S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1317–1323 (2017) УДК 512.554.7
DOI 10.17377/semi.2017.14.112 MSC 17C70

КОНСТРУКЦИЯ ХЕРСТЕЙНА ДЛЯ ПОЧТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СУПЕРАЛГЕБР

В.Н. ЖЕЛЯБИН, А.С. ПАНАСЕНКО

Abstract. The connections between semiprime associative Z_2-graded algebras and Jordan superalgebras are studied. It is proved that if an adjoint Jordan superalgebra $B^{(+)_s}$ to an associative noncommutative Z_2-graded semiprime superalgebra B contains an ideal, consisted of odd elements, then the center of algebra B contains a nonzero ideal. Besides, this ideal annihilates every commutator of the algebra B. As a corollary we have that if a Z_2-graded algebra B is just infinite then a Jordan superalgebra $B^{(+)_s}$ is just infinite.

Keywords: associative algebras, Jordan superalgebras, just infinite algebras, semiprime algebras.

При переходе от ассоциативной алгебры к йордановой с симметризованным произведением сохраняется ряд свойств исходной алгебры. Одним из них является простота: это утверждение известно под названием конструкции Херстейна и было впервые доказано в [1]. Так же при данном переходе стоит отметить сохранение различных радикалов [2]. В работе [3] конструкция Херстейна обобщена на простые и первичные ассоциативные супералгебры.

В [4] было отмечено сохранение свойства почти конечномерности при переходе от ассоциативной алгебры к йордановой. Аналогичное утверждение для альтернативных алгебр было доказано в [5]. Исследование ассоциативных почти конечномерных алгебр восходит к работам [6, 7, 8, 9]. Альтернативные почти конечномерные алгебры изучались в работах [10, 11], лиевы — в [12, 13]. В недавнем препринте [14] построен пример лиевой почти конечномерной ниль

Zhelyabin, V.N., Panasenko, A.S., Herstein's construction for just infinite superalgebras.

Работа поддержана РНФ (проект No 14-21-00065).

Поступила 21 октября 2017 г., опубликована 6 декабря 2017 г.

супералгебры, т.е. супералгебры, у которой оператор $ad(x)$ нильпотентен для каждого однородного элемента x.

Цель данной работы: доказать конструкцию Херстейна для почти конечномерных супералгебр.

Всюду в нашей работе поле F имеет характеристику не 2. Алгебра A над полем F называется Z_2-градуированной, если A — прямая сумма векторных пространств $A = A_0 \oplus A_1$ и $A_0A_0 + A_1A_1 \subseteq A_0$, $A_0A_1 + A_1A_0 \subseteq A_1$.

Примером Z_2-градуированной алгебры является алгебра Грассмана: $G = G_0 + G_1$, G — ассоциативная алгебра с единицей 1 и порождается 1 и счетным множеством элементов $x_i, i \in \mathbb{N}$, которые удовлетворяют соотношениям $x_ix_j = -x_jx_i$. Подпространство G_0 порождается мономами четной длины, а G_1 — мономами нечетной длины.

Пусть $A = A_0 \oplus A_1$ — Z_2-градуированная алгебра. Тогда подалгебра $G(A) = A_0 \otimes G_0 \oplus A_1 \otimes G_1$ алгебры $A \otimes G$ называется *грассмановой оболочкой* алгебры A.

Пусть $A = A_0 + A_1$ — Z_2-градуированная алгебра. Тогда A называется ассоциативной *супералгеброй*, если ее грассманова оболочка $G(A)$ является ассоциативной алгеброй.

Поскольку тензорное произведение ассоциативных алгебр является ассоциативной алгеброй, то понятие ассоциативной супералгебры совпадает с понятием Z_2-градуированной алгебры.

Пусть $J = J_0 + J_1$ — Z_2-градуированная алгебра. Тогда J называется йордановой *супералгеброй*, если ее грассманова оболочка $G(J)$ является йордановой алгеброй, т. е. в ней выполняются тождества:

$$xy = yx,$$
$$(x^2y)x = x^2(yx).$$

Пусть $A = A_0 + A_1$ — супералгебра. Тогда A_0 — четная часть, а A_1 — нечетная часть супералгебры A. Элементы множества $A_0 \cup A_1$ называются *однородными*. Для однородного элемента x определим его четность: $|x| = 0$, если $x \in A_0$ и $|x| = 1$, если $x \in A_1$. Идеал I супералгебры $A = A_0 + A_1$ — это идеал алгебры A, который является Z_2-градуированной подалгеброй в A.

Пусть $B = A + M$ — ассоциативная супералгебра с четной частью A и нечетной M. Введем новое умножение на векторном пространстве B, полагая для однородных элементов x и y

$$x \circ_s y = \frac{1}{2}(xy + (-1)^{|x||y|}yx).$$

Тогда B с таким умножением является йордановой супералгеброй и обозначается $B^{(+)_s}$.

Лемма 1. *Пусть $B = A + M$ — ассоциативная супералгебра, I — идеал супералгебры $B^{(+)_s}$. Если $a, b \in I$, $x \in B$, то $(a \circ_s b)x \in I$.*

Доказательство. В силу полилинейности многочлена $(a \circ_s b)x$ можно считать, что a, b, x однородные.

В алгебре B верны следующие равенства:

(1) $a(xb - bx) + (xb - bx)a = (ax - xa)b + b(ax - xa) + x(ab + ba) - (ab + ba)x,$

$$(2)\quad (xa-ax)b+b(xa-ax)-(a(xb-bx)-(xb-bx)a)+2(bax+axb)= \\ =(ab+ba)x+x(ab+ba),$$

$$(3)\quad (xb-bx)a-a(xb-bx)-(xa-ax)b+b(xa-ax)= \\ =(ab-ba)x-x(ab-ba),$$

$$(4)\ (xa+ax)b+b(xa+ax)-a(xb+bx)-(xb+bx)a=x(ab-ba)-(ab-ba)x.$$

Пусть теперь $a, b \in I$. Рассмотрим несколько случаев:

1) $a, b, x \in A$ или один из a, b, x лежит в M, остальные — в A. Тогда

$$(ab+ba)x+x(ab+ba) \in I.$$

В силу (1)

$$x(ab+ba)-(ab+ba)x \in I.$$

Вычитая из предпоследнего выражения последнее,получаем, что $2(ab+ba)x \in I$.

2) $a, x \in M, b \in A$. Тогда

$$(ab+ba)x-x(ab+ba) \in I.$$

В силу (2)

$$(ab+ba)x+x(ab+ba) \in I.$$

Суммируя последние два выражения, получаем, что $2(ab+ba)x \in I$. Случай $b, x \in M, a \in A$ разбирается аналогично.

3) $a, b \in M, x \in A$. Тогда

$$(ab-ba)x+x(ab-ba) \in I.$$

В силу (3)

$$(ab-ba)x-x(ab-ba) \in I.$$

Складывая последние два выражения, получаем, что $2(ab-ba)x \in I$.

4) $a, b, x \in M$. Тогда

$$x(ab-ba)+(ab-ba)x \in I.$$

В силу (4)

$$x(ab-ba)-(ab-ba)x \in I.$$

Вычитая из предпоследнего выражения последнее, получаем, что $2(ab-ba)x \in I$. □

Лемма 2. *Пусть $B = A + M$ — ассоциативная супералгебра, I — идеал супералгебры $B^{(+)_s}$ с нулевым умножением, $b \in I \cap M$ и $b^2 = 0$ в супералгебре B. Тогда $(B^{\#}bB^{\#})^3 = 0$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых $x, y \in B$ $bxbyb = 0$. Можно считать, что элементы x и y — однородные. Заметим, что $btb \in I$ для любого однородного элемента $t \in B$: в самом деле, так как $b^2 = 0$, то $btb = 2(bt) \circ_s b \in I$. Поэтому $btb \in I$ для любого $t \in B$. Сперва докажем, что $bxby \in I$.

Рассмотрим несколько случаев:

1) $x, y \in A$. Тогда

$$(xb+bx)(by)-(by)(xb+bx)-bxby+bybx+b(yx)b=xb^2y=0.$$

Таким образом, $bybx - bxby \in I$. Но $b(ybx) - (ybx)b \in I$, откуда следует (вычитаем из последнего выражения предпоследнее), что $bxby - ybxb \in I$. Так как $(bxb)y + y(bxb) \in I$, то $2bxby \in I$.

2) $x \in A, y \in M$. Тогда

$$(xb + bx)(by) + (by)(xb + bx) - bxby - bybx - b(yx)b = xb^2y = 0.$$

Таким образом, $bxby + bybx \in I$. Но $(bxb)y + y(bxb) \in I$, откуда следует (вычитаем из предпоследнего выражения последнее), что $bybx - ybxb \in I$. Так как $b(ybx) + (ybx)b \in I$, то $2bybx \in I$. Так как $bxby + bybx \in I$, то $bxby \in I$.

Случай $x \in M, y \in A$ разбирается аналогично.

3) $x, y \in M$. Тогда

$$(xb - bx)(by) + (by)(xb - bx) + bxby + bybx - b(yx)b = xb^2y = 0.$$

Таким образом, $bxby + bybx \in I$. Но $(bxb)y - y(bxb) \in I$, откуда следует (вычитаем из предпоследнего выражения последнее), что $bybx + ybxb \in I$. Так как $b(ybx) - (ybx)b \in I$, то $2bybx \in I$. Так как $bxby + bybx \in I$, то $bxby \in I$.

Поскольку в идеале I нулевое умножение в алгебре $B^{(+)_s}$, то однородные элементы из I в алгебре B либо коммутируют, либо антикоммутируют. Тогда

$$(bxby)b = \pm b(bxby) = \pm b^2xby = 0$$

для $x, y \in A \cup M$. □

Пусть $x, y, z \in B$. Обозначим $[x, y] = xy - yx$ — коммутатор элементов x, y. В любой ассоциативной алгебре справедливы тождества:

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y, \tag{5}$$

$$[x \circ y, z] + [y \circ z, x] + [z \circ x, y] = 0, \tag{6}$$

где $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$,

$$(x, y, z)^+ = \frac{1}{4}[y, [x, z]], \tag{7}$$

где $(x, y, z)^+ = (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z)$. Отметим, что тождества (6) и (7) являются сокращенной записью равенств (1) и (4) Леммы 1.

Центр $Z(B)$ ассоциативной алгебры B определяется следующим образом:

$$Z(B) = \{z \in B | \, [z, x] = 0 \text{ для любого } x \in B\}.$$

Теорема 1. *Пусть $B = A + M$ — полупервичная ассоциативная супералгебра, причем B не является коммутативной алгеброй, I — ненулевой идеал супералгебры $B^{(+)_s}$, содержащийся в M. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $I[M, M] = [M, M]I = 0$

2. $MI + M^2I$ — собственный ненулевой идеал супералгебры B и $MI + M^2I \subseteq Z(B)$,

3. $[B, B](MI + M^2I)^2 = 0$.

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько пунктов.

Пункт 1. Поскольку $I \subseteq M$, то $I \circ_s M \subseteq A \cap I = 0$. Поэтому $[M, I] = 0$. В силу (5)

$$[MM, I] \subseteq M[M, I] + [M, I]M = 0.$$

Пусть $P = [M, M]I$. Ясно, что $P \subseteq M$. Так как $[MM, I] = 0$ и $[M, M] \subseteq A$, то

$$P = [M, M]I = [M, M] \circ_s I \subseteq I.$$

Поэтому $P \circ_s M = 0$. Покажем, что $P \circ_s A \subseteq P$. Действительно, в силу (7)

$$P \circ_s A = ([M, M] \circ_s I) \circ_s A = ([M, M] \circ I) \circ A \subseteq ([M, M], I, A)^+ + [M, M] \circ (I \circ A) \subseteq$$
$$\subseteq [I, [[M, M], A]] + [M, M]I \subseteq [I, MM] + [M, M]I = [M, M]I = P.$$

Следовательно, P — идеал супералгебры $B^{(+)_s}$. Более того, $P \circ_s P = 0$, т.е. P — идеал с нулевым умножением.

Пусть $x, y \in M, i \in I$ и $b = [x, y]i$. Тогда $b^2 = [x, y]i[x, y]i = [x, y]i^2[x, y]$, так как $[[x, y], i] = 0$. В силу (5)

$$[x, y]i^2 = [xi^2, y] - x[i^2, y] = [(xi) \circ_s i, y] \in [I, M] = 0.$$

Поэтому $b^2 = 0$. По лемме 2 получаем $[M, M]I = 0$.

Пункт 2. Пусть $K = MI + M^2I$. Тогда $AK \subseteq K$. Так как $[M, I] = 0$, то

$$KA = IMA + IM^2A \subseteq IM + IM^2 = K.$$

Аналогично, $MK \subseteq K$ и $KM \subseteq K$. Следовательно, K — идеал супералгебры B. Предположим, что $MI = 0$. Тогда, в силу леммы 2 $I = 0$. Следовательно, $K \neq 0$.

Покажем, что $K \subset Z(B)$. В силу $[M, I] = 0$ и (6)

$$[MI, A] \subseteq [M \circ I, A] \subseteq [I \circ A, M] + [A \circ M, I] \subseteq [M, I] = 0.$$

Аналогично

$$[M^2I, A] = [M^2 \circ I, A] \subseteq [I \circ A, M^2] + [A \circ M^2, I] \subseteq [M^2, I] = 0.$$

В силу пункта 1 и (5)

$$[MI, M] \subset M[I, M] + [M, M]I = 0.$$

Аналогично, $[M^2I, M] = 0$. Следовательно, $K \subset Z(B)$. Поскольку B — некоммутативная алгебра, то K — собственный идеал супералгебры B.

Пункт 3. Покажем, что $[B, B]K^2 = 0$. В силу пункта 1 $I[M, M] = [M, M]I = 0$. Поэтому

$$[M, M]K = K[M, M] \subseteq MI[M, M] + M^2I[M, M] = 0.$$

В силу (5)

$$[A, M]MI \subseteq [AM, M]I + A[M, M]I = 0,$$

а также $[A, M]M^2I = [A, M]MIM = 0$. Следовательно, $[A, M]K = 0$. В силу (5)

$$[A, A]MI \subseteq [AM, A]I + A[M, A]I \subseteq B^{\#}[M, A]I.$$

Следовательно,

$$[A, A]M^2I \subseteq [A, A]MIM \subseteq B^{\#}[M, A]IM = 0.$$

Поэтому

$$[A, A]K^2 \subseteq ([A, A]MI + [A, A]M^2I)K \subseteq B^{\#}[M, A]IK \subseteq B^{\#}I[M, A]K = 0.$$

Таким образом, $[B,B]K^2=0$. $\square$

Супералгебра над полем F называется *почти конечномерной*, если она имеет бесконечную над F размерность, но каждый ненулевой идеал супералгебры имеет конечную над F коразмерность.

Предложение 1. *Ассоциативная почти конечномерная супералгебра полупервична.*

Доказательство. Пусть I — идеал ассоциативной почти конечномерной супералгебры B, и x — однородный элемент I. Предположим, что $(B^{\#}xB^{\#})^2=0$. Ясно, что $(B^{\#}xB^{\#})\neq B$. Пусть $\{f_i\}$ — базис $B^{\#}xB^{\#}$, $e_1,\dots,e_n$ — дополнение $\{f_i\}$ до базиса алгебры B. Тогда любой элемент b из $B^{\#}xB^{\#}$ представляется в виде $b=\sum\limits_{i,j}\alpha_{ij}e_ixe_j+\sum\limits_{i}(\beta_ixe_i+\gamma_ie_ix)+\delta x$, где $\alpha_{ij},\beta_i,\gamma_i,\delta\in F$. Таким образом, $B^{\#}xB^{\#}$ является линейной оболочкой конечного множества $\{e_ixe_j,xe_i,e_ix,x|1\leq i,j\leq n\}$, то есть идеал $B^{\#}xB^{\#}$ конечномерен. Но тогда $x=0$ и $I=0$. $\square$

Теорема 2. *Пусть $B=A+M$ — почти конечномерная ассоциативная супералгебра, не являющаяся коммутативной алгеброй. Тогда $B^{(+)_s}$ — почти конечномерная йорданова супералгебра.*

Доказательство. Пусть I — собственный идеал супералгебры $B^{(+)_s}$. Тогда по лемме 1 $(a\circ_s b)x\in I$ для любого $x\in B^{\#}$ и $a,b\in I$. Поэтому для любого $y\in B^{\#}$ верно включение $((a\circ_s b)x)\circ_s y\in I$, откуда следует, что $y(a\circ_s b)x\in I$ для любых $x,y\in B^{\#}$, то есть $B^{\#}(a\circ_s b)B^{\#}\subseteq I$. Таким образом, либо $a\circ_s b=0$ для любых $a,b\in I$, либо I — идеал конечной коразмерности.

Предположим, что $I\circ_s I=0$. Пусть $a\in I\cap A$. Тогда для любого $x\in B^{\#}$

$$0=4a\circ_s(x\circ_s a)=a(ax+xa)+(ax+xa)a=2axa,$$

что означает $aB^{\#}a=0$. Таким образом, $(B^{\#}aB^{\#})^2=0$, откуда $a=0$ в силу предложения 1.

Поэтому можно считать, что $I\subseteq M$. Тогда, по предложению 1 и теореме 1 $K=(MI+M^2I)^2$ — собственный центральный идеал супералгебры B и $[B,B]K=0$.

Пусть a — однородный элемент, содержащийся в $[B,B]$ и L — идеал супералгебры B, порожденный a. Тогда $LK=0$. Поэтому $(K\cap L)^2\subseteq LK=0$. В силу предложения 1 $K\cap L=0$. Следовательно, супералгебра B — конечномерна. Поэтому $[B,B]=0$. Следовательно, B — коммутативная алгебра. Поэтому $I\circ_s I\neq 0$.

Таким образом, коразмерность идеала I конечна. $\square$

Приведем пример, который показывает, что условие некоммутативности алгебры B является существенным.

Пример. Пусть $B=A+M$ — Z_2-градуированная ассоциативная и коммутативная алгебра. Тогда в супералгебре $B^{(+)_s}$ нечетная часть M является идеалом с нулевым умножением. Например, пусть $B=F[x]$ — кольцо многочленов от одной переменной, $A = F[x^2]$, $M = xF[x^2]$. Тогда B — почти конечномерная ассоциативная супералгебра, но $B^{(+)_s}$ не является почти конечномерной, поскольку M является идеалом в $B^{(+)_s}$ бесконечной коразмерности.

Авторы выражают благодарность рецензенту за сделанные им замечания.

References

[1] I.N. Herstein, *On the Lie and Jordan Rings of a Simple Associative Ring*, American Journal of Mathematics, **77**:2 (1955), 279–285. MR0067871

[2] K. McCrimmon, *On Herstein's Theorems Relating Jordan and Associative Algebras*, Journal of Algebra, **13** (1969), 382–392. MR0249476

[3] C. Gomez-Ambrosi, F. Montaner, *On Herstein's Constructions Relating Jordan and Associative Superalgebras*, Comm. in Algebra, **28**:8 (2000), 3743–3762. MR1767586

[4] C. Pendergrass-Rice, *Extending a theorem of Herstein*, available at: arxiv.org/pdf/0710.5545v1 (2007).

[5] V.N. Zhelyabin, A.S. Panasenko, *Just infinite Jordan algebras*, Algebra and Logic, accepted for publication.

[6] D.R. Farkas; L.W. Small, *Algebras which are nearly finite dimensional and their identities*, Israel J. Math., **127** (2002), 245–251. MR1900701

[7] J. Farina, C. Pendergrass-Rice, *A Few Properties of Just Infinite Algebras*, Comm. in Algebra, **35**:5 (2007), 1703–1707. MR2317639

[8] J. Farina, C. Pendergrass-Rice, J. Bell, *Stably Just Inifinite Algebras*, J. Algebra, **319**:6 (2008), 2533–2544. MR2388321

[9] Z. Reichstein, D. Rogalski, and J. J. Zhang, *Projectively simple rings*, Adv. Math., **203**:2 (2006), 365–407. MR2227726

[10] A.S. Panasenko, *Just infinite alternative algebras*, Math. Notes, **98**:5 (2015), 805–812. MR3438528

[11] V.N. Zhelyabin, A.S. Panasenko, *Nil ideals of finite codimension in alternative Noetherian algebras*, Math. Notes, **101**:3 (2017), 460–466. MR3635430

[12] A. Shalev, E. Zelmanov, *Narrow Lie algebras: a coclass theory and a characterization of the Witt algebra*, J. Algebra, **189**:2 (1997), 294–331. MR1438178

[13] N. Gavioli, V. Monti, C. Scoppola, *Just infinite periodic Lie algebras*, Proceedings of the Gainesville Conference on Finite Groups, (2003), 73–85.

[14] O.A. de Morais Costa, V. Petrogradsky, *Fractal just infinite nil Lie superalgebra of finite width*, available at: arxiv.org/pdf/1707.06614v1 (2017).

Victor N. Zhelyabin, Alexander S. Panasenko
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova st., 1,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: vicnic@math.nsc.ru, tom-anjelo@mail.ru