S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1338–1348 (2017) УДК 519.4
DOI 10.17377/semi.2017.14.116 MSC 20F36

О НОРМАЛИЗАТОРАХ ПОДГРУПП В ГРУППАХ КОКСТЕРА С ДРЕВЕСНОЙ СТРУКТУРОЙ

И.В. ДОБРЫНИНА

Abstract. This article explores normalizers of finitely generated subgroups in Coxeter groups with tree-structure.

Keywords: Coxeter group with tree-structure, subgroup, amalgamated product of groups.

1. Введение

Пусть G — конечно порожденная группа Кокстера с копредставлением

$$G =< a_1, \dots, a_n;\ (a_ia_j)^{m_{ij}}, i, j = \overline{1, n} >,$$

где m_{ij} — элементы симметрической матрицы Кокстера: $\forall i, j \in \overline{1, n}$, $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geq 2 \cup \{\infty\}$, $i \neq j$. В случае $m_{ij} = \infty$ образующие a_i, a_j не связаны определяющим словом.

Если группе G соответствует конечный дерево-граф Γ такой, что образующим $a_i, i = \overline{1, n}$, соответствуют вершины графа Γ, а каждому определяющему слову $(a_ia_j)^{m_{ij}}$ – ребро e, соединяющее вершины, соответствующие a_i и a_j, то мы имеем группу Кокстера с древесной структурой [1].

Группу G можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих

$$G_{ij} =< a_i, a_j;\ a_i^2, a_j^2, (a_ia_j)^{m_{ij}} >,$$

Dobrynina, I.V., On normalizers of subgroups in Coxeter groups with tree-structure.

Работа поддержана РФФИ (грант 15-41-03222 р_центр_а).

Поступила 25 ноября 2016 г., опубликована 7 декабря 2017 г.

а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} – циклическую подгруппу $< a_j; a_j^2 >$.

В настоящей работе доказывается, что нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы H группы Кокстера G с древесной структурой конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

2. Основная теорема

Пусть G — конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой, заданная копредставлением $G =< a_1, \dots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j = \overline{1, n} >$, где m_{ij} – числа, соответствующие симметрической матрице Кокстера, причем $m_{ii} = 1, m_{ij} \geq 2, i \neq j$, группе G соответствует конечный связный дерево-граф Γ такой, что образующим $a_i, i = \overline{1, n}$, соответствуют вершины графа Γ, а каждому определяющему слову $(a_i a_j)^{m_{ij}}$ – ребро e, соединяющее вершины, соответствующие a_i и a_j.

Теорема 1 ([2]). *Пусть группа* $G =< \prod_{s=1}^{n} *G_s; relG_1, \dots, relG_n, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} >$ *есть древесное произведение групп, объединенных по изоморфным подгруппам* $U_{ij} < G_i$ *и* $U_{ji} < G_j$ *с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов* $\{\varphi_{ij}\} : \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. *Тогда если подгруппы* U_{ij} *и* U_{ji} *обладают условием максимальности и в сомножителях разрешимы 1) проблема вхождения; 2) проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы* $H < G_i$ *с подгруппой* $U_{ij} < G_i$*; 3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы* $H < G_i$ *с подгруппой* $U_{ij} < G_i$*, то в группе* G *разрешима проблема вхождения.*

Так как группу Кокстера G с древесной структурой можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по циклическим подгруппам: как описано выше, от графа Γ группы G нужно перейти к графу $\overline{\Gamma}$, то получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

Перейдем к рассмотрению основной теоремы:

Теорема 2. *Нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы Кокстера с древесной структурой конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного нормализатора.*

Доказательство. Будем рассматривать группу Кокстера G с древесной структурой, представленную в виде свободного произведения двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам:

$$G =< \prod_{s=1}^{n} *G_s; relG_1, \dots, relG_s, a_j = a_j' > .$$

Как отмечено ранее, группе Кокстера G соответствует дерево-граф $\overline{\Gamma}$ такой, что, если вершинам некоторого ребра $\overline{e}$ графа $\overline{\Gamma}$ соответствуют группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} >$ и $G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2, a_k^2, (a_j a_k)^{m_{jk}} >$, тогда ребру $\overline{e}$ соответствует циклическая подгруппа $< a_j;\ a_j^2 >$.

Доказательство будем проводить методом математической индукции по количеству сомножителей в свободном произведении с объединением.

Рассмотрим базу индукции, а именно справедливость теоремы для свободного произведения двупорожденных групп Кокстера

$$G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} >$$

и

$$G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2, a_k^2, (a_j a_k)^{m_{jk}} >$$

с древесной структурой, объединенных по циклической подгруппе $< a_j; a_j^2 >$:

$$\overline{G} =< a_i, a_j, a_j', a_k; a_i^2, a_j^2, a_k^2, a_j'^2, (a_i a_j)^{m_{ij}}, (a_j' a_k)^{m_{jk}}, a_j = a_j' > .$$

Лемма 1 ([1]). *Нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы Кокстера $\overline{G}$ с древесной структурой конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного нормализатора.*

Следовательно, база индукции выполнена в соответствии с леммой 1.

Далее рассмотрим древесное произведение $n-1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф $\overline{\Gamma}_{n-1}, \overline{\Gamma}_{n-1} \subset \overline{\Gamma}$. Группу, соответствующую графу $\overline{\Gamma}_{n-1}$, обозначим через $\overline{G}_{n-1}$. Пусть n-ый сомножитель есть подгруппа G_{jk} и она соответствует вершине дерева-графа $\overline{\Gamma}$, которая связана с графом $\overline{\Gamma}_{n-1}$ ребром e_t. При этом ребру e_t соответствует циклическая подгруппа второго порядка $< a_j; a_j^2 >$. Таким образом, группа G представляется как свободное произведение двух групп $\overline{G}_{n-1}$ и G_{jk}, объединенных по циклической подгруппе $< a_j; a_j^2 >$ порядка два, то есть $G = \overline{G}_{n-1} *_{<a_j;\ a_j^2>} G_{jk}$. По индуктивному предположению считаем, что теорема справедлива для группы $\overline{G}_{n-1}$.

Слово из группы G можно представить единственным образом в виде [3]:

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} K_g r_{ng} \dots r_{1g}, \qquad (1)$$

где r_{tg} и l_{sg}^{-1} – представители правых классов смежности группы $\overline{G}_{n-1}$ по $< a_j; a_j^2 >$ и G_{jk} по $< a_j; a_j^2 >$, причем r_{tg}, r_{t+1g} (аналогично l_{sg}, l_{s+1g}) принадлежат разным сомножителям группы G. K_g – ядро слова g. Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе, то слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы G, а K_g – другому. В этом случае слоговая длина слова (1) равна $L(g) = 2n + 1$.

Определение 1 ([3]). *Если в (1) $l_{1g} \dots l_{ng} = (r_{ng} \dots r_{1g})^{-1}$, то слово*

$$g = r_{1g} \dots r_{ng} K_g r_{ng}^{-1} \dots r_{1g}^{-1} \qquad (2)$$

называется трансформой, слово $(r_{1g} \dots r_{ng})^{\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$, называется крылом трансформы.

Если K_g принадлежит объединяемой подгруппе, то в (1) слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат разным сомножителям группы G. В этом случае слоговая длина слова

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} h_g r_{ng} \dots r_{1g}, \qquad (3)$$

где $h_g = K_g$, равна $L(g) = 2n$. Слово вида (1) будем называть нетрансформой нечетной длины, слово вида (3) нетрансформой четной длины.

Определение 2 ([3]). *Подслово $g = l_{1g} \dots l_{ng}(r_{ng} \dots r_{1g})$ называется левой (правой) половиной слов (1), (3). Подслово $l_{1g} \dots l_{ng} K_g$ $(K_g r_{ng} \dots r_{1g})$ — большим начальным (конечным) отрезком.*

Определение 3 ([3]). *Левая (правая) половина слова*

$$w_i = l_{1w_i} \dots l_{mw_i} K_{w_i} r_{mw_i} \dots r_{1w_i}$$

называется изолированной в множестве $\{w_j\}_{j \in \overline{1,N}}$, *если ни у одного из слов* $w_j^{\varepsilon}, \varepsilon = \pm 1$, *множества* $\{\{w_j\} \setminus w_i\}_{j \in \overline{1,N}} \cup \{\{w_j^{-1}\} \setminus w_i^{-1}\}_{j \in \overline{1,N}}$ *мы не можем выделить* $l_{1w_i} \dots l_{mw_i}$ $(r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$ *в качестве начального (конечного) подслова, то есть* $w_j^{\varepsilon} \neq l_{1w_i} \dots l_{mw_i} l_{m+1w_j} w_{jn}^{\varepsilon} (w_j^{\varepsilon} \neq w_{j1}^{\varepsilon} r_{m+1w_j} r_{mw_i} \dots r_{1w_i})$.

Определение 4 ([3]). *Конечное множество слов* $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ *группы* G *назовем специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям*:

1. Левая половина нетрансформы из множества W *изолирована в нем. Если нетрансформа четной длины, то изолирована и левая, и правая половины.*

2. Длину нетрансформы w_j *нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством* $\{\{w_i\} \setminus w_j\}_{i=\overline{1,N}}$. *Длину произвольного элемента* w_j *нельзя уменьшить, умножая на слово* w *длины меньше* $L(w_j)$, *принадлежащее подгруппе* $< \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} >$.

3. Если $w_i'^{\varepsilon} = l_{1w_i'} \dots l_{nw_i'} K_{w_i'} r_{nw_i'} \dots r_{s+1w_i'} r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}, \varepsilon = \pm 1, s < n$, *– нетрансформа из* W *и* $\{w_i''^{\varepsilon} = l_{1w_i''} \dots l_{nw_i''} K_{w_i''} r_{nw_i''} \dots r_{s+1w_i''} r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}, \varepsilon = \pm 1\}$ — *подмножество нетрансформ из* $(W \setminus w_i') \cup (W^{-1} \setminus w_i'^{-1})$, *правые половины которых оканчиваются подсловом* $r_{sw_i'} \dots r_{1w_i'}$, *тогда если подгруппа* $< \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} > \cap\ r_{1w_i'}^{-1} \dots r_{sw_i'}^{-1} D r_{sw_i'} \dots r_{1w_i}' = B$, *где* $D = \overline{G}_{n-1}$, *если* $r_{s+1w_i'} \in \overline{G}_{n-1}$, *либо* $D = G_{jk}$, *если* $r_{s+1w_i'} \in G_{jk}$, *то для* $u \in B$ *выполняются неравенства* $L(w_i'u) \geq L(w_i'), L(w_i'uw_i''^{\varepsilon}) \geq L(w_i')$.

4. Пусть $w_i = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1w_i} \dots l_{nw_i} K_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{s+1w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i}$, $w_j = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l_{s+1w_j} \dots l_{mw_j} K_{w_j} r_{mw_j} \dots r_{s+1w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$ *– слова из* W, *не обязательно различные,* $s \leq m \leq n$, *тогда не существует слова* $g \neq 1$ *длины меньше* $2s$ *из подгруппы, порожденной* W, *такого, что если* $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, *то*

$$gw_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1w_i} \dots l'_{nw_i} K'_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{1w_i},$$

либо если $r_{sw_i} \dots r_{1w_i} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, *то*

$$w_i g = l_{1w_i} \dots l_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i} \dots r'_{s+1w_i} r_{s+1w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j},$$

либо если $r_{1w_i}^{-1} \dots r_{sw_i}^{-1} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, *то*

$$gw_i^{-1} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} r'^{-1}_{s+1w_i} \dots r'^{-1}_{nw_i} K'^{-1}_{w_i} l^{-1}_{nw_i} \dots l^{-1}_{1w_i},$$

либо если $l_{sw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, *то*

$$w_i^{-1} g = r^{-1}_{1w_i} \dots r^{-1}_{nw_i} K'^{-1}_{w_i} l'^{-1}_{nw_i} \dots l'^{-1}_{s+1w_i} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}.$$

Теорема 3 ([3]). *Всякое конечное множество слов* $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, *группы* $G = \overline{G}_{n-1} *_{<a_j;\ a_j^2>} G_{jk}$ *можно через конечное число шагов преобразовать в специальное.*

Пусть H – конечно порожденная подгруппа без кручения группы Кокстера $G = \overline{G}_{n-1} *_{<a_j;\ a_j^2>} G_{jk}$ с древесной структурой. Приведем множество образующих $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, подгруппы H к специальному в соответствии с теоремой 3. Разобьем его на подмножества следующим образом: подмножеству M_0 принадлежат все нетрансформы, а подмножеству $M_i, i = \overline{1,k}$, принадлежат трансформы с одинаковыми крыльями, сопряженные $\overline{G}_{n-1}$ или G_{jk}. С каждым из множеств $M_i, i=\overline{1,k}$, связана подгруппа $(M_i)=r_{1i}^{-1}r_{2i}^{-1}\dots r_{ni}^{-1}C_ir_{ni}\dots r_{2i}r_{1i}$, где C_i – подгруппы из $\overline{G}_{n-1}$ или G_{jk}, порожденные ядрами трансформ, входящих в M_i. Упорядочим подгруппы (M_i) по длинам крыльев трансформ, такой порядок обозначим "$\leq$". Получим ряд

$$(M_1)\leq(M_2)\ldots\leq(M_k). \tag{4}$$

Лемма 2 ([3]). *Ряд* (4) *можно преобразовать в ряд*

$$(M_1')\leq(M_2')\ldots\leq(M_{k'}'), \tag{4'}$$

обладающий следующими свойствами:

1. $gp((M_0),(M_1),(M_2),\dots,(M_k))=gp((M_0),(M_1'),(M_2'),\dots,(M_{k'}'))$.

2. Если подгруппе $(M_j')=r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}C_j'r_{nj}\dots r_{2j}r_{1j}$ *принадлежит трансформа* $u=r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}h_ur_{nj}\dots r_{2j}r_{1j}$, *где* h_u *принадлежит обвединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (4′) имеется подгруппа*

$$(M_l')=r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\dots r_{n-1j}^{-1}C_l'r_{n-1j}\dots r_{2j}r_{1j},$$

содержащая u.

3. Если $(M_j')=r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}C_j'r_{nj}\dots r_{1j}$, $(M_s')=r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}r_{n+1s}^{-1}\dots r_{ms}^{-1}C_s'r_{ms}\dots r_{n+1s}r_{nj}\dots r_{1j}$ *– подгруппы ряда (4′) и подгруппа* (M_j') *содержит трансформу* $u=r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}h_ur_{nj}\dots r_{1j}$ *либо* $u'=r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}K_ur_{nj}\dots r_{1j}$, $K_u=r_{n+1s}^{-1}h_ur_{n+1s}$, *то существует подгруппа ряда (4′)* $(M_k')=r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}r_{n+1s}^{-1}C_k'r_{n+1s}r_{nj}\dots r_{1j}$, *содержащая в первом случае трансформу* u, *во втором –* u'.

4. Если $(M_j')=r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}C_j'r_{nj}\dots r_{1j}$ *– подгруппа ряда (4′) и* $y^\varepsilon=l_{1y}^{-1}\dots l_{my}^{-1}$ $K_yr_{my}\dots r_{n+1y}r_{nj}\dots r_{1j},\varepsilon=\pm1$, *– элемент специального множества, причем подслово* $r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}r_{n+1y}^{-1}$ *не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы* $w^\varepsilon,\varepsilon=\pm1$, *и, если подгруппа* (M_j') *содержит трансформу* $r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}hr_{nj}\dots r_{1j}$ *или трансформу* $r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}Kr_{nj}\dots r_{1j}$, *где* $K=r_{n+1y}^{-1}hr_{n+1y}$, *то существует подгруппа ряда (4′)* $(M_l')=r_{1j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}r_{n+1y}^{-1}C_l'r_{n+1y}$ $r_{nj}\dots r_{1j}$, *содержащая эту трансформу.*

5. Если для некоторой трансформы $u=r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}K_ur_{nj}\dots r_{2j}r_{1j}$, *принадлежащей* $(M_j')=r_{1j}^{-1}r_{2j}^{-1}\dots r_{nj}^{-1}C_j'r_{nj}\dots r_{2j}r_{1j}$, *и нетрансформы* y *(левая половина* y *изолирована) из* M_0 *выполняется соотношение* $L(y^{-1}uy)\leq L(y)$, *тогда существует подгруппа* (M_s') *ряда (4′), которая содержит трансформу* $y^{-1}r_{1u}^{-1}r_{2u}^{-1}\dots r_{nu}^{-1}K_ur_{nu}\dots r_{2u}r_{1u}y$, *а если* $L(yuy^{-1})<L(y)$, *то существует подгруппа* (M_s') *ряда (4′) с трансформой* $yr_{1u}^{-1}r_{2u}^{-1}\dots r_{nu}^{-1}K_ur_{nu}\dots r_{2u}r_{1u}y^{-1}$.

Подгруппу, порожденную специальным множеством $W=\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, обозначим через $gp(M_0,S)$, где S – основа, порожденная подгруппами ряда (4′).

Определение 5 ([3]). *Произведение* $u_1u_2\dots u_m$, *где* $u_i\neq1, i=\overline{1,m}$, $u_i\in W\cup W^{-1}, i=\overline{1,m}$, *из подгруппы* $gp(M_0,S)$ *назовем словом группы* $G=\overline{G}_{n-1}*_{<a_j;a_j^2>}$ G_{jk}, *если*

1. $u_i\in\{M_0\cup M_0^{-1}\}$ *либо* u_i *принадлежат некоторой подгруппе из ряда (4′).*

2. $u_i\neq u_{i+1}^{-1}, i=\overline{1,m-1}$.

3. $u_i,u_{i+1}, i=\overline{1,m-1}$, *не содержатся в одной подгруппе ряда (4′).*

4. В $u_1u_2\dots u_m$ *нет произведения* $u_iu_{i+1}u_{i+2}, i=\overline{1,m-2}$, *где* $u_i\neq u_{i+2}^{-1}, u_i\in\{M_0\cup M_0^{-1}\}, u_{i+1}\in(M_j'), u_iu_{i+1}u_{i+2}\in(M_s')$, *где* $(M_j'),(M_s')$ *из ряда (4’).*

Лемма 3 ([3]). *Всякое произведение* $w_{i1}^{\varepsilon 1} w_{i2}^{\varepsilon 2} \dots w_{in}^{\varepsilon n}, \varepsilon_j = \pm 1$, *где* w_{ij} *— образующие группы* $< W >$, *через конечное число шагов можно привести к слову* $u_{i1} u_{i2} \dots u_{im}, m \leq n$, *группы* $gp(M_0, S) =< W >$.

Определение 6 ([3]). *Будем говорить, что между словами* v_1 *и* v_2 *имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения* $v_1 v_2$ *соответственно больше, равна или меньше максимальной из длин* $L(v_1), L(v_2)$.

Определение 7 ([3]). *Слово* $u_1 u_2 \dots u_m$ *является простым, если*

$$L(u_1 u_2 \dots u_m) = \max\{L(u_1), L(u_2), \dots, L(u_m)\}.$$

Лемма 4 ([3]). *Пусть* $u_1 u_2 \dots u_m$ *– слово из подгруппы* $gp(M_0; S)$. *Тогда выполняется:* $L(u_1 u_2 \dots u_m) \geq L(u_i), i = \overline{1, m}$.

Следствие 2. [3] *Всякое слово подгруппы* $gp(M_0; S)$ *может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода.*

Лемма 5 ([3]). *Подгруппа* (M_0), *порожденная нетрансформами специального множества, свободна, причем* $(M_0) \cap (S)^{gp(M_0;S)} = E$, *где* E *— единичная подгруппа.*

Лемма 6 ([4]). *Пусть* u, $v \in G$, G *— группа Кокстера с древесной структурой,* A *— множество образующих* G, u, v *— слова минимальной длины и существует* $z \in G$ *такое, что* $z^{-1} u z = v$. *Тогда, если слово* u *из подгруппы* G_j *на образующих* A_j, $A_j \subset A$, *и не является образующим из* A_j, *то* v, z *— слова из подгруппы* G_j *на образующих* A_j.

Лемма 7 ([5]). *Пусть* $H_1 = gp(M_0; S_1)$ *и* $H_2 = gp(M_0'; S_1')$ *— две конечно порожденные подгруппы группы* G. *Основа* S_1 *подгруппы* H_1 *порождена подгруппами ряда*

$$(M_1) \leq (M_2) \dots \leq (M_{k_1}), \tag{6}$$

основа S_1' *подгруппы* H_2 *порождена подгруппами ряда*

$$(M_1') \leq (M_2') \dots \leq (M_{k_2}'). \tag{6'}$$

Тогда если H_1 *и* H_2 *сопряжены в* G, *то есть существует* $z \in G$ *такое, что* $z^{-1} H_1 z = H_2$, *то существуют* $w \in gp(M_0'; S_1'), i \in \overline{1, k_1}, j \in \overline{1, k_2}$, *такие, что* $(M_i) = w^{-1} z^{-1} (M_j') z w$, *где* (M_i) *– подгруппа ряда (6), а* (M_j') *– подгруппа ряда (6').*

Пусть группе Кокстера с древесной структурой G соответствует конечный дерево-граф Γ: вершинам графа Γ соответствуют образующие $a_i, i = \overline{1, n}$, а всякому ребру e, соединяющему вершины с образующими a_i и a_j, соответствует определяющее слово $(a_i a_j)^{m_{ij}}$.

Определение 8 ([6]). *Ребро* e' *дерева-графа* Γ *назовем замыкающим ребром некоторого пути, если ему соответствует четное число Кокстера.*

Лемма 8 ([6]). *Пусть* G *— конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой; слово* $w \in G$ *такое, что* $|w| = 1$, *то есть* $w = a_i, i \in \overline{1, n}$. *Тогда централизатор элемента* w *есть подгруппа вида*

$$C(w) =< \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_s, w; \tilde{z}_r^{\,2} = 1, w^2 = 1, r = \overline{1, s} >,$$

где $\tilde{z}_r$ – *циклически сократимое слово вида* $\tilde{z}_r = z_1 z_2 \ldots z_{t-1} z_0 z_{t-1}^{-1} \ldots z_2^{-1} z_1^{-1}$, $z_i \in \overline{G}_{n-1}$, z_0 – *подслово определяющего слова, соответствующего замыкающему ребру, и* $|z_i| = m_{ij} - 1, i = \overline{0, t-1}$.

Итак, пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Кокстера $G = \overline{G}_{n-1} *_{<a_j;\ a_j^2>} G_{jk}$ с древесной структурой.

Найдем все элементы $Z \in N_G(H)$, порождающие $N_G(H)$. Наша задача — показать, что если H конечно порождена, то таких порождающих существует лишь конечное число и их можно эффективно выписать.

Если $H \in \overline{G}_{n-1}$, то по лемме 6 $Z \in \overline{G}_{n-1}$ и индуктивному предположению теорема справедлива. Поэтому считаем, что $H \notin \overline{G}_{n-1}$.

Приведем множество образующих $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ подгруппы H по теореме 3 к специальному виду: $H = gp(M_0; S)$, где основа S порождена в соответствии с леммой 2 подгруппами ряда

$$(M_1) \leq (M_2) \ldots \leq (M_k), \tag{5}$$

причем (M_0) — свободная часть, $(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i, C_i \in \overline{G}_{n-1}$ или $C_i \in G_{jk}, i = \overline{1, k}$.

Возможны следующие случаи.

Случай 1. Пусть $H = gp(M_0; S)$, причем основа S единична, то есть $H = (M_0)$ и по лемме 5 является свободной подгруппой в G.

Пусть $H =< X_1, X_2, \ldots, X_N >$. Рассмотрим слово $Z \in G$ такое, что справедливо равенство $Z^{-1} H Z = H$. Если $u_1, u_2 \in H$, $Z \in N_G(H)$, то $Z_0 = u_1 Z u_2 \in N_G(H)$. Поэтому Z будем выбирать наименьшим в двойном классе смежности HZH.

Образующие $\{X_i\}_{i=\overline{1,N}}$ являются специальными и удовлетворяют условиям:

1. Левая половина каждого $X_i \in \{X_i\}_{i=\overline{1,N}}$, имеющего нечетную длину, изолирована в $\{\{X_j\} \setminus X_i\}_{j=\overline{1,N}} \cup \{\{X_j^{-1}\} \setminus X_i^{-1}\}_{j=\overline{1,N}}$. Левая и правая половины каждого $X_i \in \{X_i\}_{i=\overline{1,N}}$, имеющего четную длину, изолированы в $\{\{X_j\} \setminus X_i\}_{j=\overline{1,N}} \cup \{\{X_j^{-1}\} \setminus X_i^{-1}\}_{j=\overline{1,N}}$.

2. Большой начальный и большой конечный отрезки каждого $X_i \in \{X_i\}_{i=\overline{1,N}}$ изолированы в множестве $\{\{X_j\} \setminus X_i\}_{j=\overline{1,N}} \cup \{\{X_j^{-1}\} \setminus X_i^{-1}\}_{j=\overline{1,N}}$.

3. Для каждого $X_i \in \{X_i\}_{i=\overline{1,N}}$ справедливо соотношение $L(w_1^{\varepsilon_1} X_i w_2^{\varepsilon_2}) \geq L(X_i)$, где $w_s \in \{\{X_j\} \setminus X_i\}_{j=\overline{1,N}}, \varepsilon_s = \pm 1, s = \overline{1,2}$.

Выберем среди образующих $\{X_i\}_{i=\overline{1,N}}$ из H циклически несократимый X (если все образующие H циклически сократимы, то берем $X_i = cXc^{-1}$, где X — циклически несократимо. От подгруппы H перейдем к подгрупе $H' = cHc^{-1}$, имеющей циклически несократимый элемент; если подгруппы сопряжены, то сопряжены и их нормализаторы).

Пусть $L_0 = \max\{L(X_1), L(X_2), \ldots, L(X_N)\}$. Будем рассматривать произведение $Z^{-1} X Z = X_{i1}^{\varepsilon_1} \ldots X_{ik}^{\varepsilon_k}, \varepsilon_s = \pm 1, s = \overline{1, k}$. $L(XZ) \geq L(Z), L(Z^{-1}X) \geq L(Z)$, в противном случае Z не удовлетворяет условию минимальности. Так как X циклически несократимо, то в слове $Z^{-1} X Z$ одновременно не может происходить сокращение в $Z^{-1} X$ и XZ. Пусть между X и Z сокращение не происходит. Допустим, оно происходит между Z^{-1} и X, причем не может сократиться более половины X, иначе длину Z можно уменьшить.

Предположим, $L(Z) > L_0/2$. Представим, используя следствие 2 из леммы 4, слово $X_{i1}^{\varepsilon_1} \ldots X_{ik}^{\varepsilon_k}$ в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода, то есть $Z^{-1}XZ = X_{i1}^{\varepsilon_1} \dots X_{ik}^{\varepsilon_k} = v_1 v_2 \dots v_p$, причем $L(v_p) \leq L_0$ по определению 7. Рассмотрим произведение $v_{p-1}v_p$. Здесь сокращение не затрагивает ядер v_{p-1}, v_p. Так как более половины v_p укладывается в Z, то длину Z можно сократить, умножая справа на v_p^{-1}. Противоречие. Таким образом, $p > 1$ быть не может.

Пусть $p = 1$ и $Z^{-1}XZ = v_1$. Тогда $L(Z) > L_0/2$ и $L(Z^{-1}X) > L_0/2$, что невозможно. Таким образом, $L(Z) \leq L_0/2$.

Используя строение простого слова, получаем, что Z можно выбрать как подслово левой или правой половины некоторого образующего X_i из H. Выпишем все такие Z и проверим, используя следствие 1 из теоремы 1, равенство $Z^{-1}HZ = H$.

Случай 2. Пусть $H = gp(M_0; S)$, причем основа S не единична и порождена подгруппами ряда (5). Имеем

$$Z^{-1}gp(M_0; S)Z = gp(M_0; S). \tag{6}$$

По лемме 7 существуют $w \in gp(M_0; S), l, t$ такие, что

$$w^{-1}Z^{-1}(M_l)Zw = (M_t), \tag{7}$$

где $(M_l) = v_l^{-1}C_l v_l, C_l \in \overline{G}_{n-1}$ или $C_l \in G_{jk}$, $(M_t) = v_t^{-1}C_t v_t, C_t \in \overline{G}_{n-1}$ или $C_t \in G_{jk}$.

Перепишем соотношение (7) в следующем виде

$$w^{-1}Z^{-1}v_l^{-1}C_l v_l Zw = v_t^{-1}C_t v_t$$

или

$$v_t w^{-1}Z^{-1}v_l^{-1}C_l v_l Zwv_t^{-1} = C_t. \tag{8}$$

Из (6) на основе (8) далее получим

$$(v_t w^{-1}Z^{-1}v_l^{-1})v_l gp(M_0; S)v_l^{-1}(v_l Zwv_t^{-1}) = v_t gp(M_0; S)v_t^{-1}. \tag{9}$$

Приведем образующие подгрупп $v_l gp(M_0; S)v_l^{-1}, v_t gp(M_0; S)v_t^{-1}$ из (9) к специальным образующим в соответствии с теоремой 3 и леммой 2. Полученные подгруппы обозначим $gp(M_0'; S') = H_1$, $gp(M_0''; S'') = H_2$ соответственно. Основа S' порождена подгруппами

$$(M_1') \leq (M_2') \dots \leq (M_{k'}').$$

Основа S'' порождена подгруппами

$$(M_1'') \leq (M_2'') \dots \leq (M_{k''}'').$$

Пусть $v_l Zwv_t^{-1} = \tilde{w}$.

Тогда (9) имеет вид

$$\tilde{w}^{-1}gp(M_0'; S')\tilde{w} = gp(M_0''; S'')$$

или

$$\tilde{w}^{-1}H_1\tilde{w} = H_2.$$

Слово $\tilde{w}$ будем выбирать наименьшим в двойном смежном классе $H_1\tilde{w}H_2$.

Случай 2.1. Каждая подгруппа $(M_i), i = \overline{1, k}$, ряда (5) сопряжена с объединяемой подгруппой.

В данном случае (8) будет иметь вид:

$$v_t w^{-1}Z^{-1}v_l^{-1}a_j v_l Zwv_t^{-1} = a_j$$

или
$$\tilde{w}^{-1}a_j\tilde{w} = a_j.$$

Таким образом, $\tilde{w}$ принадлежит централизатору $C(a_j)$ элемента a_j, имеющего структуру как в лемме 8.

Пусть $\tilde{w} = z_1z_2\dots z_m$. Рассмотрим двойной класс смежности $H_1\tilde{w}H_2$. Проведем всевозможные сокращения на стыках. Допустим, что после сокращения мы получили $H_1z''_fz_{f+1}\dots z_{l-1}z'_lH_2$, где $z_f = z'_fz''_f, z_l = z'_lz''_l$, $f \in \overline{1,m}, l \in \overline{1,m}$. Далее будем искать пересечение классов смежности $z''_fC(a_j)\cap H_2$ и $C(a_j)z'_l\cap H_1$. Данная проблема в G разрешима, как доказано в [7]. Ограничим длину слова $\tilde{w}$, используя метод типов [7]. Для этого, используя лемму 3, перепишем общую часть $\tilde{w}$ с подгруппой H_1 в u-символах подгруппы H_1, а общую часть $\tilde{w}$ с подгруппой H_2 в u-символах подгруппы H_2.

Обозначим подгруппу $C(a_j)$ через H_0.

Изложим суть метода типов. Пусть произвольная конечно порожденная подгруппа H' группы G порождена специальным множеством слов. Каждый элемент $b \neq 1$ из H' имеет запись в w-символах: $b = w_{i1}^{\varepsilon 1}w_{i2}^{\varepsilon 2}\dots w_{il}^{\varepsilon l}, \varepsilon_j = \pm 1$, где w_{ij} — образующие подгруппы H'. По лемме 3 приведем его к слову в u-символах: $b = u_1\dots u_m$. Выполнив в полученном слове все возможные сокращения, получим слоговую запись $b = b_1b_2\dots b_k$.

Лемма 9 ([7]). *Каждый слог $b_i, i = \overline{1,k}$, слова $b = b_1b_2\dots b_k$ имеет вид:*
$$b_i = a'_ix_iy_iz_ia''_i, \tag{10}$$
где x_i — центральный или правый слог u_{s-1}, y_i — центральный слог трансформы u_s, z_i — левый или центральный слог u_{s+1}, a'_i и a''_i — элементы из объединяемой подгруппы $< a_j; a_j^2 >$.

Заметим, что каждое из a'_i и a''_i в лемме 10 либо есть единица, либо a_j.

Найдем пересечение $z''_fH_0 \cap H_2$.

Пусть $z''_fH_0 \cap H_2$ не пусто и $w \in z''_fH_0 \cap H_2, w \neq 1$. Тогда существуют такие $h_0 \in H_0, h_2 \in H_2$, что $w = z''_fh_0 = h_2$. Перепишем h_0, h_2 в u-символах подгрупп H_0, H_2 соответственно. Получим:
$$w = z''_fu_1^{(0)}u_2^{(0)}\dots u_{r_0}^{(0)} = u_1^{(2)}u_2^{(2)}\dots u_{r_2}^{(2)} = w_0b_1b_2\dots b_k. \tag{11}$$

Последняя запись в равенстве (11) дает несократимую запись слова w в группе G, w_0 – начальное подслово слова w.

Будем называть $v^{(s)-1}\alpha_i^{(s)}v^{(s)}$ типом трансформ порождающей подгруппы $M_i^{(s)} = v^{(s)-1}C_iv^{(s)}$ подгруппы H_s, $s \in \{0, 2\}$, группы G и обозначать его $(v^{(s)}, i)$. Символом $L((v^{(s)}, i)) = 2L(v^{(s)}) + 1$ будем обозначать длину типа $(v^{(s)}, i)$, а символом $T^{(s)}$ множество всех типов трансформ подгруппы H_s.

Пополним множество $T^{(s)}$ символом $\beta^{(s)} \notin G$, получим множество $\tilde{T}^{(s)}$. Обозначим $R^{(s)}$ множество $M_0^{(s)} \cup M_0^{(s)-1} \cup \tilde{T}^{(s)}$, соответствующее подгруппе H_s, $s \in \{0, 2\}$. Присоединим к множеству $R^{(s)}$ символ $\gamma^{(s)} \notin G$, получим множество $\tilde{R}^{(s)}$.

Соотношения (11) определяют следующее отображение:
$$\psi_w : \{1, 2, \dots, k\} \to \{((\mathbb{Z}^+ \times (\tilde{R}^{(0)} \times \mathbb{Z}^+) \times \tilde{T}^{(0)} \times (\tilde{R}^{(0)} \times \mathbb{Z}^+) \times \mathbb{Z}^+)\times$$
$$\times(\mathbb{Z}^+ \times (\tilde{R}^{(2)} \times \mathbb{Z}^+) \times \tilde{T}^{(2)} \times (\tilde{R}^{(2)} \times \mathbb{Z}^+) \times \mathbb{Z}^+))\}, \tag{12}$$

где $\mathbb{Z}^+$ — множество натуральных чисел с нулем, которое определяется следующим образом:

$$\psi_w(i) = ((p_0^{'(0)}(i), (r_1^{(0)}(i), p_1^{(0)}(i)), \tau_1^{(0)}(i), (r_2^{(0)}(i), p_2^{(0)}(i)), p_0^{''(0)}(i)),$$
$$(p_0^{'(2)}(i), (r_1^{(2)}(i), p_1^{(2)}(i)), \tau_1^{(2)}(i), (r_2^{(2)}(i), p_2^{(2)}(i)), p_0^{''(2)}(i))), \qquad (12')$$

здесь номер i соответствует слогу $b_i = a_i^{'(s)} x_i^{(s)} y_i^{(s)} z_i^{(s)} a_i^{''(s)}$ (см. лемму 9) из w, $p_0^{'(s)}(i)$ – номер элемента $a_i^{'(s)}$ в подгруппе $< a_j; a_j^2 >$, то есть принимает значения 0 или 1; $r_1^{(s)}(i) = \gamma^{(s)}$, если $x_i^{(s)} = 1$, то есть $x_i^{(s)}$ не принимает участия в образовании слога b_i; $r_1^{(s)}(i) = w_1^{(s)}(i) \in \tilde{R}^{(s)} \setminus \{\gamma^{(s)}\}$, если $x_i^{(s)} \neq 1$ и является $p_1^{(s)}(i)$-м слогом в $w_1^{(s)}(i)$; $\tau_1^{(s)}(i) = \beta^{(s)}$, если $y_i^{(s)} = 1$; $\tau_1^{(s)}(i) = (v^{(s)}, j)$, если $y_i^{(s)}$ – слог трансформы типа $(v^{(s)}, j)$; $r_2^{(s)}(i) = \gamma^{(s)}$, если $z_i^{(s)} = 1$; $r_2^{(s)}(i) = w_2^{(s)}(i) \in \tilde{R}^{(s)} \setminus \{\gamma^{(s)}\}$, если $z_i^{(s)} \neq 1$ и является $p_2^{(s)}(i)$-м слогом в $w_2^{(s)}(i)$; $p_0^{''(s)}(i)$ – номер элемента $a_i^{''(s)}$ в подгруппе $< a_j; a_j^2 >$.

Назовем $\psi_w(i)$ типом слога b_i слова w.

Мощность множества всех типов, согласно (12), (12′) ограничена числом:

$$A_2 = 4^2(2 \sum_{w^{(0)} \in \tilde{R}^{(0)} \setminus \{\gamma^{(0)}\}} L(w^{(0)}) + 1)^2 |\tilde{T}^{(0)}| (2 \sum_{w^{(2)} \in \tilde{R}^{(2)} \setminus \{\gamma^{(2)}\}} L(w^{(2)}) + 1)^2 |\tilde{T}^{(2)}|.$$

Лемма 10 ([7]). *Если $L(w) > A_2$, где w — слово из (11) и $w \in H_2, w \neq 1$, то существует слово $w' \in H_2, L(w') < L(w)$, удовлетворяющее (11).*

Из [7] следует, что для слова $u_1^{(2)} u_2^{(2)} \dots u_{r_2}^{(2)}$ из (11)

$$L(u_1^{(2)} u_2^{(2)} \dots u_{r_2}^{(2)}) \leq A_2 + L(w_0).$$

Аналогично рассуждаем, рассматривая пересечение $C(a_j) z_l' \cap H_1$.

Итак, мощность множества всех типов для подгрупп H_1, H_2 соответственно ограничена числами:

$$A_j = 4^2(2 \sum_{w^{(0)} \in \tilde{R}^{(0)} \setminus \{\gamma^{(0)}\}} L(w^{(0)}) + 1)^2 |\tilde{T}^{(0)}| (2 \sum_{w^{(j)} \in \tilde{R}^{(j)} \setminus \{\gamma^{(j)}\}} L(w^{(j)}) + 1)^2 |\tilde{T}^{(j)}|.$$

Следовательно, используя лемму 10 и приведенные рассуждения, длину слова $\tilde{w}$ можно ограничить числом

$$A + M, \ A = \max\{A_1, A_2\}, M = \max\{m_{ij}\}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j,$$

где m_{ij} – элементы симметрической матрицы Кокстера данной группы.

Итак, в качестве $\tilde{w}$ будем выбирать слова, принадлежащие централизатору $C(a_j)$, удовлетворяющие полученному ограничению на длину.

Мы показали, что длину $\tilde{w}$ можно ограничить. Имеем $Z = v_l^{-1} \tilde{w} v_t w^{-1}$. Элементов $v_l, \tilde{w}, v_t$ конечное число, элемент w^{-1} принадлежит H. Следовательно, элементов Z конечное число. Далее нужно построить все такие Z и проверить равенство $Z^{-1} H Z = H$, используя следствие 1 из теоремы 1.

Случай 2.2. Пусть подгруппы C_l, C_t содержатся в подгруппе $\overline{G}_{n-1}$ или подгруппе G_{jk}. Рассмотрим возможные случаи.

Рассмотрим случай, когда C_l, C_t содержатся в $\overline{G}_{n-1}$ и не сопряжены с элементом единичной длины. Тогда $v_l Z w v_t^{-1} = \tilde{w} \in \overline{G}_{n-1}$.

Имеем $\tilde{w}^{-1}H_1\tilde{w} = H_2$.

В подгруппе $H_1 = gp(M_0'; S')$ берем любой образующий слоговой длины больше единицы (если такого образующего нет, то теорема справедлива в силу леммы 6 и конечности двупорожденных групп Кокстера) $w_0 = b_0w_0'$, где b_0 – первый слог w_0. Тогда $\tilde{w}^{-1}w_0\tilde{w} \in H_2 = gp(M_0''; S'')$ и его можно переписать в системе образующих $gp(M_0''; S'')$. Имеем: $\tilde{w}^{-1}w_0\tilde{w} = u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_t}$, где $u_{i_j}, j = \overline{1,t}, \in gp(M_0''; S'')$. Считаем, что $u_{i_1} \in C_t, u_{i_2} = a_0u_{i_2}'$, где a_0 – первый слог u_{i_2}, a_0, b_0 принадлежат одному сомножителю. Следовательно,

$$\tilde{w}^{-1}b_0 = u_{i_1}a_0a',$$

где $a' \in < a_j; a_j^2 >$, или

$$\tilde{w}^{-1} = u_{i_1}a_0a'b_0^{-1}.$$

Подставляя в равенство $\tilde{w}^{-1}H_1\tilde{w} = H_2$, получаем $u_{i_1}a_0a'b_0^{-1}H_1b_0a'a_0^{-1}u_{i_1}^{-1} = H_2$. Так как $u_{i_1} \in H_2$, то u_{i_1} можно удалить из равенства. Таким образом, в качестве $\tilde{w}$ можно взять $b_0a'a_0^{-1}$. Таких элементов конечное число, мы можем их эффективно найти, а, следовательно, эффективно найти все Z.

Случай, когда C_l содержится в подгруппе $\overline{G}_{n-1}$, а C_t – в подгруппе G_{jk} невозможен. Действительно, любая подгруппа G_{jk} конечна, подгруппа группы $\overline{G}_{n-1}$ может быть конечной или бесконечной, последнее невозможно. Если подгруппа C_l из $\overline{G}_{n-1}$ конечна, то C_l – подгруппа двупорожденной группы Кокстера, являющейся подгруппой $\overline{G}_{n-1}$, что также невозможно по лемме 6.

Случай, когда C_l, C_t содержатся в подгруппе G_{jk} тривиален в силу конечности последней.

□

References

[1] I. V. Dobrynina, *On normalizers in some Coxeter groups*, Chebyshevskii Sb., **17**:2 (2016), 113–127.

[2] V. N. Bezverkhnii, *Solution of the occurrence problem in some classes of groups with one defining relation*, Algorithmic problems of theory of groups and semigroups, (1986), 3–21. MR0932268

[3] V. N. Bezverkhnii, *Solution to the problem of occurrence for a class of groups*, Questions of the theory of groups and semigroups, (1972), 3–86. MR0393255

[4] V. N. Bezverkhnii, O. V. Inchenko, *Solvability of the occurrence problem in parabolic subgroups in Coxeter groups with tree structure*, Izvestiya TulGU. Ser. Differential equations and applied problems, **1** (2006), 47–58.

[5] V. N. Bezverkhnii, O. V. Inchenko *Conjugacy problem of subgroups in finitely generated Coxeter groups with tree structure*, Chebyshevskii Sb., **11**:3 (2010), 32–56. Zbl 1277.20041

[6] V. N. Bezverkhnii, O. V. Inchenko, *The centralizer of elements of finite order of a finitely generated Coxeter group with a tree structure*, Chebyshevskii Sb., **9**:1 (2008), 17–27. MR2894377

[7] O.V. Inchenko, *On problem of intersection of the adjacency classes of finitely generated subgroups of Coxeter group with tree structure*, Chebyshevskii Sb., **17**:2 (2016), 146–161.

Irina Vasiljevna Dobrynina
Tula State Pedagogical University,
pr. Lenina, 125,
300026, Tula, Russia
E-mail address: dobrynirina@yandex.ru