S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1324–1329 (2017) УДК 519.174.5
DOI 10.17377/semi.2017.14.113 MSC 05C70

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ ТЕОРЕМЫ НЭШ-ВИЛЬЯМСА О РЕБЕРНОЙ ДРЕВЕСНОСТИ ГРАФОВ

А.Н. ГЛЕБОВ

Abstract. The well-known Nash-Williams' Theorem states that for any positive integer k a multigraph $G = (V, E)$ admits an edge decomposition into k forests iff every subset $X \subseteq V$ induces a subgraph $G[X]$ with at most $k(|X| - 1)$ edges. In this paper we prove that, under certain conditions, this decomposition can be chosen so that each forest contains no isolated vertices. More precisely, we prove that if either G is a bipartite multigraph with minimum degree $\delta(G) \geq k$, or $k = 2$ and $\delta(G) \geq 3$, then G can be decomposed into k forests without isolated vertices.

Keywords: graph, multigraph, tree, forest, decomposition, arboricity, cover index.

1. Введение

В работе рассматривается конечный неориентированнй мультиграф $G = (V, E)$ без петель с множеством вершин V и множеством ребер E. Через $d(v)$ обозначается *степень вершины* $v \in V$, то есть число инцидентных v ребер, а через $\delta(G)$ — *минимальная степень* вершин в G. Граф называется *лесом* (*линейным лесом*), если каждая его компонента связности является деревом (цепью). Для всякого подграфа H в G через $v(H)$ и $e(H)$ обозначается число вершин и ребер в H, соответственно. Подграф H в G называется *остовным*, если его множество вершин совпадает с V. Через $G[X]$ обозначается подграф в G, *порожденный* множеством вершин X. *Фактором* в мультиграфе G называется любое подмножество его ребер, а *факторизацией* — разбиение множества ребер G на факторы. Фактор $F \subseteq E$, а также соответствующий ему

Glebov, A.N., An enhancement of Nash-Williams' Theorem on edge arboricity of graphs.

Работа поддержана РФФИ (гранты 15-01-05867 и 15-01-00976).

Поступила 7 ноября 2017 г., опубликована 6 декабря 2017 г.

остовный подграф $G_F = (V, F)$ в G, будем называть *нетривиальными*, если G_F не содержит изолированных вершин, то есть F является реберным покрытием G. *Реберной древесностью* (или просто *древесностью*) $\gamma(G)$ мультиграфа G называется наименьшее число лесов, на которые его можно факторизовать, а *дробной древесностью* G называется число $Arb(G) = \max\limits_{X \subseteq V} \frac{e(G[X])}{|X|-1}$, задающее нижнюю оценку на $\gamma(G)$.

Проблема разбиения (факторизации) множества ребер графа на остовные леса, деревья и связные подграфы стала привлекать внимание математиков в середине 20 века. В начале 1960-х годов Нэш-Вильямсом [9, 10] и Таттом [12] были получены фундаментальные результаты о факторизуемости графов на леса и остовные деревья. В частности, Нэш-Вильмс доказал следующий изящный критерий факторизуемости мультиграфа на k лесов.

Теорема 1. [9, 10] *Мультиграф $G = (V, E)$ допускает факторизацию на k лесов, если и только если для любого подмножества вершин $X \subseteq V$ число ребер в подграфе $G[X]$ не превышает $k(|X| - 1)$.*

Из этой теоремы получается следующая простая формула для вычисления древесности мультиграфа: $\gamma(G) = \lceil Arb(G) \rceil$.

После появления работ Нэш-Вильямса [9, 10] некоторыми авторами были предложены альтернативные, более короткие, доказательства теоремы 1, основанные на различных идеях (см. [2, 11]).

Другое важное направление исследований, отчасти мотивированное изучением разреженных и планарных графов, предполагает введение дополнительных ограничений на характеристики лесов, входящих в факторизацию мультиграфа. Одна из причин для введения таких ограничений заключается в следующем. Заметим, что если дробная древесность мультиграфа G превышает k и равна $Arb(G) = k + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$, то, согласно теореме 1, для факторизации G требуется $k+1$ лесов. Однако в случае, если число ε достаточно мало, можно надеяться, что существует факторизация G на "почти k лесов", то есть такая факторизация на $k + 1$ лесов, при котрой последний, $(k + 1)$-й, лес является "маленьким" (в том или ином смысле) или разреженным. Эта идея получила точное выражение в так называемой Гипотезе о дереве девяти драконов (Nine Dragon Tree Conjecture), выдвинутой в работе [8]: если для некоторого целого $d \geq 1$ выполняется неравенство $Arb(G) \leq k + \frac{d}{k+d+1}$, то мультиграф G допускает такую факторизацию на $k + 1$ лесов, при которой максимальная степень вершин в одном из лесов не превосходит d. В той же работе [8] была высказана Сильная гипотеза о дереве девяти драконов: если $Arb(G) \leq k + \frac{d}{k+d+1}$, то существует такая факторизация G на $k + 1$ лесов, при которой каждая компонента связности в одном из лесов содержит не более d ребер. Исследованию указанных гипотез, а также их модификаций, и доказательству их справедливости при различных значениях параметров k и d в последнее время были посвящены работы многих авторов (см. [3, 6, 7, 8, 13]). В частности, в [6] была полностью доказана исходная (не сильная) гипотеза о дереве девяти драконов.

В настоящей статье исследуется другой вариант дополнительных ограничений на факторизацию графа, в некотором смысле противоположный гипотезе о дереве девяти драконов. Во многих задачах факторизации оказывается важным, чтобы возникающие в факторах компоненты связности не были чересчур маленькими, то есть чтобы их размер был ограничен снизу. В простейшем случае требуется, чтобы все факторы были нетривиальными, то есть не содержали изолированных вершин. В этом смысле представляет особый интерес следующая теорема, справедливость которой следует из результатов Гупты [4, 5]

Теорема 2. [4, 5] *Пусть G — произвольный граф с минимальной степенью $\delta(G) \geq k+1$ или двудольный граф с минимальной степенью $\delta(G) \geq k$. Тогда G допускает факторизацию на k нетривиальных факторов (которые не обязательно являются лесами, но не имеют изолированных вершин).*

В [1] было доказано, что при $k \geq 2$ любой $(k+1)$-регулярный граф допускает факторизацию на k нетривиальных линейных лесов, и что любой 3-регулярный граф можно факторизовать на нетривиальный лес и подграф, в котором каждая компонента связности является циклом или подграфом K_2.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема, которая одновременно уточняет теорему 1 и является модификацией теоремы 2 и второго результата из [1]:

Теорема 3. *Пусть $k \geq 2$ — целое число, и $G = (V, E)$ — мультиграф с древесностью $\gamma(G) \leq k$, удовлетворяющий одному из условий:*
(1) G — двудольный и $\delta(G) \geq k$;
(2) $k = 2$ и $\delta(G) \geq 3$.
Тогда G допускает факторизацию на k нетривиальных лесов.

Заметим, что все нижние оценки на минимальную степень мультиграфа в теореме 3 являются неулучшаемыми (то есть теорема перестает быть верной при замене в оценках k на $k-1$ или 3 на 2). Для случая (1) теоремы 3 это следует из того, что каждая вершина мультиграфа должна быть инцидентна ребрам из всех факторов, а для случая (2) неулучшаемость следует из примера цикла нечетной длины. Также отметим, что в случае k-регулярного двудольного мультиграфа теорема 3 равносильна результату об 1-факторизуемости (реберной k-раскрашиваемости) такого мулльтиграфа.

2. Доказательство основного результата

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 3, определим ряд необходимых понятий. Пусть задан мультиграф $G = (V, E)$ и его факторизация $\Phi = (F_1, F_2, \ldots, F_k)$, то есть разбиение множества ребер G на факторы: $E = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$. Будем рассматривать факторизацию Φ как раскраску ребер мультиграфа G цветами $1, 2, \ldots, k$, заланную отображением $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$, где $c(e) = i$, если и только если $e \in F_i$. Для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ обозначим через $G_i = (V, F_i)$ остовный подграф в G, образованный ребрами цвета i. Через $d_i(v)$ обозначим степень вершины $v \in V$ в подграфе G_i, а через s_i — число изолированных вершин (степени 0) в G_i. Положим $s(\Phi) = \sum\limits_{i=1}^{k} s_i$.

Для произвольных двух цветов $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ обозначим через $G_{i,j} = (V, F_i \cup F_j)$ остовный подграф в G, образованный ребрами цветов i и j. Маршрут P в подграфе $G_{i,j}$ назовем (i,j)-*чередующимся* (или просто *чередующимся*), если в нем чередуются ребра цветов i и j. *Инверсией* (i,j)-чередующегося маршрута назовем одновременную перекраску всех его ребер цвета i в цвет

j, и наоборот. Маршрут $P = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_m$ будем называть *простой цепью* (*полупростой цепью*), если все вершины $v_0, v_1, \ldots, v_m$ различны (соответственно, все вершины $v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$ различны).

Приступим к доказательству теоремы 3. Пусть мультграф $G = (V, E)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то есть для него выполняется неравенство $\gamma(G) \le k$ и одно из условий (1) или (2). Из неравенства $\gamma(G) \le k$ следует, что G допускает факторизацию $\Phi = (F_1, F_2, \ldots, F_k)$ на k лесов. Выберем Φ таким образом, чтобы значение параметра $s(\Phi)$ было минимальным. Если $s(\Phi) = 0$, то имеем искомую факторизацию G на k нетривиальных лесов.

Пусть $s(\Phi) > 0$. Не теряя общности, будем считать, что в подграфе G_1 имеется изолированная вершина v_0. Так как $d(v_0) \ge \delta(G) \ge k$ и при v_0 нет ребер цвета 1, то найдется такой цвет $i \ne 1$, что v_0 инцидента хотя бы двум ребрам этого цвета, то есть $d_i(v_0) \ge 2$. Не уменьшая общности, будем считать, что $i = 2$.

Докажем, что в подграфе $G_{1,2}$ любая полупростая цепь с началом в v_0 является $(1,2)$-чередующейся. Допустим, что это неверно, и пусть $P = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{t-1}, e_t, v_t$ — полупростая нечередующаяся цепь наименьшей длины в $G_{1,2}$. Из минимальности P следует, что $c(e_{t-1}) = c(e_t)$ и простая цепь $P' = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{t-1}, v_{t-1}$ является чередующейся. Кроме того, при каждом $p = 1, \ldots, t-2$, вершина v_p инцидентна только одному ребру (а именно, ребру e_p), окрашенному в цвет $c(e_p)$. Поскольку в подграфе G_1 вершина v_0 — изолированная, то $c(e_1) = 2$.

Осуществим инверсию чередующейся простой цепи P'. Из условий $c(e_1) = 2$, $d_2(v_0) \ge 2$ и $c(e_{t-1}) = c(e_t)$ следует, что после выполнения инверсии вершина v_0 перестает быть изолированной в G_1, при этом никаких новых изолированных вершин в подграфах G_1 и G_2 не образуется. Таким образом, параметр $s(\Phi)$ уменьшается на единицу. Чтобы получить противоречие с минимальностью $s(\Phi)$, остается убедиться, что после инверсии P' подграфы G_1 и G_2 остаются лесами. Будем перекрашивать ребра цепи P' последовательно, начиная с e_1. Из доказанных выше свойств следует, что перед перекрашиванием очередого ребра e_{p+1} в цвет $i \in \{1, 2\}$ (когда ребро e_p уже перекрашено в цвет $3 - i$, или при $p = 0$) вершина v_p является изолированной в графе G_i. Поэтому после прекрашивания e_{p+1} в цвет i это ребро становится висячим в подграфе G_i, так что G_i остается лесом. Из полученного противоречия следует, что все полупростые цепи с началом v_0 в подграфе $G_{1,2}$ являются чередующимися.

Рассомотрим в $G_{1,2}$ максимальную (по включению вершин и ребер) полупростую цепь $P = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_m$. По доказанному, цепь P является $(1,2)$-чередующейся. Положим $i = c(e_m)$ и осуществим инверсию цепи P. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что подграфы G_1 и G_2 после инверсии остаются лесами. Если P — простая цепь, то из ее максимальности следует, что до выполнения инверсии вершина v_m не инцидентна ребрам цвета $3 - i$ в G, а значит, v_m является изолированной в графе G_{3-i}. После инверсии вершина v_m становится изолированной в G_i, однако перестает быть изолированной в G_{3-i}, а вершина v_0 перестает быть изолированной в G_1. Таким образом, параметр $s(\Phi)$ уменьшается на единицу.

Пусть цепь P не является простой. В этом случае $v_m = v_p$ для некоторого $p \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Если $p \ne 0$, то после выполнения инверсии вершина v_p не становится изолированной ни в одном из графов G_1 и G_2, а вершина v_0 перестает быть изолироввнной в G_1, так что параметр $s(\Phi)$ уменьшается. Пусть

$p = 0$. Поскольку вершина v_0 не инцидентна ребрам цвета 1, то $c(e_1) = c(e_m) = 2$. Из $(1,2)$-чередования цепи P следует, что m нечетно, а значит, P является циклом нечетной длины в G. Следовательно, граф G не является двудольным. Это означает, что для G выполняется условие (2) теоремы 3. Таким образом, вершина v_0 инцидентна только ребрам цвета 2 в G, и $d_2(v_0) = d(v_0) \geq \delta(G) \geq 3$. Отсюда следует, что после выполнения инверсии сразу два ребра при вершине v_0 окрашиваются в цвет 1, однако, в силу условия $d_2(v_0) \geq 3$, вершина v_0 не становится изолированной в G_2. Это противоречит минимальности параметра $s(\Phi)$. Теорема 3 доказана.

3. Заключение

Мы предполагаем, что справедливо следующее общее усиление теорем 1, 2 и пункта (2) теоремы 3:

Гипотеза 1. *Любой граф G с древесностью $\gamma(G) \leq k$ и минимальной степенью $\delta(G) \geq k+1$ допускает факторизаию на k нетривиальных лесов.*

Заметим, что оценка на минимальную степень графа в гипотезе 1 является неулучшаемой, что следует из примера любого k-регулярного графа G с $\chi'(G) = k+1$.

Также представляет интерес более общий вопрос о том, какие условия на минимальную степеннь (мульти)графа (с древесностью k) являются достаточными для его факторизуемости на k факторов (k лесов), в каждом из которых все компоненты связности состоят из не менее чем d вершин, где $d \geq 2$ — заданное число.

References

[1] S. Akbari, T.R. Jensen, M. Siggers, *Decompositions of graphs into trees, forests, and regular subgraphs*, Discrete Math., **338**:8 (2015), 1322–1327. MR3336101

[2] B. Chen, M. Matsumoto, J.F. Wang, Z.F. Zhang, J.X. Zhang, *A short proof of Nash-Williams' theorem for the arboricity of a graph*, Graphs Combin., **10**:1 (1994), 27–28. MR1273008

[3] M. Chen, S.-J. Kim, A.V. Kostochka, D.B. West, X. Zhu, *Decomposition of sparse graphs into forests: The Nine Dragon Tree Conjecture for $k = 2$*, J. Combin. Theory Ser. B, **122** (2017), 741–756.

[4] R.P. Gupta, *Studies in the theory of graphs*, Ph.D. Thesis, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1967).

[5] R.P. Gupta, *On the chromatic index and the cover index of a multigraph*, In: Y. Alavi, D.R. Lick (eds) Theory and Applications of Graphs. Lecture Notes in Mathematics, **642**. Springer, Berlin, Heidelberg (1978), 204–215. MR0491300

[6] H. Jiang, D. Yang, *Decomposing a graph into forests: the nine dragon tree conjecture is true*, Combinatorica, (2016), in press.

[7] S.-J. Kim, A.V. Kostochka, H. Wu, D.B. West, X. Zhu, *Decomposition of sparse graphs into forests and a graph with bounded degree*, J. Combin. Theory Ser. B, **74**:4 (2013), 369–391. MR3145631

[8] M. Montassier, P. Ossona de Mendez, A. Raspaud, X. Zhu, *Decomposing a graph into forests*, J. Combin. Theory Ser. B, **102** (2012), 38–52. MR2871765

[9] C.St.J.A. Nash-Williams, *Edge-disjoint spanning trees of finite graphs*, J. London Math. Soc., **36** (1961), 445–450. MR0133253

[10] C.St.J.A. Nash-Williams, *Decomposition of finite graphs into forests*, J. London Math. Soc., **39** (1964), 12. MR0161333

[11] C. Reiher, L. Sauermann, *Nash-Williams' theorem on decomposing graphs into forests*, Mathematika, **60**:1 (2014), 32–36. MR3164516

[12] W.T. Tutte, *On the problem of decomposing a graph into n connected factors*, J. London Math. Soc., **36** (1961), 221–230. MR0140438

[13] D. Yang, *Decompose a graph into forests and a matching*, submitted for publication.

Aleksey Nikolaevich Glebov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: angle@math.nsc.ru