *выполняется равенство:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\pi_k(q)e^{-bk} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(qk)^{k-1}e^{-(q+b)k}}{k!} = e^{-\beta}.$$

Доказательство. Если ряд из леммы 2 обозначить через S, то

$$S = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k-1}(qe^{-(q+b)})^k}{k!} = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k-1}x^k}{k!},$$

где $x = qe^{-(q+b)} < 1$ в силу (13). Последний ряд можно вычислить по формуле (14), если представить x в виде:

$$x = qe^{-(q+b)} = ye^{-y}, \tag{15}$$

при некотором $y \in (0, 1)$. Тогда из (14) найдем

$$S = y/q. \tag{16}$$

Проверим, что решением уравнения (15) является

$$y = q - \beta q/p. \tag{17}$$

Действительно, число из (17) меньше 1, так как $q < 1$, а его положительность следует из неравенства $\beta < p$, которое является следствием (11) при $a = 1$. Непосредственная подстановка y из (17) в (15) приводит к верному равенству (11). Других решений уравнение (15) не имеет ввиду строгого возрастания функции ye^{-y} на интервале $(0, 1)$. Наконец, подставляя y из (17) в равенство (16), приходим к утверждению леммы 2:

$$S = 1 - \beta/p = e^{-\beta},$$

где последнее равенство следует из (11) при $a = 1$. □

Лемма 3. *Для хвостов распределения* $\{\pi_k(q)\}$ *верны оценки:*

$$\sum_{k=n}^{\infty}\pi_k(q) < e^{-\Lambda(q)n}/q, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Из определений (9) и (12) непосредственно устанавливаем справедливость равенств:

$$\pi_k(q) = \pi_k(1)e^{-\Lambda(q)k}/q, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда утверждение леммы 3 вытекает из леммы 1:

$$\sum_{k=n}^{\infty}\pi_k(q) = \sum_{k=n}^{\infty}\pi_k(1)e^{-\Lambda(q)k}/q < \left(e^{-\Lambda(q)n}/q\right)\sum_{k=1}^{\infty}\pi_k(1) = e^{-\Lambda(q)n}/q.$$

□

Доказательство теоремы 1. В [3, теорема 4] доказано, что $G(x)$ представима в интегральной форме (10) с подынтегральной функцией

$$\varphi^-(z,1) = 1 - e^{bz-\beta} + \sum_{k=1}^{[z]} \pi_k(q)\left(e^{b(z-k)} - 1\right),$$

которая в силу лемм 1-2 преобразуется к виду:

$$\varphi^-(z,1) = \left(1 - \sum_{k=1}^{[z]} \pi_k(q)\right) - e^{bz}\left(e^{-\beta} - \sum_{k=1}^{[z]} \pi_k(q)e^{-bk}\right)$$
$$= \sum_{k=[z]+1}^{\infty} \pi_k(q) - e^{bz} \sum_{k=[z]+1}^{\infty} \pi_k(q)e^{-bk}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для $x \leqslant 0$ и $a = 1$ из теоремы 1 и леммы 3 выводим первую оценку для плотности $g(x)$:

$$g(x) \leqslant (1-q)q \sum_{k=[|x|]+1} \pi_k(q) < (1-q)e^{-\Lambda(q)([|x|]+1)} \leqslant (1-q)e^{-\Lambda(q)|x|}.$$

На положительной полуоси функция распределения $G(x)$ при $a = 1$ равна ([3], теорема 3):

$$G(x) = \frac{(p-1)q}{p-q} + \beta \int_0^x e^{-pt} \sum_{k=0}^{[t]} \psi(t-k)p^k \left(\frac{t^k}{k!} - \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right) dt,$$

где $\psi(\cdot)$ – функция распределения определенная в [3, лемма 2]. Отсюда и из (13) получаем вторую оценку теоремы 2:

$$g(x) \leqslant \beta e^{-px} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{p^k x^k}{k!} \leqslant \beta e^{-px} p^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \beta e^{-px} p^x e^x = \beta e^{-\Lambda(p)x}.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 базируется на следующих двух леммах.

Лемма 4. *Для любого $\delta \geqslant 0$ справедливы оценки:*

(18) $$\mathbf{P}\left(x - \delta \leqslant t^* \leqslant x\right) \leqslant \delta C_1 e^{-\Lambda(q)|x|}, \quad x \leqslant 0,$$

(19) $$\mathbf{P}\left(x \leqslant t^* \leqslant x + \delta\right) \leqslant \delta C_2 e^{-\Lambda(p)x}, \quad x \geqslant 0,$$

где $C_1 = 1 - q$, $C_2 = \beta$.

Доказательство. Пусть $x \leqslant 0$. Утверждение (18) вытекает из первой оценки теоремы 2 (при $a = 1$):

$$\mathbf{P}\left(x - \delta \leqslant t^* \leqslant x\right) = \int_{x-\delta}^{x} g(z)\,dz \leqslant (1-q) \int_{|x|}^{|x|+\delta} e^{-\Lambda(q)z}\,dz \leqslant \delta(1-q)e^{-\Lambda(q)|x|}.$$

Подобным образом выводится утверждение (19) из второй оценки теоремы 2. $\square$

Аналогичные утверждения верны и для симметричных относительно x интервалов.

Лемма 5. *Если $x+\delta \leqslant 0$ или $x-\delta \geqslant 0$ при некотором $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, то для соответствующих x справедливы оценки:*

$$\mathbf{P}\left(x \leqslant t^* \leqslant x+\delta\right) \leqslant \delta C_3 e^{-\Lambda(q)|x|}, \quad x+\delta \leqslant 0,$$

$$\mathbf{P}\left(x-\delta \leqslant t^* \leqslant x\right) \leqslant \delta C_4 e^{-\Lambda(p)x}, \quad x-\delta \geqslant 0,$$

где $C_3=(1-q)e^{q-1}/q$, $C_4=\beta e^{p-1}/p$.

Доказательство. Первая оценка следует непосредственно из (18) и условия $\delta \leqslant 1$:

$$\mathbf{P}\left(x \leqslant t^* \leqslant x+\delta\right) \leqslant \delta C_1 e^{-\Lambda(q)|x+\delta|} = \delta C_1 e^{-\Lambda(q)(|x|-\delta)} \leqslant \delta C_1 e^{\Lambda(q)} e^{-\Lambda(q)|x|} = \delta C_3 e^{-\Lambda(q)|x|}.$$

Вторая оценка леммы 5 выводится аналогично из (19). □

Доказательство теоремы 3. Пусть $\delta^{\pm} \geqslant 0$, $\delta=\delta^-+\delta^+ \leqslant 1$. Тогда из лемм 4–5 при $x+\delta^+ \leqslant 0$ выводим оценку:

$$\mathbf{P}\left(x-\delta^- \leqslant t^* \leqslant x+\delta^+\right) \leqslant \mathbf{P}\left(x-\delta^- \leqslant t^* \leqslant x\right)+\mathbf{P}\left(x \leqslant t^* \leqslant x+\delta^+\right) \leqslant \delta^- C_1 e^{-\Lambda(q)|x|}+\delta^+ C_3 e^{-\Lambda(q)|x|} \leqslant \delta \max\left\{C_1, C_3\right\} e^{-\Lambda(q)|x|}.$$

Подобная оценка верна и при $x-\delta^- \geqslant 0$:

$$\mathbf{P}\left(x-\delta^- \leqslant t^* \leqslant x+\delta^+\right) \leqslant \delta \max\left\{C_2, C_4\right\} e^{-\Lambda(p)x}.$$

Следовательно, при любом $x \in (-\infty, \infty)$

$$\mathbf{P}\left(x-\delta^- \leqslant t^* \leqslant x+\delta^+\right) \leqslant \delta C e^{-c|x|},$$

где $C=\max\left\{C_1, \ldots, C_4\right\}$, $c=\min\left\{\Lambda(q), \Lambda(p)\right\}$.

Теорема 3 доказана.

4. Применение полученных результатов

В этом параграфе будем предполагать выполненными условия I – V из монографии Ибрагимова-Хасьминского [1, с. 324], и дополнительно при некотором $\varepsilon>0$

$$\mathbf{E}_\theta \left|\frac{f_\theta'(X_1, \theta)}{f_\theta(X_1, \theta)}\right|^{1+\varepsilon}<\infty. \tag{20}$$

Напомним, что условия I – V обеспечивают сходимость по распределению $n(\theta_n^*-\theta_0) \Rightarrow t^*$ нормированных ОМП к моменту t^* достижения максимума процессом (3), а условие (20) приводит к оценке:

$$\mathbf{P}\left(n\left|\theta_n^*-\theta_0\right| \geqslant c \ln n\right) \leqslant c/n \tag{21}$$

при некотором $c>0$ (см. [1, с. 361], [2, с. 899]). Для предельной величины t^* также имеет место подобное (21) утверждение:

$$\mathbf{P}\left(\left|t^*\right| \geqslant c \ln n\right) \leqslant c/n, \tag{22}$$

вытекающее из [2, формула (18)]. Отметим, что справедливость оценки (22) является следствием отрицательности среднего сноса процесса (3) и не связано с условиями I – V.

Пусть $T_n = c\ln n$, где положительная константа c может быть любой, при которой будут выполнены условия (21 – 22). Тогда для получения оптимальной скорости сходимости

$$\sup_{|x|<\infty} \left|\mathbf{P}\left(n(\theta_n^* - \theta_0) < x\right) - \mathbf{P}\left(t^* < x\right)\right| = O(1/n) \tag{23}$$

достаточно, в силу (21–22), доказать асимптотическое равенство

$$\sup_{|x|\leqslant T_n} \left|\mathbf{P}\left(n(\theta_n^* - \theta_0) < x\right) - \mathbf{P}\left(t^* < x\right)\right| = O(1/n). \tag{24}$$

Доказательство утверждения (24) не является целью данного параграфа. Здесь нас будет интересовать вопрос о том, возможно ли в задаче (1) заменить линию разрыва $x(\theta)$ линией разрыва $x(\theta) \equiv \theta$ без потери общности? Такое упрощение в постановке задачи привело бы и к упрощению доказательства утверждения (23). Ниже в теореме 4 будет установлено, что такая замена параметра возможна для функций $x(\theta)$ с липшицуемой производной $x'(\theta)$ (условие (27)).

Введем новый параметр $\widetilde{\theta} = x(\theta)$ и пусть $\widetilde{\theta}_0 = x(\theta_0)$ — истинное значение нового параметра. Тогда $f(x,\theta) = f(x, x^{-1}(\widetilde{\theta}))$ и следовательно, односторонние пределы

$$\widetilde{p}(\widetilde{\theta}) = f(\widetilde{\theta} + 0, x^{-1}(\widetilde{\theta})) = f(x(\theta) + 0, \theta) = p(\theta),$$
$$\widetilde{q}(\widetilde{\theta}) = f(\widetilde{\theta} - 0, x^{-1}(\widetilde{\theta})) = f(x(\theta) - 0, \theta) = q(\theta)$$

совпадают с соответствующими пределами исходной задачи. Поэтому предельному процессу (3) будет соответствовать предельный процесс

$$\widetilde{Z}(t) = (p(\theta_0) - q(\theta_0))\, t - (\nu_+\left(p(\theta_0)t\right) - \nu_-\left(-q(\theta_0)t\right)) \ln\left(p(\theta_0)/q(\theta_0)\right),$$

а это означает, что моменты достижения максимумов у процессов $\widetilde{Z}(t)$ и $Z(t)$ связаны равенством:

$$\widetilde{t^*} = x'(\theta_0) t^*. \tag{25}$$

Так как функция правдоподобия представима в виде:

$$\prod_{i\leqslant n} f(X_i, \theta) = \prod_{i\leqslant n} f(X_i, x^{-1}(\widetilde{\theta})),$$

то ОМП $\widetilde{\theta_n^*}$ истинного значения нового параметра $\widetilde{\theta}_0$ связана с ОМП θ_n^* параметра θ_0 равенством:

$$\widetilde{\theta_n^*} = x(\theta_n^*). \tag{26}$$

Теорема 4. *Пусть производная $x'(\theta)$ линии разрыва $x(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица:*

$$|x'(\theta_2) - x'(\theta_1)| \leqslant c_1 \left|\theta_2 - \theta_1\right|, \quad \theta_1, \theta_2 \in \Theta. \tag{27}$$

Тогда, если

$$\sup_{|x|\leqslant T_n} \left|\mathbf{P}\left(n(\widetilde{\theta}_n^* - \widetilde{\theta}_0) < x\right) - \mathbf{P}\left(\widetilde{t^*} < x\right)\right| \leqslant c_2/n, \tag{28}$$

то

$$\varepsilon_n \equiv \sup_{|x|\leqslant T_n} \left|\mathbf{P}\left(n(\theta_n^* - \theta_0) < x\right) - \mathbf{P}\left(t^* < x\right)\right| \leqslant c_3/n. \tag{29}$$

Доказательство. Поскольку задачу об оценке параметра θ всегда можно свести к задаче об оценке параметра $x'(\theta_0)\cdot\theta$, то, неограничивая общности, будем предполагать, что $x'(\theta_0)=1$. Следовательно (см. (25)),

$$\widetilde{t}^* = t^*. \tag{30}$$

Тогда в силу сделанного предположения и условия (27) получаем разложение:

$$\Delta_n(x) \equiv n\left(x(\theta_0+x/n)-x(\theta_0)\right) = x+\varphi_n x^2/n, \quad \text{где } |\varphi_n| \leqslant c_1. \tag{31}$$

Отсюда при $|x|\leqslant T_n$ при некотором c вытекает неравенство $|\Delta_n(x)|\leqslant c\ln n$, которое дает нам основание считать наряду с (28) верной и следующую оценку (см. (30)):

$$\sup_{|x|\leqslant T_n}\left|\mathbf{P}\left(n(\widetilde{\theta}_n^*-\widetilde{\theta}_0)<\Delta_n(x)\right)-\mathbf{P}\left(t^*<\Delta_n(x)\right)\right|\leqslant c_2/n.$$

Последнее выражение представим в виде:

$$\mathbf{P}\left(n(\widetilde{\theta}_n^*-\widetilde{\theta}_0)<\Delta_n(x)\right)=\mathbf{P}\left(t^*<\Delta_n(x)\right)+\psi_n(x)/n, \quad |x|\leqslant T_n, \tag{32}$$

где $|\psi_n(x)|\leqslant c_2$.

Далее, из (26), (31) и определения $\widetilde{\theta}_0$ получаем равенство ($x'(\theta)>0!$):

$$\mathbf{P}\left(n(\theta_n^*-\theta_0)<x\right)=\mathbf{P}\left(\widetilde{\theta}_n^*<x(\theta_0+x/n)\right)=\mathbf{P}\left(n(\widetilde{\theta}_n^*-\widetilde{\theta}_0)<\Delta_n(x)\right),$$

из которого совместно с (32) выводим представление:

$$\mathbf{P}\left(n(\theta_n^*-\theta_0)<x\right)-\mathbf{P}\left(t^*<x\right) \\ =\mathbf{P}\left(t^*<\Delta_n(x)\right)-\mathbf{P}\left(t^*<x\right)+\psi_n(x)/n, \quad |x|\leqslant T_n.$$

Отсюда, а также из (29) и (31) получаем оценку:

$$\varepsilon_n \leqslant \sup_{|x|\leqslant T_n}\left|\mathbf{P}\left(t^*<\Delta_n(x)\right)-\mathbf{P}\left(t^*<x\right)\right|+c_2/n \\ \leqslant \sup_{|x|\leqslant T_n}\mathbf{P}\left(x-c_1x^2/n\leqslant t^*\leqslant x+c_1x^2/n\right)+c_2/n. \tag{33}$$

Для оценки последнего супремума воспользуемся теоремой 3, в которой $\delta^\pm=c_1x^2/n$, $\delta^-+\delta^+=2c_1x^2/n\leqslant c\ln^2 n/n\leqslant 1/a$, при $|x|\leqslant T_n$ и всех достаточно больших n. Тогда из (33) и теоремы 3 выводим утверждение (29):

$$\varepsilon_n\leqslant c_1\cdot C\cdot\sup_{|x|<\infty}x^2e^{-c|x|}/n+c_2/n\leqslant c_3/n.$$

□

References

[1] I. A. Ibragimov, R. Z. Khas'minski, *Asymptotic Theory of Estimation* [in Russian], Nauka, Moscow (1979). Zbl 0467.62025

[2] V. E. Mosyagin, *Estimation of the convergence rate for the distributions of normalized maximum likelihood estimators in the case of a discontinuous density*, (English. Russian original) Sib. Math. J., **37**:4 (1996), 788–796; translation from Sib. Mat. Zh., **37**:4 (1996), 895–903. Zbl 0878.62013

[3] V. E. Mosyagin, N. A. Shvemler, *Distribution of the time of attaining the maximum for the difference of the two Poisson's processes with negative linear drift*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1229–1248. MR3592219

[4] A. A. Borovkov, A. A. Mogul'skii, *Integro-local and integral theorems for sum of random variables with semiexponential distributions*, Sib. Math. Zh., **47**:6 (2006), 1218–1257. MR2302841
[5] A. N. Shiryaev, *Veroyatnost*, [in Russian], M.: Nauka, 1989. MR 1024077 60-01
[6] A. A. Borovkov, *Teoriya veroyatnostei*, [in Russian], M.: Nauka, 1986. Zbl 0662.60001
[7] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii*, [in Russian], M.: Nauka, 1981. Zbl 0511.00044

Vyacheslav Evgenevich Mosyagin
Tyumen State University,
Volodarskogo str., 6,
625003, Tyumen, Russia
E-mail address: vmosyagin@mail.ru

Natalya Aleksandrovna Shvemler
Tyumen State University,
Volodarskogo str., 6,
625003, Tyumen, Russia
E-mail address: shvemler.natalya@mail.ru