S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1349–1372 (2017) УДК 517.97
DOI 10.17377/semi.2017.14.117 MSC 35Q93, 49K15, 49K20

ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В.Ю. ГОНЧАРОВ

Abstract. Maximization problems for eigenvalues of elliptic operators are considered. The problems under investigation are optimal control problems in coefficients, admissible controls form a weak* compact set of essentially bounded measurable functions, and convexity hypotheses on the coefficients of operators are made. The purpose of this article is twofold: (i) to derive necessary optimality conditions, which form a basis for efficient numerical solution; (ii) to describe the structure of the set of solutions for such a problem, to prove uniqueness criteria, and to characterize the case of non-uniqueness. The main idea of the article is that, even in the case of multiple eigenvalues, one can derive necessary optimality conditions, which involve only one eigenfunction. The derived necessary optimality conditions also make it possible to replace the original non-smooth extremal problem by the problem of finding a saddle point of a certain concrete functional. Applications of the results to optimal design problems for non-homogeneous columns and three-layered plates are given.

Keywords: eigenvalue optimization, elliptic boundary-value problems, control in coefficients, uniqueness criteria, optimality conditions, saddle points, multiple eigenvalues, optimal structural design, non-homogeneous column, buckling, three-layered plate.

1. Введение

Экстремальные задачи для функционалов, зависящих от собственных значений систем, описываемых эллиптическими дифференциальными уравнениями

Goncharov, V.Yu., Maximization problems for eigenvalues of linear elliptic operators.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант 16-01-00425 а).

Поступила 25 апреля 2016 г., опубликована 7 декабря 2017 г.

в частных производных, встречаются в различных приложениях. В частности, множество таких задач возникает в оптимальном проектировании элементов конструкций [1, 2]. Типичной задачей оптимального проектирования является задача расширения безрезонансного интервала частот конструкции, которая сводится к максимизации фундаментальной частоты конструкции или разницы между соответствующими соседними частотами при ограничениях на характеристики этой конструкции (например, вес). При этом частоты свободных колебаний конструкции отвечают собственным значениям некоторой эллиптической краевой задачи, а ограничения на характеристики конструкции соответствуют ограничениям на коэффициенты этой задачи.

Данная статья является продолжением работы [3], мотивированной отсутствием в литературе общих критериев существования решений экстремальных задач, связанных с собственными значениями эллиптических операторов, коэффициенты которых зависят от элементов некоторого слабо* компактного множества существенно ограниченных измеримых функций. Настоящая работа преследует следующие цели:

(I) получить необходимые условия оптимальности, формирующие основу для эффективного численного решения рассматриваемых задач;
(II) описать множество оптимальных решений, получить критерии единственности, а также охарактеризовать случай, когда оптимальных решений несколько.

Отметим, что на данный момент вопросы единственности для рассматриваемых экстремальных задач являются малоизученными. Единственность решений в задачах оптимизации собственных значений эллиптических операторов установлена для многих однотипных задач, встречающихся в приложениях (см. обзор известных результатов в [4]). В связи с малоизученностью данного вопроса в целом, представляет интерес получить критерии единственности для широкого класса прикладных задач, а также описать особенности, возникающие в случае, если оптимальных решений несколько.

Получение необходимых условий оптимальности для данных задач, которые могли бы лечь в основу итерационных процедур, позволяющих исследовать сходимость итераций к оптимальным решениям и обладающих относительной простотой численной реализации, сопровождается рядом серьезных математических трудностей. Прежде всего это связано с тем, что собственные значения не являются в общем случае дифференцируемыми по Фреше относительно управления, даже если имеет место гладкая зависимость коэффициентов краевой задачи от управления. При наличии такой зависимости в [2, Раздел 1.11] и [5] для кратных собственных значений устанавливается существование дифференциала Гато, а также показывается, что данный дифференциал в общем случае не является линейной функцией от приращения. Отдельно отметим, что представление дифференциала Гато, которое приводится в [2, 5], трудно использовать даже при исследовании конкретных задач. Подход, основанный на нахождении односторонней производной по направлению первого собственного значения, был применен в [6] (см. также библиографию этой работы). В [7] получено представление обобщенного градиента кратного собственного значения. Подчеркнем, что указанные результаты трудно использовать для организации эффективных численных процедур решения рассматриваемых задач, поскольку необходимые условия оптимальности, полученные с их помощью, так или иначе вовлекают несколько элементов собственного подпространства, соответствующего собственному значению, а в некоторых случаях еще и неизвестные вещественные коэффициенты.

В [8, 9] при исследовании задач максимизации первых собственных значений конкретных операторов было установлено, что оптимальным решениям соответствуют седловые точки некоторых функционалов, и наоборот. Данное соответствие позволяет заменить задачу максимизации собственного значения (которая в общем случае является негладкой) задачей поиска седловой точки функционала. Таким образом, представляет интерес определить условия, при которых решениям рассматриваемых задач соответствуют седловые точки некоторых конкретных функционалов.

Статья имеет следующую структуру. В § 2 приводятся базовые предположения, формулируется рассматриваемая задача на собственные значения. В § 3 определяются исследуемые экстремальные задачи, а также вводятся рассматриваемые в дальнейшем классы коэффициентов. Основные результаты работы приводятся в § 4. В частности, в этом параграфе показывается, что при выполнении определенных условий всякому решению задачи максимизации собственного значения соответствует седловая точка некоторого сопутствующего этой задаче функционала, а также доказываются различные утверждения о таком соответствии для одного функционала, имеющего наиболее простое представление. Отметим, что классические минимаксные результаты (см. [10, Раздел 2.3.3]) являются трудноприменимыми к рассматриваемым задачам. Примерами исследований, в которых применялись минимаксные теоремы, служат работы [8, 9]. Стоит отметить, что результаты этих работ, а также их возможные обобщения легко следуют из утверждений настоящей статьи, имеющих более простые доказательства. Подчеркнем также, что осуществленный в [8, 9] прием основывается на наличии дополнительной информации о собственных элементах, которая, как показывают результаты настоящей работы, является во многих случаях избыточной. В § 5 приводятся приложения некоторых полученных результатов к задачам оптимального проектирования трехслойных пластин и неоднородных колонн. Технические утверждения вынесены в § 6.

2. Задача на собственные значения

Введем используемые в дальнейшем обозначения. Пусть H — некоторое гильбертово пространство. Тот факт, что множество M является замкнутым подпространством пространства H и оснащено тем же скалярным произведением, будем ради краткости обозначать через $M \le H$. Множество билинейных непрерывных форм, определенных на $H \times H$, будем обозначать через $\mathcal{L}_2(H)$. Если X — пространство Банаха, а X' — сопряженное к нему пространство, то через $\langle f, x\rangle$ будем обозначать значение функционала $f \in X'$ на элементе $x \in X$. Выпуклую оболочку подмножества $S \subset X$ будем обозначать через $\operatorname{conv} S$. Пусть g — функционал, определенный на S. Введем следующие обозначения:

$$\operatorname*{arg\,max}_{x\in S} g(x) = \left\{ y \in S:\ g(y) = \sup_{x\in S} g(x) \right\},$$

$$\operatorname*{arg\,min}_{x\in S} g(x) = \left\{ y \in S:\ g(y) = \inf_{x\in S} g(x) \right\}.$$

Пусть Ω — ограниченная область $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Пусть $l, m, s \in \mathbb{N}$ такие, что $m \le l < s$. Рассмотрим линейные пространства W, $\mathcal{W}$ и V, определяемые следующим образом:

$$V \le H^s(\Omega), \qquad \mathcal{W} \le H^l(\Omega), \qquad W \le H^m(\Omega), \qquad C_0^\infty(\Omega) \subset V \subset \mathcal{W} \subset W.$$

Здесь $H^j(\Omega)$ обозначает пространство Соболева, оснащенное скалярным произведением

$$\langle y, z\rangle_j = \sum_{|\alpha| \le j} \int_\Omega \partial^\alpha y\, \partial^\alpha z\, dx, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Через $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ обозначим пространство функций, определенных на Ω, являющихся равномерно непрерывными по Липшицу на Ω.

В дальнейшем будем считать, что свойства области Ω обусловливают компактность вложения пространства V в $\mathcal{W}$. Нормы в пространствах V и W будем обозначать через $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_W$ соответственно. Через ϑ обозначим нейтральный элемент пространства V. Далее, пусть $\mathcal{G}$ — непустое выпуклое ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}$. Определим множество $\mathcal{Q}$ всех отображений $(x, \xi) \mapsto f(x, \xi) : \Omega \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, обладающих следующими свойствами:

(i) f удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е. функция $f(\cdot, \xi)$ измерима для всех $\xi \in \mathcal{G}$, а функция $f(x, \cdot)$ непрерывна для п. в. $x \in \Omega$;

(ii) $f \in L^\infty(\Omega \times \mathcal{G})$.

Пусть пространство $L_r^\infty(\Omega) = \{(u^1, \dots, u^r) : \ u^i \in L^\infty(\Omega), \ i = 1, \dots, r\}$ наделено нормой $\|u\|_\infty = \sum_{i=1}^r \|u^i\|_{L^\infty(\Omega)}$. Далее, пусть $U \subset L_r^\infty(\Omega)$ суть непустое открытое множество, элементы которого отображают Ω в $\mathcal{G}$.

Для $u \in U$ рассмотрим билинейные формы $\mathcal{A}_u : V \times V \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_u : W \times W \to \mathbb{R}$, определяемые следующим образом:

$$\mathcal{A}_u(y, z) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \le s} \int_\Omega a_{\alpha\beta}\,(x, u(x))\, \partial^\alpha y(x)\, \partial^\beta z(x)\, dx,$$

$$\mathcal{B}_u(y, z) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \le m} \int_\Omega b_{\alpha\beta}\,(x, u(x))\, \partial^\alpha y(x)\, \partial^\beta z(x)\, dx,$$

где $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}$, $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_u(y_1, z_1)| &\le C_{\mathcal{A}}\, \|y_1\|_V \|z_1\|_V, \qquad & y_1, z_1 \in V, \\ |\mathcal{B}_u(y_2, z_2)| &\le C_{\mathcal{B}}\, \|y_2\|_W \|z_2\|_W, \qquad & y_2, z_2 \in W, \end{aligned} \tag{1}$$

где $C_{\mathcal{A}}$ и $C_{\mathcal{B}}$ — положительные постоянные, которые не зависят от u. В дальнейшем будем предполагать, что существуют $c_{\mathcal{A}}, c_{\mathcal{B}} > 0$ такие, что

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}_u(y, y) &\ge c_{\mathcal{A}}\, \|y\|_V^2, \qquad & y \in V, \\ \mathcal{B}_u(z, z) &\ge c_{\mathcal{B}}\, \|z\|_W^2, \qquad & z \in W, \end{aligned}\right. \quad u \in U. \tag{2}$$

Отметим, что для каждого $u \in U$ билинейная форма $\mathcal{A}_u(\cdot, \cdot)$ представляет собой скалярное произведение в V. Через $\perp_u$ будем обозначать операцию взятия ортогонального дополнения подмножеств пространства V относительно $\mathcal{A}_u(\cdot, \cdot)$.

Для $u \in U$ рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\text{найти } (\lambda, y) \in \mathbb{R} \times (V \setminus \{\vartheta\}) : \ \mathcal{A}_u(y, z) = \lambda\, \mathcal{B}_u(y, z), \quad z \in V. \tag{3}$$

Хорошо известно [2], что при сделанных допущениях задача (3) имеет счетное множество собственных чисел $\lambda_k[u]$, $k \in \mathbb{N}$ таких, что

$$0 < \lambda_1[u] \le \lambda_2[u] \le \ldots \le \lambda_k[u] \le \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k[u] = \infty.$$

Кроме того, известно, что каждое собственное значение $\lambda_k[u]$ имеет конечную кратность и существует последовательность собственных функций $\{y_k[u]\}$, соответствующая последовательности $\{\lambda_k[u]\}$, образующая базис в V, который является ортогональным относительно $\mathcal{A}_u(\cdot,\cdot)$. Наконец, справедливы следующие вариационные принципы [11]:

$$\lambda_k[u] = \min_{\substack{Y\le V,\\ \dim Y=k}} \max_{y\in Y\setminus\{\vartheta\}} \Lambda(u,y), \qquad \lambda_k[u] = \max_{\substack{Y\le V,\\ \operatorname{codim} Y=k-1}} \min_{y\in Y\setminus\{\vartheta\}} \Lambda(u,y), \tag{4}$$

где функционал $\Lambda : U \times (V \setminus \{\vartheta\}) \to \mathbb{R}$ определяется формулой

$$\Lambda(u,y) = \frac{\mathcal{A}_u(y,y)}{\mathcal{B}_u(y,y)}.$$

Пусть $Y_k[u] = \operatorname{span}\{y_1[u],\ldots,y_k[u]\}$. Через $\mathcal{V}_k[u]$ обозначим собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda_k[u]$, т. е. множество, содержащее вместе с нейтральным элементом ϑ все собственные функции, отвечающие $\lambda_k[u]$. Если

$$\lambda_{k-j-1}[u] < \lambda_{k-j}[u] = \ldots = \lambda_k[u], \qquad k-j > 1,$$

то через $Z_k[u]$ обозначим $(Y_{k-j-1}[u])^{\perp_u}$. Если же $\lambda_1[u] = \ldots = \lambda_k[u]$, то положим $Z_k[u] = V$. Пусть

$$M_k[u] = \{y \in \mathcal{V}_k[u] :\ \mathcal{B}_u(y,y) = 1\}.$$

В дальнейшем также будем использовать представления

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_u(y,y) = \sum_{|\alpha|\le s} \int_\Omega \tilde{a}_{\alpha\alpha}\,(x,u(x))\,[\partial^\alpha y(x)]^2\,dx \\
+ \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\le s\\ \alpha\ne\beta}} \int_\Omega \tilde{a}_{\alpha\beta}\,(x,u(x))\,[\partial^\alpha y(x)+\partial^\beta y(x)]^2\,dx,\\
\mathcal{B}_u(y,y) = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \tilde{b}_{\alpha\alpha}\,(x,u(x))\,[\partial^\alpha y(x)]^2\,dx \\
+ \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\le m\\ \alpha\ne\beta}} \int_\Omega \tilde{b}_{\alpha\beta}\,(x,u(x))\,[\partial^\alpha y(x)+\partial^\beta y(x)]^2\,dx,
\end{aligned}$$

в которых

$$\tilde{a}_{\alpha\alpha} = a_{\alpha\alpha} - \sum_{\substack{|\gamma|\le s\\ \alpha\ne\gamma}} a_{\alpha\gamma}, \qquad \tilde{a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}, \quad \alpha\ne\beta,$$

$$\tilde{b}_{\alpha\alpha} = b_{\alpha\alpha} - \sum_{\substack{|\gamma|\le m\\ \alpha\ne\gamma}} b_{\alpha\gamma}, \qquad \tilde{b}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}, \quad \alpha\ne\beta.$$

3. Экстремальные задачи

Пусть $\mathcal{U}$ суть непустое выпуклое слабо* компактное неодноточечное подмножество множества U. Для $k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать следующую экстремальную задачу:

$$(\mathrm{MAX}_k) \qquad \text{найти } \hat{u}_k \in \mathcal{U} \ : \ \lambda_k[\hat{u}_k] = \sup_{u \in \mathcal{U}} \lambda_k[u].$$

Множество решений задачи (MAX_k) будем обозначать через $\mathcal{S}_k$.

Определим рассматриваемые в дальнейшем классы коэффициентов билинейных форм $\mathcal{A}_u(\cdot,\cdot)$, $\mathcal{B}_u(\cdot,\cdot)$. Пусть класс $\mathcal{Q}_+$ состоит из всех элементов $f \in \mathcal{Q}$ таких, что отображение $f(x,\cdot) : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ выпукло для п. в. $x \in \Omega$. Если $f \in \mathcal{Q}_+$, то для любых $\xi \in \mathcal{G}$, $h \in \mathbb{R}^r$ и п. в. $x \in \Omega$ существует предел

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x,\xi + th) - f(x,\xi)}{t} = f'(x,\xi;h),$$

представляющий собой одностороннюю производную по направлению h отображения $f(x,\cdot)$ в точке ξ. Введем множества

$$\mathcal{Q}_- = \{f : -f \in \mathcal{Q}_+\}, \qquad \mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_+ \cap \mathcal{Q}_-.$$

Кроме того, определим класс $\mathcal{Q}_c$, состоящий из всех элементов $f \in \mathcal{Q}_0$ таких, что функция $f(x,\cdot) : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ является постоянной для п. в. $x \in \Omega$. Пусть $\check{\mathcal{Q}}_+$ обозначает класс всех элементов $f \in \mathcal{Q}_+$ таких, что отображение $f(x,\cdot) : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ строго выпукло для п. в. $x \in \Omega$. Через $\mathfrak{L}$ обозначим множество всех элементов $f \in \mathcal{Q}$ таких, что существует постоянная $L(f) > 0$, что для п. в. $x \in \Omega$

$$|f(x,\xi_2) - f(x,\xi_1)| \le L(f)\,|\xi_2 - \xi_1|_r\,, \qquad \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{G},$$

где $|\cdot|_r$ — стандартная норма в $\mathbb{R}^r$. Введем множество $\mathcal{D}$, состоящее из всех элементов $f \in \mathfrak{L}$, для каждого их которых отображение

$$U \ni u \mapsto \mathcal{C}_u[f] \in \mathcal{L}_2\left(L^2(\Omega)\right),$$

где $\mathcal{C}_u[f](y,z) = \int_\Omega f(x,u(x))y(x)z(x)\,dx$, является непрерывно дифференцируемым по Фреше. Положим

$$\mathcal{D}_+ = \mathcal{D} \cap \mathcal{Q}_+, \qquad \mathcal{D}_- = \mathcal{D} \cap \mathcal{Q}_-.$$

Из следующего утверждения получаем условия, при которых задача (MAX_k) является разрешимой.

Предложение 1. *Пусть*

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_-, \quad |\alpha|, |\beta| \le s, \qquad \tilde{b}_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_+, \quad |\alpha|, |\beta| \le m.$$

Тогда функционал $\lambda_k[\cdot]$ является слабо полунепрерывным сверху на $\mathcal{U}$.*

Предложение 1 является обобщением [3, Теорема 2.1] и доказывается аналогично.

4. Основные результаты

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем понятия из негладкого анализа [12, Гл. 2]. Пусть X — вещественное пространство Банаха, а $f : X \to \mathbb{R}$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица в некоторой окрестности точки $x \in X$. *Обобщенная производная по направлению* $f^\circ(x;v)$ отображения f в точке x в направлении v определяется следующим образом:

$$f^\circ(x;v) = \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t}.$$

Обобщенный градиент $\partial f(x)$ в точке x отображения f представляет собой непустое выпуклое слабо* компактное множество, состоящее из всех элементов ζ пространства X', которые удовлетворяют неравенству

$$f^\circ(x;v) \ge \langle \zeta, v\rangle, \qquad v \in X.$$

Нетрудно проверить, что функционал $\lambda_k[\cdot]$ удовлетворяет на множестве U условию Липшица, если коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ принадлежат классу $\mathfrak{L}$ (Лемма 1). Пусть теперь $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta} \in \mathcal{D}$. Очевидно, что $u \mapsto \mathcal{A}_u(\cdot,\cdot)$, $u \mapsto \mathcal{B}_u(\cdot,\cdot)$ суть непрерывно дифференцируемые по Фреше отображения множества U в $\mathcal{L}_2(V)$, причем их дифференциалы Фреше $D\mathcal{A}_{u,h}$, $D\mathcal{B}_{u,h}$ в точке $u \in U$ определяются следующими формулами:

$$D\mathcal{A}_{u,h}(y,z) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le s} \int_\Omega a'_{\alpha\beta}\left(x,u(x);h(x)\right) \partial^\alpha y(x)\, \partial^\beta z(x)\, dx,$$

$$D\mathcal{B}_{u,h}(y,z) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \int_\Omega b'_{\alpha\beta}\left(x,u(x);h(x)\right) \partial^\alpha y(x)\, \partial^\beta z(x)\, dx.$$

Для обобщенного градиента $\partial\lambda_k[u]$ в точке $u \in U$ функционала $\lambda_k[\cdot]$ справедливо следующее включение (Лемма 4):

$$\partial\lambda_k[u] \subset \operatorname{conv}\left\{D\mathcal{A}_{u,\cdot}(y,y) - \lambda_k[u] D\mathcal{B}_{u,\cdot}(y,y) :\ y \in M_k[u]\right\}. \tag{5}$$

Предложение 2. *Пусть*

$$\tilde a_{\alpha\beta} \in \mathcal{D}_-, \quad |\alpha|, |\beta| \le s, \qquad \tilde b_{\alpha\beta} \in \mathcal{D}_+, \quad |\alpha|, |\beta| \le m.$$

Если $\hat u_k \in \mathcal{S}_k$, $\hat y_k \in M_k[\hat u_k]$, то существует конечный набор пар

$$\left\{(\hat d_i, \tilde y_i)\right\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}_+ \times M_k[\hat u_k]$$

такой, что $\sum_{i=1}^n \hat d_i = 1$,

$$\sum_{i=1}^n \hat d_i \Lambda(u,\tilde y_i) \le \Lambda(\hat u_k, \hat y_k) \le \Lambda(\hat u_k, y), \qquad (u,y) \in \mathcal{U} \times (Z_k[\hat u_k] \setminus \{\vartheta\}). \tag{6}$$

Кроме того, если $v \in \mathcal{U}$ является точкой локального максимума функционала $\lambda_1[\cdot]$ на множестве $\mathcal{U}$, то $v \in \mathcal{S}_1$.

Доказательство. Неравенство

$$\Lambda(\hat u_k, \hat y_k) \le \Lambda(\hat u_k, y) \tag{7}$$

для $y \in Z_k[\hat u_k] \setminus \{\vartheta\}$ следует из вариационных свойств собственных значений.

Пусть v_k представляет собой точку локального максимума функционала $\lambda_k[\cdot]$ на множестве $\mathcal{U}$. Из [13, Теорема 1] следует, что

$$\partial\lambda_k[v_k] \cap N_{\mathcal{U}}(v_k) \ne \varnothing, \tag{8}$$

где $N_{\mathcal{U}}(v_k)$ — конус нормалей к множеству $\mathcal{U}$ в точке v_k:

$$N_{\mathcal{U}}(v_k) = \left\{\zeta \in (L_r^\infty(\Omega))' :\ \langle \zeta, v_k - u\rangle \ge 0,\ u \in \mathcal{U}\right\}.$$

Комбинируя (5) и (8), заключаем, что найдется набор пар

$$\big\{(\hat{d}_i, \tilde{y}_i)\big\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}_+ \times M_k[v_k]$$

такой, что $\sum_{i=1}^n \hat{d}_i = 1$,

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^n \hat{d}_i \left\{ D\mathcal{A}_{v_k, u-v_k}\big(\tilde{y}_i, \tilde{y}_i\big) - \lambda_k[v_k] D\mathcal{B}_{v_k, u-v_k}\big(\tilde{y}_i, \tilde{y}_i\big) \right\} \le 0, \qquad u \in \mathcal{U}.$$

Принимая во внимание налагаемые на коэффициенты $\tilde{a}_{\alpha\beta}$, $\tilde{b}_{\alpha\beta}$ условия, а также то, что для любых $f \in \mathcal{D}_+$, $v, w \in U$ и п. в. $x \in \Omega$ справедливо неравенство

$$f(x, w(x)) - f(x, v(x)) \ge f'(x, v(x); w(x) - v(x)),$$

после элементарных выкладок получаем, что

$$0 \ge \sum_{i=1}^n \hat{d}_i \mathcal{B}_u(\tilde{y}_i, \tilde{y}_i) \big\{ \Lambda(u, \tilde{y}_i) - \lambda_k[v_k] \big\} \ge \frac{c_{\mathcal{B}}}{C_{\mathcal{B}}} \sum_{i=1}^n \hat{d}_i \big\{ \Lambda(u, \tilde{y}_i) - \lambda_k[v_k] \big\},$$

откуда с учетом (7) следует (6). Поскольку необходимое условие экстремума (6) для $k = 1$ является также достаточным, то $v_1 \in \mathcal{S}_1$. $\square$

Замечание 1. Пусть, как и прежде, $\hat{u}_k \in \mathcal{S}_k$, а $\Phi : U \times (V \setminus \{\vartheta\})^n \to \mathbb{R}$ — функционал, действующий по формуле

$$(10) \qquad \Phi(u, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{d}_i \mathcal{A}_u(y_i, y_i)}{\sum_{i=1}^n \hat{d}_i \mathcal{B}_u(y_i, y_i)}, \qquad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n).$$

Заметим, что числа $\hat{d}_i$, n в доказательстве Предложения 2 зависят от k. Используя (9) и элементарное неравенство

$$(11) \qquad \min\left\{ \frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right\} \le \frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n}, \qquad a_i, b_i > 0,$$

нетрудно установить, что найдется элемент $\hat{\mathbf{y}}_k \in (M_k[\hat{u}_k])^n$ такой, что пара $(\hat{u}_k, \hat{\mathbf{y}}_k)$ является седловой точкой ограничения функционала $\Phi(\cdot, \cdot)$ на множество $\mathcal{U} \times (Z_k[\hat{u}_k] \setminus \{\vartheta\})^n$:

$$(12) \qquad \Phi(u, \hat{\mathbf{y}}_k) \le \Phi(\hat{u}_k, \hat{\mathbf{y}}_k) \le \Phi(\hat{u}_k, \mathbf{y}), \qquad (u, \mathbf{y}) \in \mathcal{U} \times (Z_k[\hat{u}_k] \setminus \{\vartheta\})^n.$$

Таким образом, всякому решению задачи (MAX_k) соответствует некоторый функционал вида (10) и седловая точка этого функционала. Данное соответствие наталкивает нас на мысль о том, что экстремальную задачу (MAX_k) можно заменить задачей поиска седловой точки функционала вида (10). К сожалению, числа $\hat{d}_i$, n являются неизвестными. Однако если для некоторого n и набора чисел $\{\hat{d}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}_+$ функционал $\Phi(\cdot, \cdot)$ обладает седловой точкой $(\hat{u}_1, \hat{\mathbf{y}}_1)$ на множестве $\mathcal{U} \times (V \setminus \{\vartheta\})^n$, то, используя неравенство (11), легко заключить, что $\hat{u}_1 \in \mathcal{S}_1$.

В дальнейшем будем исследовать вопрос о существовании седловых точек функционала $\Lambda(\cdot, \cdot)$, имеющего наиболее простое представление среди функционалов вида (10). Из Предложения 2 получаем

Следствие 1. *Пусть выполняются предположения Предложения 2. Если собственное число $\lambda_k[\hat{u}_k]$ является простым, то пара $(\hat{u}_k, \hat{y}_k)$ является седловой точкой ограничения функционала $\Lambda(\cdot, \cdot)$ на $\mathcal{U} \times (Z_k[\hat{u}_k] \setminus \{\vartheta\})$:*

$$(\mathrm{SP}_k) \qquad \Lambda(u, \hat{y}_k) \le \Lambda(\hat{u}_k, \hat{y}_k) \le \Lambda(\hat{u}_k, y), \qquad (u, y) \in \mathcal{U} \times (Z_k[\hat{u}_k] \setminus \{\vartheta\}).$$

Следующее утверждение, доказательство которого основано на наличии дополнительной информации о свойствах собственных элементов, покрывает возможные обобщения утверждений [8, Предложение 7.7] и [9, Теорема 4.8][1].

Предложение 3. *Пусть выполняются предположения Предложения 2. Кроме того, предположим, что*

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{для любого } u \in \mathcal{U} \text{ существует элемент } y \in M_k[u] \text{ такой, что для}\\ \text{любой последовательности } \{u_n\} \subset \mathcal{U}, \text{ сходящейся сильно к } u \text{ в } \mathcal{U},\\ \text{найдется последовательность } \{y_n\}, \text{ где } y_n \in M_k[u_n], \text{ такая, что}\\ y_n \to y \text{ в } V.\end{array}\right.$$

Тогда для любого $\hat{u}_k \in \mathcal{S}_k$ существует элемент $\hat{y}_k \in M_k[\hat{u}_k]$ такой, что пара $(\hat{u}_k, \hat{y}_k)$ удовлетворяет неравенствам (SP_k).

Доказательство. Для элемента $u \in \mathcal{U}$ положим

$$u_t = (1-t)\hat{u}_k + tu, \qquad \lambda_t = \lambda_k[u_t], \qquad t \in (0,1).$$

Пусть $\hat{y}_k \in M_k[\hat{u}_k]$ суть элемент, для которого $y_t \to \hat{y}_k$ в V при $t \downarrow 0$, где $y_t \in M_k[u_t]$. Рассмотрим равенство

$$(14)\qquad \mathcal{A}_{u_t}(y_t, \hat{y}_k) - \mathcal{A}_{\hat{u}_k}(y_t, \hat{y}_k) = \lambda_t \mathcal{B}_{u_t}(y_t, \hat{y}_k) - \lambda_k[\hat{u}_k]\mathcal{B}_{\hat{u}_k}(y_t, \hat{y}_k).$$

Левую часть (14) можно представить в виде

$$\mathcal{A}_{u_t}(\hat{y}_k, \hat{y}_k) - \mathcal{A}_{\hat{u}_k}(\hat{y}_k, \hat{y}_k) + \varepsilon(t),$$

где

$$\varepsilon(t) = \mathcal{A}_{u_t}(y_t - \hat{y}_k, \hat{y}_k) - \mathcal{A}_{\hat{u}_k}(y_t - \hat{y}_k, \hat{y}_k).$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{|\varepsilon(t)|}{t} \le \|u - \hat{u}_k\|_\infty \sum_{|\alpha|, |\beta| \le s} L(a_{\alpha\beta}) \int_\Omega |\partial^\alpha (y_t - \hat{y}_k)||\partial^\beta \hat{y}_k|\, dx \to 0, \qquad t \downarrow 0.$$

Правую часть (14) можно переписать в виде

$$(\lambda_t - \lambda_k[\hat{u}_k])\mathcal{B}_{u_t}(\hat{y}_k, \hat{y}_k) + \lambda_k[\hat{u}_k](\mathcal{B}_{u_t}(\hat{y}_k, \hat{y}_k) - \mathcal{B}_{\hat{u}_k}(\hat{y}_k, \hat{y}_k)) + \delta(t),$$

где

$$\delta(t) = \lambda_t \mathcal{B}_{u_t}(y_t - \hat{y}_k, \hat{y}_k) - \lambda_k[\hat{u}_k]\mathcal{B}_{\hat{u}_k}(y_t - \hat{y}_k, \hat{y}_k).$$

Принимая во внимание то, что функционал $\lambda_k[\cdot]$ является дифференцируемым по Гато в U (см. [2, Теорема 1.11.2]), легко заключаем, что

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\delta(t)}{t} = 0.$$

Учитывая, что $\lambda_t \le \lambda_k[\hat{u}_k]$, получаем неравенство

$$\frac{\mathcal{A}_{u_t}(\hat{y}_k, \hat{y}_k) - \mathcal{A}_{\hat{u}_k}(\hat{y}_k, \hat{y}_k)}{t} - \lambda_k[\hat{u}_k]\frac{\mathcal{B}_{u_t}(\hat{y}_k, \hat{y}_k) - \mathcal{B}_{\hat{u}_k}(\hat{y}_k, \hat{y}_k)}{t} + \frac{\varepsilon(t) - \delta(t)}{t} \le 0.$$

Переходя здесь к пределу при $t \downarrow 0$, получаем, что

$$D\mathcal{A}_{\hat{u}_k, u - \hat{u}_k}(\hat{y}_k, \hat{y}_k) - \lambda_k[\hat{u}_k] D\mathcal{B}_{\hat{u}_k, u - \hat{u}_k}(\hat{y}_k, \hat{y}_k) \le 0,$$

откуда легко следует справедливость утверждения. □

[1] Упомянутые результаты работ [8, 9] доказываются для некоторого другого функционала, отличного от $\Lambda(\cdot,\cdot)$. Однако нетрудно показать, что из существования седловой точки одного из этих функционалов следует существование седловой точки другого функционала.

Отметим, что доказательства утверждений [8, Предложение 7.7] и [9, Теорема 4.8] также опираются на (13).

В дальнейшем нас будут интересовать условия, которые обеспечивают выполнение неравенств (SP_k) и не используют свойств собственных элементов. Напомним, что $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$. Мы будем использовать это, чтобы упростить формулировки приводимых утверждений.

Предложение 4. *Пусть*

$$a_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_c, \quad l < |\alpha| \le s, \quad a_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_0, \quad |\alpha|, |\beta| \le l, \quad b_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_0, \quad |\alpha|, |\beta| \le m.$$

Тогда найдется $\hat{u}_k \in \mathcal{U}$ такой, что для некоторого элемента $\hat{y}_k \in M_k[\hat{u}_k]$ пара $(\hat{u}_k, \hat{y}_k)$ удовлетворяет неравенствам (SP_k).

Доказательство. Для произвольного элемента $u_1 \in \mathcal{U}$ построим последовательность $\{(u_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, которая определяется из следующих соотношений:

$$y_n \in M_k[u_n], \qquad u_{n+1} \in \arg\min_{u\in\mathcal{U}} \Pi_k(u, u_n, y_n),$$

$$\Pi_k(u, v, y) \triangleq \lambda_k[v]\mathcal{B}_u(y, y) - \mathcal{A}_u(y, y). \tag{15}$$

Легко видеть, что для любого $y \in V \setminus \{\vartheta\}$ и любого $v \in \mathcal{U}$ отображение $u \mapsto \Pi_k(u, v, y)$ является слабо* непрерывным на множестве U. Таким образом, построение последовательности $\{(u_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ возможно. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u^*$ в $\mathcal{U}$. В силу Леммы 3 можем выбрать из $\{y_n\}$ подпоследовательность (за которой сохраним прежнее обозначение) так, что

$$y_n \to y^* \in M_k[u^*] \text{ в } V, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_k[u_n] = \lim_{n\to\infty} \Lambda(u_n, y_n) = \lambda_k[u^*] = \Lambda(u^*, y^*).$$

Очевидно, что

$$\limsup_{n\to\infty} \Pi_k(u_{n+1}, u_n, y_n) \le \lim_{n\to\infty} \Pi_k(u, u_n, y_n) = \Pi_k(u, u^*, y^*), \qquad u \in \mathcal{U}.$$

С другой стороны, применяя [3, Лемма 2.1], заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_k(u_{n+1}, u_n, y_n) = \Pi_k(u^*, u^*, y^*) = 0.$$

Таким образом, $\Pi_k(u, u^*, y^*) \ge 0$ для любого элемента $u \in \mathcal{U}$, т. е.

$$\lambda_k[u^*] = \Lambda(u^*, y^*) \ge \Lambda(u, y^*), \qquad u \in \mathcal{U}.$$

□

Замечание 2. В доказательстве Предложения 4 мы не использовали выпуклость множества $\mathcal{U}$.

Замыкание множества $\widetilde{U} \subset L_r^\infty(\Omega)$ относительно слабой* сходимости в пространстве $L_r^\infty(\Omega)$ будем обозначать через $\mathrm{cl}^* \widetilde{U}$.

Теорема 1. *Пусть*

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_-, \quad |\alpha|, |\beta| \le s, \qquad \tilde{b}_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_+, \quad |\alpha|, |\beta| \le m.$$

Предположим, кроме того, что

$$\mathcal{U} = \mathrm{cl}^* \left[\mathcal{U} \cap C_r^{0,1}(\bar{\Omega})\right].$$

Тогда найдется $\hat{u}_1 \in \mathcal{U}$ такой, что для некоторого элемента $\hat{y}_1 \in M_1[\hat{u}_1]$ пара $(\hat{u}_1, \hat{y}_1)$ удовлетворяет неравенствам

$$\Lambda(u, \hat{y}_1) \le \Lambda(\hat{u}_1, \hat{y}_1) \le \Lambda(\hat{u}_1, y), \qquad (u, y) \in \mathcal{U} \times (V \setminus \{\vartheta\}). \tag{SP_1}$$

Доказательство. Для $q \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{U}_q = \{u \in \mathcal{U} : \ u^i \in C^{0,1}(\bar{\Omega}), \ \|u^i\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})} \le q, \ i = 1, \dots, r\}.$$

Очевидно, найдется номер N такой, что $\mathcal{U}_q \neq \varnothing$, $q \ge N$. В дальнейшем будем считать, что $q \ge N$. Из Леммы 5 следует, что существуют элементы $u_q \in \mathcal{U}_q$, $y_q \in M_1[u_q]$ такие, что

$$\Lambda(u, y_q) \le \Lambda(u_q, y_q) \le \Lambda(u_q, y), \qquad (u, y) \in \mathcal{U}_q \times (V \setminus \{\vartheta\}).$$

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что

$$y_q \rightharpoonup y^* \in V \setminus \{\vartheta\} \ \text{ в } \ V, \quad u_q \overset{*}{\rightharpoonup} u^* \ \text{ в } \ \mathcal{U}, \qquad q \to \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{q \to \infty} \Lambda(u_q, y_q) \le \limsup_{q \to \infty} \Lambda(u_q, y) = \Lambda(u^*, y), \qquad y \in V \setminus \{\vartheta\}.$$

Отметим, что при фиксированном $u \in \mathcal{U}$ функционал $\Lambda(u, \cdot)$ является слабо полунепрерывным снизу в $V \setminus \{\vartheta\}$. Следовательно,

$$\liminf_{q \to \infty} \Lambda(u_q, y_q) \ge \liminf_{q \to \infty} \Lambda(u, y_q) \ge \Lambda(u, y^*), \qquad u \in \mathcal{U}_\infty \triangleq \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_q.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{U}_\infty = \mathcal{U} \cap C_r^{0,1}(\bar{\Omega}).$$

Из сделанных предположений следует, что для любого $u \in \mathcal{U}$ найдется последовательность $\{v_n\} \subset \mathcal{U}_\infty$ такая, что $v_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$. Поскольку $v_n \rightharpoonup u$ в $L^2(\Omega)$, то в силу леммы Мазура найдется последовательность $\{w_n\}$, сильно сходящаяся к u в $L^2(\Omega)$, элементы которой определяются формулой

$$w_n \triangleq \sum_{i=n}^{m_n} \alpha_i^n v_i,$$

где $\{m_n\}$ — некоторая последовательность целых чисел такая, что $m_n \ge n$, а $\{\alpha_i^n\}_{i=n}^{m_n}$ — некоторый набор чисел, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\sum_{i=n}^{m_n} \alpha_i^n = 1, \qquad 0 \le \alpha_i^n \le 1, \quad i = n, \dots, m_n.$$

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $w_n(x) \to u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$. Применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, заключаем, что

$$\lim_{n \to \infty} \Lambda(w_n, y^*) = \Lambda(u, y^*).$$

Поскольку $\mathcal{U}$ — выпуклое множество, то $\{w_n\} \subset \mathcal{U}_\infty$. Следовательно,

$$\liminf_{q \to \infty} \Lambda(u_q, y_q) \ge \lim_{n \to \infty} \Lambda(w_n, y^*) = \Lambda(u, y^*).$$

Таким образом, если $u \in \mathcal{U}$, $y \in V \setminus \{\vartheta\}$, то

$$\Lambda(u, y^*) \le \liminf_{q \to \infty} \Lambda(u_q, y_q) \le \limsup_{q \to \infty} \Lambda(u_q, y_q) \le \Lambda(u^*, y).$$

Отсюда следует, что $\lim_{q \to \infty} \Lambda(u_q, y_q) = \Lambda(u^*, y^*)$, $y^* \in \mathcal{V}_1[u^*]$. $\square$

Замечание 3. Легко проверить, что Теорема 1 остается справедливой в том случае, когда

$$a_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_0, \quad |\alpha|, |\beta| \le s, \qquad b_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_0, \quad |\alpha|, |\beta| \le m,$$

а множество $\mathcal{U}$ не является выпуклым.

Замечание 4. Особенностью Теоремы 1 является то, что это утверждение дает характеризацию решения задачи (MAX_1) через седловую точку функционала $\Lambda(\cdot,\cdot)$ на множестве $\mathcal{U}\times(V\setminus\{\vartheta\})$, не требуя гладкости коэффициентов $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$. Конкретные приложения Теоремы 1 приводятся в § 5. Некоторые реализации множества $\mathcal{U}$, для которых $\mathcal{U} = \mathrm{cl}^*\left[\mathcal{U}\cap C^{0,1}_r(\bar{\Omega})\right]$, могут быть получены из Леммы 7.

Итак, при выполнении условий Предложения 4 или Теоремы 1 в задаче (MAX_1) всегда существует решение, порождающее седловую точку функционала $\Lambda(\cdot,\cdot)$ на множестве $\mathcal{U}\times(V\setminus\{\vartheta\})$. Одновременно мы предъявили способы построения максимизирующих последовательностей для этой задачи при указанных выше условиях.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения Предложения 1. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Функционал $\lambda_1[\cdot]$ является квазивогнутым на множестве $\mathcal{U}$.*
(ii) *Множество $\mathcal{S}_1$ является выпуклым и слабо* компактным.*
(iii) *Если $u_1, u_2 \in \mathcal{S}_1$, то*

$$\mathcal{V}_1[u_1]\cap\mathcal{V}_1[u_2] \ne \{\vartheta\}.$$

(iv) *Если существует мультииндекс $\gamma\in\mathbb{N}_0^d$ такой, что*

$$-a_{\gamma\gamma} \in \check{\mathcal{Q}}_+ \quad \vee \quad b_{\gamma\gamma} \in \check{\mathcal{Q}}_+{}^{2}, \tag{16}$$

и для любого $u\in\mathcal{U}$ существует элемент $y\in\mathcal{V}_1[u]$ такой, что

$$\partial^\gamma y(x) \ne 0 \;\; \text{для п. в. } x\in\Omega, \tag{17}$$

то задача (MAX_1) *обладает единственным решением.*

Доказательство. Очевидно, что (ii) следует из (i) и Предложения 1. Доказательство утверждения (i) незначительно отличается от доказательства (iv). Зафиксируем различные элементы $u, v\in\mathcal{U}$ и число $\delta\in(0,1)$. Пусть y суть элемент множества $\mathcal{V}_1[\delta u + (1-\delta)v]$, для которого справедливо (17). Тогда

$$\Lambda(\delta u + (1-\delta)v, y) > \frac{\delta\mathcal{A}_u(y,y) + (1-\delta)\mathcal{A}_v(y,y)}{\delta\mathcal{B}_u(y,y) + (1-\delta)\mathcal{B}_v(y,y)} \ge \min\left\{\Lambda(u,y), \Lambda(v,y)\right\}.$$

Здесь было использовано неравенство (11). Таким образом,

$$\begin{aligned}\lambda_1[\delta u + (1-\delta)v] &> \min_{y\in V\setminus\{\vartheta\}} \min\left\{\Lambda(u,y), \Lambda(v,y)\right\} \\ &= \min\left\{\min_{y\in V\setminus\{\vartheta\}}\Lambda(u,y), \min_{y\in V\setminus\{\vartheta\}}\Lambda(v,y)\right\} = \min\left\{\lambda_1[u], \lambda_1[v]\right\}.\end{aligned}$$

Это означает, что функционал $\lambda_1[\cdot]$ является строго квазивогнутым на множестве $\mathcal{U}$. Утверждение (iv) теперь следует из того факта, что строго квазивогнутая функция имеет не более одного максимума на выпуклом множестве.

---

[2]Поскольку при $|\gamma| > m$ коэффициент $b_{\gamma\gamma}$ не определен, то будем считать, что $b_{\gamma\gamma}\notin\check{\mathcal{Q}}_+$.

Докажем утверждение (iii). Пусть $u_1, u_2 \in \mathcal{S}_1$, $v_\tau = \tau u_1 + (1-\tau)u_2$, где $\tau \in (0,1)$. Принимая во внимание предыдущие рассуждения, получаем, что

$$\lambda_1[v_\tau] = \Lambda(u_1, y) = \Lambda(u_2, y) = \lambda_1[u_1] = \lambda_1[u_2], \qquad y \in \mathcal{V}_1[v_\tau] \setminus \{\vartheta\}.$$

Таким образом, $\mathcal{V}_1[v_\tau] \subset \mathcal{V}_1[u_1] \cap \mathcal{V}_1[u_2]$. □

Замечание 5. Если

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_-, \quad |\alpha|, |\beta| \le s, \qquad b_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_c, \quad |\alpha|, |\beta| \le m,$$

то легко проверить, что функционал $\lambda_1[\cdot]$ является вогнутым на множестве $\mathcal{U}$.

Замечание 6. Если в утверждении (iv) Теоремы 2 условие (16) выполняется для всех мультииндексов γ таких, что $|\gamma| = p$, где p — некоторое натуральное число, то вместо условия (17) можно потребовать, чтобы пространство V не содержало нетривиальных многочленов степени ниже p.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть

$$0 < u_{\min} < 1 < u_{\max} < +\infty, \qquad \mathcal{I} = [u_{\min}, u_{\max}].$$

Пример 1. Хотя допущения Предложения 1 выполняются для многих встречающихся в приложениях задач, условия утверждения (iv) Теоремы 2 могут нарушаться. Приведем пример, иллюстрирующий, как можно использовать утверждение (iii) Теоремы 2 для того, чтобы доказать единственность решения задачи (MAX_1). Пусть $V = H_0^1(\Omega)$, $W = \mathcal{W} = L^2(\Omega)$, $r = 1$, $\mathcal{I} \subset \mathcal{G}$, $|\Omega| = 1$,

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) : \ u_{\min} \le u(x) \le u_{\max}, \ \int_\Omega u(x)\,dx = 1 \right\},$$

$$\mathcal{A}_u(y,z) = \int_\Omega \langle \nabla y(x), \nabla z(x) \rangle \, dx, \qquad \mathcal{B}_u(y,z) = \int_\Omega f(x, u(x))\, y(x) z(x)\, dx,$$

где

$$f \in \mathcal{Q}_+, \qquad \operatorname*{vrai\,min}_{(x,\xi)\in\Omega\times\mathcal{I}} f(x,\xi) > 0.$$

Кроме того, будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ функция $f(x,\cdot)$ является строго монотонной на отрезке $\mathcal{I}$. Отметим, что первое собственное значение краевой задачи (3), соответствующей данным здесь определениям, является простым, а связанная с ним собственная функция сохраняет знак. Если $u_1, u_2 \in \mathcal{S}_1$, то $\mathcal{V}_1[u_1] = \mathcal{V}_1[u_2]$,

$$\int_\Omega \left[f(x, u_1(x)) - f(x, u_2(x)) \right] \hat{y}_1(x) z(x)\, dx = 0, \qquad z \in V,$$

где $\hat{y}_1(x) \in M_1[u_1]$. Принимая во внимание свойства функций f и $\hat{y}_1$, получаем, что $u_1(x) = u_2(x)$ для почти всех $x \in \Omega$. Подобный прием, основанный на применении свойств седловых точек, использование которых, как мы видим, является избыточным, был осуществлен в [8, Предложение 7.10] при исследовании случая $f(x,\xi) = \xi$. Отметим, что существование седловой точки функционала $\Lambda(\cdot,\cdot)$ на множестве $\mathcal{U} \times (V \setminus \{\vartheta\})$ в этом случае можно получить из любого из следующих утверждений: Следствие 1, Предложение 3, Предложение 4.

Пример 2. Приведем пример, показывающий, что при условиях Предложения 1 множество решений задачи (MAX_1) может содержать несколько элементов. Пусть

$$\Omega = (0,1), \quad V = \left\{ z \in H^2(\Omega) : \ z(0) = z(1) = 0 \right\}, \quad W = \mathcal{W} = L^2(\Omega),$$

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) : \; u_{\min} \le u(x) \le u_{\max}, \; \int_0^1 u(x)\,dx \le 1 \right\},$$

$$\mathcal{A}_u(y,z) = \int_0^1 u y'' z''\,dx, \qquad \mathcal{B}_u(y,z) = \int_0^1 uyz\,dx.$$

Для любого $t \in [u_{\min}, 1]$ функции $u_t(x) \equiv t$ отвечает k-ое собственное значение $\lambda_k[u_t] = \pi^4 k^4$, которому соответствует собственная функция $\hat{y}_k(x) = \sin \pi k x$. Поскольку

$$\hat{y}_k''(x) = -\pi^2 k^2 \hat{y}_k(x),$$

то для любого элемента $u \in \mathcal{U}$ получаем, что

$$\lambda_1[u] \le \Lambda(u, \hat{y}_1) = \pi^4 = \lambda_1[u_t].$$

Пример 3. Приведем пример неединственности решения задачи максимизации второго собственного значения. Для краевой задачи из Примера 2 рассмотрим задачу максимизации второго собственного значения на множестве

$$\mathcal{U}_{\mathrm{even}} = \{ u \in \mathcal{U} : \; u(x) = u(1-x) \; \text{ п. в. на } \Omega \}.$$

Отметим, что

$$\mathcal{A}_u(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = \mathcal{B}_u(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = 0, \qquad u \in \mathcal{U}_{\mathrm{even}}.$$

Учитывая это, получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda_2[u] &\le \max_{y \in Y_2[u_t] \setminus \{\vartheta\}} \Lambda(u,y) = \frac{c_1^2 \mathcal{A}_u(\hat{y}_1,\hat{y}_1) + c_2^2 \mathcal{A}_u(\hat{y}_2,\hat{y}_2)}{c_1^2 \mathcal{B}_u(\hat{y}_1,\hat{y}_1) + c_2^2 \mathcal{B}_u(\hat{y}_2,\hat{y}_2)} \\ &\le \max \{ \Lambda(u,\hat{y}_1), \Lambda(u,\hat{y}_2) \} = 16\pi^4 = \lambda_2[u_t], \qquad u \in \mathcal{U}_{\mathrm{even}}, \end{aligned}$$

где $c_1^2 + c_2^2 \ne 0$.

Теорема 3. *Пусть*

$$a_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_0, \quad |\alpha|, |\beta| \le s, \qquad b_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_0, \quad |\alpha|, |\beta| \le m.$$

Тогда существуют $\kappa \in \mathbb{N}$, $\tilde{u} \in \mathcal{U}$, $\tilde{y} \in M_\kappa[\tilde{u}]$ такие, что пара $(\tilde{u}, \tilde{y})$ является седловой точкой ограничения функционала $\Lambda(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{U} \times (Z_\kappa[\tilde{u}] \setminus \{\vartheta\})$, т. е. выполняются неравенства

$$\Lambda(u, \tilde{y}) \le \Lambda(\tilde{u}, \tilde{y}) \le \Lambda(\tilde{u}, y), \qquad (u,y) \in \mathcal{U} \times (Z_\kappa[\tilde{u}] \setminus \{\vartheta\}).$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный функционал ϕ, определенный на $V \setminus \{\vartheta\}$ по следующему закону:

$$\phi[y] = \sup_{u \in \mathcal{U}} \Lambda(u,y).$$

Учитывая условия, налагаемые на коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, заключаем, что для любого $y \in V \setminus \{\vartheta\}$ точная верхняя грань значений $\Lambda(\cdot, y)$ на множестве $\mathcal{U}$ достигается.

Покажем теперь, что точная нижняя грань значений функционала ϕ на $V \setminus \{\vartheta\}$ достигается. Пусть $\{y_n\}$ — некоторая минимизирующая последовательность для функционала ϕ. Без уменьшения общности рассуждений предположим, что $y_n \rightharpoonup \tilde{y} \ne \vartheta$ в V. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \phi[y_n] \ge \liminf_{n\to\infty} \Lambda(u, y_n) \ge \Lambda(u, \tilde{y}), \qquad u \in \mathcal{U}.$$

Таким образом, $\lim_{n\to\infty} \phi[y_n] \ge \phi[\tilde{y}]$, т. е. $\phi[\tilde{y}] = \inf_{y \in V \setminus \{\vartheta\}} \phi[y]$.

Из Леммы 6 следует, что функционал ϕ локально удовлетворяет условию Липшица в области своего определения. Пусть $z \in V$, а $\{u_n\} \subset \mathcal{U}$, $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$, $\{z_n\} \subset V \setminus \{\vartheta\}$ — последовательности такие, что

$$z_n \to \tilde{y} \text{ в } V, \quad t_n \to 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\phi[z_n'] - \phi[z_n]}{t_n} = \phi^\circ[\tilde{y}; z],$$
$$u_n \in \arg\max_{u\in\mathcal{U}} \Lambda(u, z_n'), \qquad z_n' \triangleq z_n + t_n z \neq \vartheta.$$

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u^*$ в $\mathcal{U}$. Очевидно, что $\lim_{n\to\infty} \phi[z_n'] = \Lambda(u^*, \tilde{y})$. Таким образом,

$$\Lambda(u^*, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \phi[z_n'] \geq \lim_{n\to\infty} \Lambda(u, z_n') = \Lambda(u, \tilde{y}), \qquad u \in \mathcal{U}.$$

Отсюда следует, что

$$u^* \in \widetilde{M} \triangleq \arg\max_{u\in\mathcal{U}} \Lambda(u, \tilde{y}), \qquad \phi[\tilde{y}] = \Lambda(u^*, \tilde{y}).$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\phi[z_n + t_n z] - \phi[z_n] &\leq \Lambda(u_n, z_n + t_n z) - \Lambda(u_n, z_n) = \\ &= \frac{1}{\mathcal{B}_{u_n}(z_n + t_n z, z_n + t_n z)} \left\{2t_n \mathcal{A}_{u_n}(z_n, z) + t_n^2 \mathcal{A}_{u_n}(z, z) - \right. \\ &\qquad \left. - \Lambda(u_n, z_n)\left[2t_n \mathcal{B}_{u_n}(z_n, z) + t_n^2 \mathcal{B}_{u_n}(z, z)\right]\right\},\end{aligned}$$

то

$$\phi^\circ[\tilde{y}; z] \leq \frac{2}{\mathcal{B}_{u^*}(\tilde{y}, \tilde{y})} \left[\mathcal{A}_{u^*}(\tilde{y}, z) - \Lambda(u^*, \tilde{y})\mathcal{B}_{u^*}(\tilde{y}, z)\right].$$

Так как $\phi^\circ[\tilde{y}; z] \geq 0$, то

$$\phi^\circ[\tilde{y}; z] \leq \frac{2}{c_{\mathcal{B}}\|\tilde{y}\|_W^2} \left[\mathcal{A}_{u^*}(\tilde{y}, z) - \Lambda(u^*, \tilde{y})\mathcal{B}_{u^*}(\tilde{y}, z)\right].$$

Таким образом,

$$\phi^\circ[\tilde{y}; z] \leq \frac{2}{c_{\mathcal{B}}\|\tilde{y}\|_W^2} \max_{u\in\widetilde{M}} \left\{\mathcal{A}_u(\tilde{y}, z) - \Lambda(u, \tilde{y})\mathcal{B}_u(\tilde{y}, z)\right\}, \qquad z \in V. \tag{18}$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства Теоремы 2, получим, что множество $\widetilde{M}$ является выпуклым и слабо* компактным. Из (18), указанных свойств множества $\widetilde{M}$ и [13, Предложение 2] следует, что

$$\partial\phi[\tilde{y}] \subset \frac{2}{c_{\mathcal{B}}\|\tilde{y}\|_W^2} \left\{\mathcal{A}_u(\tilde{y}, \cdot) - \Lambda(u, \tilde{y})\mathcal{B}_u(\tilde{y}, \cdot) : \ u \in \widetilde{M}\right\}.$$

Так как $\tilde{y}$ является точкой минимума функционала ϕ на $V \setminus \{\vartheta\}$, то $\vartheta' \in \partial\phi[\tilde{y}]$, где ϑ' суть нейтральный элемент пространства V'. Отсюда следует, что существует элемент $\tilde{u} \in \widetilde{M}$ такой, что

$$\mathcal{A}_{\tilde{u}}(\tilde{y}, z) - \Lambda(\tilde{u}, \tilde{y})\mathcal{B}_{\tilde{u}}(\tilde{y}, z) = 0, \qquad z \in V. \qquad \square$$

Предложение 4, Теорема 1 и Теорема 3 вместе позволяют сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. *Утверждение Теоремы 3 справедливо с* $\kappa = 1$.

Из результатов этого параграфа мы увидели, что при выполнении различных условий существует пара $(\hat{u}_k, \hat{y}_k)$ такая, что выполняются неравенства

(SP_k). Таким образом, независимо от кратности собственных значений, в указанных случаях условия оптимальности принимают более простой вид (SP_k) по сравнению с (6) и (12), вовлекая только один элемент из собственного подпространства. Это позволяет вместо экстремальной задачи (MAX_k), которая в общем случае является негладкой, рассмотреть задачу нахождения седловой точки функционала $\Lambda(\cdot,\cdot)$ на некотором множестве. Напомним, что если пара $(\hat{u}_1, \hat{y}_1)$ удовлетворяет неравенствам (SP_1), то $\hat{u}_1 \in \mathcal{S}_1$.

Для нахождения седловой точки функционала $\Lambda(\cdot,\cdot)$ естественно рассмотреть следующую итерационную процедуру:

$$y_n \in M_k[u_n], \tag{19}$$

$$u_{n+1} \in \operatorname*{arg\,min}_{u \in \mathcal{U}} \Pi_k(u, u_n, y_n), \tag{20}$$

где u_1 — заданный элемент множества $\mathcal{U}$, а функционал $\Pi_k(\cdot,\cdot,\cdot)$ определяется формулой (15). Сходимость некоторой подпоследовательности последовательности $\{(u_n, y_n)\}$ к паре $(\hat{u}_k, \hat{y}_k)$, для которой выполняются неравенства (SP_k), имеет место, например, при выполнении предположений Предложения 4. Отметим, что для многих реализаций множества $\mathcal{U}$ экстремальная задача (20) допускает эффективное численное решение, поскольку позволяет перейти к поточечным условиям оптимальности, из которых следует, что для почти каждого $x \in \Omega$ значение $u_{n+1}(x)$ является решением задачи минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве конечномерного пространства. Анализ сходимости приближений, построенных с помощью итерационной процедуры, определяемой формулами (19) и (20), мы проведем в последующих работах.

5. Некоторые приложения

Оптимальное проектирование трехслойной пластины. Рассмотрим модель для трехслойной пластины, не учитывающей сдвигов среднего слоя [2, Раздел 4.3]. Пусть Ω — ограниченная область $\mathbb{R}^2$, а $\partial\Omega$ — ее граница. Будем считать, что $V = H_0^2(\Omega)$, т. е. пластина защемлена на $\partial\Omega$, а $W = \mathcal{W} = H_0^1(\Omega)$. Введем множество

$$\widetilde{U} = \{u \in L^\infty(\Omega) : \ \check{h} \le u(x) \le \hat{h} \ \text{ п. в. на } \ \Omega\},$$

где $0 < \check{h} < \hat{h} < +\infty$. Для фиксированного $u \in \widetilde{U}$ определим $\mathcal{A}_u : V \times V \to \mathbb{R}$ и $\mathcal{B}_u : W \times W \to \mathbb{R}$ формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_u(y,z) = \int_\Omega \Bigg[\ & A_1(u)\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + A_2(u)\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \\ & + A_{12}(u)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right) + 2A_3(u)\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\Bigg]\, dx, \\ \mathcal{B}_u(y,z) = \int_\Omega & \left[B_1(u) yz + B_2(u)\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)\right] dx. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь коэффициенты билинейных форм $\mathcal{A}_u(\cdot,\cdot)$ и $\mathcal{B}_u(\cdot,\cdot)$ определяются выражениями

$$\begin{gathered} A_i(u) = \frac{E_{ii}}{2}\,(u+\tilde{u})^2\, u, \quad i = 1,2, \quad A_{12}(u) = \frac{E_{12}}{2}\,(u+\tilde{u})^2\, u, \\ A_3(u) = G\,(u+\tilde{u})^2\, u, \end{gathered} \tag{22}$$

$$B_1(u) = 2u\rho + \tilde{u}\tilde{\rho}, \qquad B_2(u) = \rho\left(\tilde{u}u^2 + \frac{1}{2}\tilde{u}^2 u + \frac{2}{3}u^3\right) + \frac{1}{12}\tilde{\rho}\tilde{u}^3, \tag{23}$$

где

$$E_i, G > 0, \qquad \rho > \tilde{\rho} > 0,$$

$$E_{ii} = \frac{E_i}{1-\chi_1\chi_2}, \qquad E_{12} = \chi_2 E_{11} = \chi_1 E_{22}, \qquad 0 \le \chi_i < 1, \tag{24}$$

$$u \in \widetilde{U}, \quad u(x) + \tilde{u}(x) \equiv c > 0, \quad \tilde{u}(x) > 0, \quad x \in \Omega.$$

Здесь E_1, E_2, χ_1, χ_2, G — упругие характеристики материала внешних слоев, u — толщина внешних слоев, $\tilde{u}$ — толщина среднего слоя, $\tilde{\rho}$ и ρ — плотности материалов внутреннего и внешних слоев. Краевая задача, описывающая свободные колебания пластины, есть (3), где $\mathcal{A}_u(\cdot,\cdot)$, $\mathcal{B}_u(\cdot,\cdot)$ выражаются соотношениями (21)–(24), причем y — функция прогибов, а λ соответствует частоте свободных колебаний. Масса рассматриваемой пластины определяется следующей формулой:

$$m[u] = \int_\Omega [2\rho u(x) + \tilde{\rho}\tilde{u}(x)]\, dx.$$

Введем множество

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \widetilde{U} : \ m[u] \le \hat{m} \right\}, \tag{25}$$

где $\hat{m}$ представляет собой максимально допустимую массу пластины. Будем считать, что число $\hat{m}$ выбрано так, что $\mathcal{U} \ne \varnothing$.

Нетрудно проверить, что для любых ρ, $\tilde{\rho} > 0$ отображение $t \mapsto B_2(t)$ является сильно выпуклым на $[\check{h}, \hat{h}]$. Из Предложения 1 следует, что задача максимизации k-ой частоты свободных колебаний (MAX_k), определяемая (3), (21)–(25), является разрешимой. Теорема 2 и Замечание 6 позволяют заключить, что задача максимизации первой частоты свободных колебаний трехслойной пластины при заданных ограничениях обладает единственным решением $\hat{u}_1$. Наконец, из Теоремы 1 и Леммы 7 следует, что для некоторого $\hat{y}_1 \in M_1[\hat{u}_1]$ пара $(\hat{u}_1, \hat{y}_1)$ удовлетворяет неравенствам (SP_1).

Оптимальное проектирование колонн против потери устойчивости. Пусть $0 < \check{s} < \hat{s} < +\infty$,

$$\Omega = (0,1), \qquad V = H_0^2(\Omega), \qquad W = \mathcal{W} = H_0^1(\Omega), \tag{26}$$

$$e, \kappa, \rho \in L^\infty(\Omega), \qquad e(x) \ge e_0 > 0, \quad \kappa(x) \ge 0, \quad \rho(x) \ge \rho_0 > 0, \quad x \in \Omega. \tag{27}$$

Введем множества

$$\widetilde{U} = \{ u \in L^\infty(\Omega) : \ \check{s} \le u(x) \le \hat{s} \ \text{ п. в. на } \Omega \},$$

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \widetilde{U} : \ \int_0^1 \rho(x) u(x)\, dx = m \right\},$$

$$\mathcal{U}_{\mathrm{even}} = \{ u \in \mathcal{U} : \ u(x) = u(1-x) \ \text{ п. в. на } \Omega \}.$$

Будем считать, что число m выбрано так, что $\mathcal{U} \ne \varnothing$.

Пусть $u \in \mathcal{U}$. Краевая задача, описывающая потерю устойчивости защемленной неоднородной колонны, лежащей на упругом основании, есть (3), (26), (27), где $\mathcal{A}_u(\cdot,\cdot)$ и $\mathcal{B}_u(\cdot,\cdot)$ определяются формулами

$$\mathcal{A}_u(y,z) = \int_0^1 (e\, I[u]\, y'' z'' + \kappa\, y\, z)\, dx, \qquad \mathcal{B}_u(y,z) = \int_0^1 y' z'\, dx.$$

Здесь u — распределение площади поперечных сечений; наименьшее собственное число этой краевой задачи обычно связывают с критической силой, превышение которой приводит к потере устойчивости колонны; e, ρ — модуль упругости и плотность материала колонны; κ — модуль упругости основания; m — заданное значение массы колонны. В дальнейшем будем считать, что

$$I[u](x) = au(x) - b \geq c, \qquad x \in \Omega,$$

где $a, c > 0$, $b \geq 0$. Отметим, что данное представление справедливо для многих типов поперечных сечений колонны (см. [1, Раздел 1.3] и [9, § 2]).

Задача нахождения наиболее устойчивой колонны при ограничении на ее массу и площадь поперечных сечений есть (MAX_1). Эта задача является вариацией знаменитой задачи Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны. Рассматриваемая нами задача в случае

$$e(x) = \rho(x) \equiv 1, \quad \kappa(x) \equiv 0, \quad m = 1, \quad a = 1, \quad b = 0 \tag{28}$$

впервые достаточно полно была исследована в [9], где, в частности, доказывается следующее утверждение.

Утверждение 1 ([9, Теорема 4.8][3]). *Существует элемент $\hat{u}_1 \in \mathcal{U}_{\mathrm{even}} \cap \mathcal{S}_1$ такой, что для некоторой функции $\hat{y}_1 \in \mathcal{V}_1[\hat{u}_1]$ пара $(\hat{u}_1, \hat{y}_1)$ является седловой точкой ограничения функционала $\Lambda(\cdot,\cdot)$ на множество $\mathcal{U}_{\mathrm{even}} \times (V \setminus \{\vartheta\})$:*

$$\Lambda(u, \hat{y}_1) \leq \Lambda(\hat{u}_1, \hat{y}_1) \leq \Lambda(\hat{u}_1, y), \qquad (u, y) \in \mathcal{U}_{\mathrm{even}} \times (V \setminus \{\vartheta\}).$$

Отметим, что доказательство этого утверждения не может быть перенесено на более общий случай, когда рассматривается задача о потере устойчивости неоднородной колонны, лежащей на упругом основании, так как оно существенно использует свойства собственных функций, соответствующих элементу $u \in \mathcal{U}_{\mathrm{even}}$. Указанное замечание также касается вопроса о существовании решений задачи (MAX_1) (см. [9, § 3]). Легко видеть, что даже в общем случае, независимо от свойств собственных функций, существование решений этой задачи следует из Предложения 1, а вариационная характеризация оптимального решения через седловую точку функционала $\Lambda(\cdot,\cdot)$ на множестве $\mathcal{U} \times (V \setminus \{\vartheta\})$ обеспечивается Теоремой 1 и Леммой 7.

Рассмотрим частный случай (28). Пусть пара $(\hat{u}_1, \hat{y}_1) \in \mathcal{U} \times (V \setminus \{\vartheta\})$ удовлетворяет неравенствам (SP_1). Если $\hat{u}_1 \notin \mathcal{U}_{\mathrm{even}}$, то, применяя [9, Теорема 2.4], получаем, что найдется $\bar{u} \in \mathcal{U}_{\mathrm{even}}$ такой, что $\lambda_1[\hat{u}_1] \leq \lambda_1[\bar{u}]$, т. е. $\lambda_1[\hat{u}_1] = \lambda_1[\bar{u}]$. Тогда из ($\mathrm{SP}_1$) следует, что

$$\lambda_1[\bar{u}] \leq \Lambda(\bar{u}, \hat{y}_1) \leq \lambda_1[\hat{u}_1].$$

Таким образом, $\Lambda(\hat{u}_1, \hat{y}_1) = \Lambda(\bar{u}, \hat{y}_1)$, $\hat{y}_1 \in \mathcal{V}_1[\bar{u}]$. Следовательно,

$$\Lambda(u, \hat{y}_1) \leq \Lambda(\bar{u}, \hat{y}_1) \leq \Lambda(\bar{u}, y), \qquad (u, y) \in \mathcal{U} \times (V \setminus \{\vartheta\}).$$

Итак, нам удалось установить справедливость усиленной версии Утверждения 1.

---

[3] См. сноску на странице 1357.

6. Технические утверждения

Лемма 1. *Если $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta} \in \mathfrak{L}$, то функционал $\lambda_k[\cdot]$ удовлетворяет на множестве U условию Липшица.*

Доказательство. Из (1), (2) и (4) легко следует, что существуют положительные числа $\check{\lambda}_k$, $\hat{\lambda}_k$ такие, что

$$\check{\lambda}_k \leq \lambda_k[v] \leq \hat{\lambda}_k, \qquad v \in U.$$

Для фиксированного элемента $y \in V \setminus \{\vartheta\}$ установим существование положительной постоянной $D > 0$ такой, что для любых $u, v \in U$ выполняется неравенство

$$|\Lambda(u,y) - \Lambda(v,y)| \leq D \frac{\|y\|_V^2}{\|y\|_W^2} \|u - v\|_\infty. \tag{29}$$

Имеем, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_u(y,y) - \mathcal{A}_v(y,y)| &\leq \|u - v\|_\infty \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq s} \frac{L(a_{\alpha\beta})}{2} \left\{ \|\partial^\alpha y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial^\beta y\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\ &\leq L_A \|y\|_V^2 \|u - v\|_\infty, \qquad L_A \triangleq (s+1)^d \max_{|\alpha|,|\beta| \leq s} L(a_{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$|\mathcal{B}_u(y,y) - \mathcal{B}_v(y,y)| \leq L_B \|y\|_W^2 \|u - v\|_\infty,$$

где

$$L_B = (m+1)^d \max_{|\alpha|,|\beta| \leq m} L(b_{\alpha\beta}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\Lambda(u,y) - \Lambda(v,y)| &\leq \frac{|\mathcal{A}_u(y,y) - \mathcal{A}_v(y,y)|}{\mathcal{B}_u(y,y)} + \Lambda(v,y) \frac{|\mathcal{B}_u(y,y) - \mathcal{B}_v(y,y)|}{\mathcal{B}_u(y,y)} \\ &\leq \frac{L_A}{c_\mathcal{B}} \frac{\|y\|_V^2}{\|y\|_W^2} \|u - v\|_\infty + \frac{L_B C_\mathcal{A}}{c_\mathcal{B}^2} \frac{\|y\|_V^2}{\|y\|_W^2} \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$D = \frac{L_A}{c_\mathcal{B}} + \frac{L_B C_\mathcal{A}}{c_\mathcal{B}^2}.$$

Отметим, что

$$\max_{y \in Y_k[v] \setminus \{\vartheta\}} \frac{\|y\|_V^2}{\|y\|_W^2} \leq \frac{C_\mathcal{B}}{c_\mathcal{A}} \max_{y \in Y_k[v] \setminus \{\vartheta\}} \frac{\mathcal{A}_v(y,y)}{\mathcal{B}_v(y,y)} = \frac{C_\mathcal{B}}{c_\mathcal{A}} \lambda_k[v] \leq \frac{C_\mathcal{B} \hat{\lambda}_k}{c_\mathcal{A}}.$$

Отсюда и из (29) следует, что

$$\begin{aligned} \max_{y \in Y_k[v] \setminus \{\vartheta\}} \Lambda(u,y) &\leq \lambda_k[v] + D \|u - v\|_\infty \left(\max_{y \in Y_k[v] \setminus \{\vartheta\}} \frac{\|y\|_V^2}{\|y\|_W^2} \right) \\ &\leq \lambda_k[v] + D \frac{C_\mathcal{B} \hat{\lambda}_k}{c_\mathcal{A}} \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda_k[u] \leq \max_{y \in Y_k[v] \setminus \{\vartheta\}} \Lambda(u,y)$, то

$$\lambda_k[u] - \lambda_k[v] \leq D \frac{C_\mathcal{B} \hat{\lambda}_k}{c_\mathcal{A}} \|u - v\|_\infty.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получаем, что

$$|\lambda_k[u] - \lambda_k[v]| \le D\frac{C_{\mathcal{B}}\hat{\lambda}_k}{c_{\mathcal{A}}}\|u - v\|_\infty, \qquad u, v \in U. \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть*

$$a_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}, \quad |\alpha|, |\beta| \le s, \qquad b_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}, \quad |\alpha|, |\beta| \le m,$$

$u_n \to u$ *в* U. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} \lambda_k[u_n] = \lambda_k[u]$. *Кроме того, если* $y_n \in M_k[u_n]$, *то существует подпоследовательность* $\{n_\jmath\} \subset \{n\}$ *такая, что*

$$y_{n_\jmath} \to y^* \in M_k[u] \ \text{ в } \ V.$$

Доказательство. Проведем доказательство для $k = 1$. Пусть $\lambda^n = \lambda_1[u_n]$. Тогда

$$\check{\lambda}_1 \le \lambda^n \le \hat{\lambda}_1, \qquad \|y_n\|_V^2 \le c_{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A}_{u_n}(y_n, y_n) \le \frac{\hat{\lambda}_1}{c_{\mathcal{A}}}.$$

Следовательно, существуют подпоследовательности (для которых сохранены прежние обозначения $\{\lambda^n\}$, $\{y_n\}$) такие, что

$$\lambda^n \to \lambda^*, \quad y_n \to y^* \ \text{ в } \ \mathcal{W}, \quad \partial^\alpha y_n \rightharpoonup \partial^\alpha y^* \ \text{ в } \ L^2(\Omega), \quad l < |\alpha| \le s. \tag{30}$$

Из

$$\mathcal{A}_{u_n}(y_n, z) = \lambda^n \, \mathcal{B}_{u_n}(y_n, z), \quad z \in V, \tag{31}$$

получаем, что

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{A}}\|y^* - y_n\|_V^2 &\le \mathcal{A}_{u_n}(y^* - y_n, y^* - y_n) \\ &\le \lambda^n C_{\mathcal{B}}\|y_n\|_W\|y_n - y^*\|_W + \mathcal{A}_{u_n}(y^*, y^*) - \mathcal{A}_{u_n}(y^*, y_n). \end{aligned}$$

Заметим, что $a_{\alpha\beta}(\cdot, u_n(\cdot))\partial^\alpha y^*(\cdot) \to a_{\alpha\beta}(\cdot, u(\cdot))\partial^\alpha y^*(\cdot)$ в $L^2(\Omega)$ в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Принимая во внимание это и (30), заключаем, что $y_n \to y^*$ в V. Переходя теперь к пределу при $n \to \infty$ в (31), получаем, что

$$\mathcal{A}_u(y^*, z) = \lambda^* \, \mathcal{B}_u(y^*, z), \quad z \in V.$$

Так как $\mathcal{B}_u(y^*, y^*) = 1$, то $y^* \ne \vartheta$. Следовательно, λ^* и y^* суть собственное значение и связанная с ним собственная функция (3). Тогда $\lambda_1[u] \le \lambda^*$. Адаптируя доказательство утверждения [3, Теорема 2.1], с учетом того, что $u_n \to u$ в U, получим, что $\limsup_{n\to\infty} \lambda_1[u_n] \le \lambda_1[u]$, откуда $\lambda^* = \lambda_1[u]$. Нетрудно обобщить данные рассуждения для случая $k > 1$. $\square$

Лемма 3. *Пусть*

$$a_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_c, \quad l < |\alpha| \le s, \quad a_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_0, \quad |\alpha|, |\beta| \le l, \quad b_{\alpha\beta} \in \mathcal{Q}_0, \quad |\alpha|, |\beta| \le m,$$

$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *в* U. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} \lambda_k[u_n] = \lambda_k[u]$. *Кроме того, если* $y_n \in M_k[u_n]$, *то существует подпоследовательность* $\{n_\jmath\} \subset \{n\}$ *такая, что*

$$y_{n_\jmath} \to y^* \in M_k[u] \ \text{ в } \ V.$$

Доказательство незначительно отличается от доказательства Леммы 2.

Лемма 4. *Если* $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta} \in \mathcal{D}$, $u \in U$, *то справедливо включение*

$$\partial\lambda_k[u] \subset \mathfrak{M}_k[u] \triangleq \operatorname{conv}\{D\mathcal{A}_{u,\cdot}(y, y) - \lambda_k[u]D\mathcal{B}_{u,\cdot}(y, y) : \ y \in M_k[u]\}.$$

Доказательство. Так как $\mathcal{V}_k[u]$ представляет собой конечномерное пространство, то множество $\mathfrak{M}_k[u]$ является выпуклым компактным подмножеством некоторого конечномерного подпространства пространства $(L_r^\infty(\Omega))'$. Следовательно, $\mathfrak{M}_k[u]$ — слабо* компактное множество пространства $(L_r^\infty(\Omega))'$.

Для фиксированного $h \in L_r^\infty(\Omega)$ рассмотрим последовательности $\{u_n\} \subset U$, $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ такие, что $u_n + t_n h \in U$,

$$u_n \to u \ \text{ в } \ U, \quad t_n \to 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_k[u_n + t_n h] - \lambda_k[u_n]}{t_n} = \lambda_k^\circ[u; h].$$

Далее, пусть

$$y_n \in \operatorname*{arg\,max}_{y \in Y_k[u_n]\setminus\{\vartheta\}} \Lambda(u_n + t_n h, y).$$

Справедливо представление $y_n = \sum_{i=1}^k c_i^n y_i[u_n]$, причем постоянные c_i^n могут быть выбраны так, что $\sum_{i=1}^k [c_i^n]^2 = 1$. Принимая во внимание Лемму 2, можем считать, что $y_n \to y^* \in Y_k'[u] \setminus \{\vartheta\}$ в V, где $Y_k'[u] = \operatorname{span}(Y_k[u] \cup \mathcal{V}_k[u])$. Тогда

$$\lambda_k[u] = \lim_{n\to\infty} \lambda_k[u_n + t_n h] \le \lim_{n\to\infty} \Lambda(u_n + t_n h, y_n) =$$
$$= \Lambda(u, y^*) \le \max_{y \in Y_k'[u]\setminus\{\vartheta\}} \Lambda(u, y) = \lambda_k[u].$$

Таким образом, $y^* \in \mathcal{V}_k[u]$. Пусть

$$z_n = \frac{y_n}{\sqrt{\mathcal{B}_{u_n}(y_n, y_n)}}.$$

Тогда

$$\lambda_k[u_n + t_n h] - \lambda_k[u_n] \le \Lambda(u_n + t_n h, z_n) - \Lambda(u_n, z_n)$$
$$= \frac{\mathcal{A}_{u_n+t_n h}(z_n, z_n) - \mathcal{A}_{u_n}(z_n, z_n)}{\mathcal{B}_{u_n+t_n h}(z_n, z_n)} - \Lambda(u_n, z_n) \frac{\mathcal{B}_{u_n+t_n h}(z_n, z_n) - \mathcal{B}_{u_n}(z_n, z_n)}{\mathcal{B}_{u_n+t_n h}(z_n, z_n)}$$
$$= \frac{t_n}{\mathcal{B}_{u_n+t_n h}(z_n, z_n)} \left\{ D\mathcal{A}_{u_n+\theta_1(n) t_n h, h}(z_n, z_n) - \Lambda(u_n, z_n)\, D\mathcal{B}_{u_n+\theta_2(n) t_n h, h}(z_n, z_n) \right\},$$

где $\theta_i(n) \in [0,1]$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$\lambda_k^\circ[u; h] \le D\mathcal{A}_{u,h}(z, z) - \lambda_k[u] D\mathcal{B}_{u,h}(z, z),$$

где $z \in M_k[u]$. Таким образом,

$$\lambda_k^\circ[u; h] \le \max_{\zeta \in \mathfrak{M}_k[u]} \langle \zeta, h \rangle.$$

Поскольку $\mathfrak{M}_k[u]$ является выпуклым слабо* компактным подмножеством пространства $(L_r^\infty(\Omega))'$, то из последнего неравенства и [13, Предложение 2] следует, что $\partial\lambda_k[u] \subset \mathfrak{M}_k[u]$. □

Лемма 5. *Пусть коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условиям Леммы 2, $q \in \mathbb{N}$, причем*

$$\varnothing \ne \mathcal{U}_q \triangleq \{u \in \mathcal{U} : \ u^i \in C^{0,1}(\bar{\Omega}), \ \|u^i\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})} \le q, \ i = 1, \dots, r\}.$$

Тогда существует элемент $\tilde{u}_k \in \mathcal{U}_q$ такой, что для некоторого $\tilde{y}_k \in M_k[\tilde{u}_k]$ пара $(\tilde{u}_k, \tilde{y}_k)$ является седловой точкой ограничения функционала $\Lambda(\cdot,\cdot)$ на множество $\mathcal{U}_q \times (Z_k[\tilde{u}_k] \setminus \{\vartheta\})$, т. е. выполняются неравенства

$$\Lambda(u, \tilde{y}_k) \le \Lambda(\tilde{u}_k, \tilde{y}_k) \le \Lambda(\tilde{u}_k, y), \qquad (u, y) \in \mathcal{U}_q \times (Z_k[\tilde{u}_k] \setminus \{\vartheta\}).$$

Доказательство опирается на Лемму 2 и незначительно отличается от доказательства Предложения 4.

Лемма 6. *Отображение $\phi : V \setminus \{\vartheta\} \to \mathbb{R}$, определяемое по формуле*

$$\phi[y] = \sup_{u \in \mathcal{U}} \Lambda(u, y),$$

локально удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Очевидно, что функционал $\phi[\cdot]$ принимает конечные значения в области своего определения. Напомним, что для каждого элемента $u \in U$ билинейные формы $\mathcal{A}_u(\cdot,\cdot)$, $\mathcal{B}_u(\cdot,\cdot)$ представляют собой скалярные произведения в V и W соответственно, эквивалентные стандартным. Нормы, порождаемые этими скалярными произведениями, будем обозначать через $\|\cdot\|_{V,u}$, $\|\cdot\|_{W,u}$ соответственно. Пусть $y \in V$, $\|y\|_V = R$, $\|y\|_W = \rho > 0$, $0 < \delta < \rho$, $u \in U$. Рассмотрим шар

$$B_\delta(y) = \{z \in V : \|z - y\|_V < \delta\}.$$

Если $z_1, z_2 \in B_\delta(y)$, то

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_u(z_1, z_1) - \mathcal{B}_u(z_2, z_2)| &= \big|\|z_1\|^2_{W,u} - \|z_2\|^2_{W,u}\big| \\ \le C_{\mathcal{B}}\|z_2 - z_1\|_W\big(\|z_1\|_W + \|z_2\|_W\big) &\le 2(\delta + \rho)\, C_{\mathcal{B}}\|z_2 - z_1\|_V. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$|\mathcal{A}_u(z_1, z_1) - \mathcal{A}_u(z_2, z_2)| \le 2(\delta + R)\, C_{\mathcal{A}}\|z_2 - z_1\|_V.$$

Поскольку $\|y\|_W - \|z_i\|_W \le \|z_i - y\|_V$, то $0 < \rho - \delta < \|z_i\|_W$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \big|\Lambda(u, z_1) - \Lambda(u, z_2)\big| \le \frac{|\mathcal{A}_u(z_1, z_1) - \mathcal{A}_u(z_2, z_2)|}{\mathcal{B}_u(z_1, z_1)} \\ + \Lambda(u, z_2)\frac{|\mathcal{B}_u(z_1, z_1) - \mathcal{B}_u(z_2, z_2)|}{\mathcal{B}_u(z_1, z_1)} \le D(\rho, R, \delta)\|z_2 - z_1\|_V, \end{aligned}$$

где

$$D(\rho, R, \delta) = \frac{2(\delta + R)\, C_{\mathcal{A}}}{c_{\mathcal{B}}(\rho - \delta)^2}\left(1 + \frac{(\delta + \rho)(\delta + R)C_{\mathcal{B}}}{c_{\mathcal{B}}(\rho - \delta)^2}\right).$$

Из последних неравенств легко следует, что для любых $z_1, z_2 \in B_\delta(y)$ выполняется неравенство

$$|\phi[z_1] - \phi[z_2]| \le D(\rho, R, \delta)\|z_1 - z_2\|_V.$$

□

Лемма 7. *Пусть $\rho \in L^1(\Omega)$, $\rho(x) \ge \rho_0 > 0$ п. в. на Ω,*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{u \in L^\infty(\Omega) :\ u_{\min} \le u(x) \le u_{\max}\ \text{ п. в. на } \Omega\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \left\{u \in \mathcal{U}_1 :\ \int_\Omega \rho(x)u(x)\,dx \le m\right\}, \\ \mathcal{U}_3 &= \left\{u \in \mathcal{U}_1 :\ \int_\Omega \rho(x)u(x)\,dx = m\right\}, \end{aligned}$$

где $0 < u_{\min} < u_{\max} < +\infty$, а m и ρ выбраны так, что множества $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ являются непустыми. Тогда $\mathcal{U}_i = \mathrm{cl}^*\left[\mathcal{U}_i \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})\right]$.

Доказательство. Через ψ_ε будем обозначать стандартное ядро усреднения в $\mathbb{R}^d$. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность такая, что $\varepsilon_n \downarrow 0$, а элемент u принадлежит одному из множеств $\mathcal{U}_i$. Положим

$$u_n = \psi_{\varepsilon_n} * (u - u_{\min}) + u_{\min}.$$

По построению

$$\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \tag{32}$$

для любого $p \in [1, +\infty)$. Очевидно, что $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{U}_1$. Если $g \in L^1(\Omega)$, то

$$\left| \int_\Omega u(x) \cdot g(x)\, dx - \int_\Omega u_n(x) \cdot g(x)\, dx \right| \le \|u - u_{\min}\|_{L^\infty(\Omega)} \|g - \psi_{\varepsilon_n} * g\|_{L^1(\Omega)}.$$

Так как $\|g - \psi_{\varepsilon_n} * g\|_{L^1(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $g \in L^1(\Omega)$, то

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \ \text{ в } \ \mathcal{U}_1. \tag{33}$$

Рассмотрим случай, когда $u \in \mathcal{U}_2$. Пусть $\|\rho u\|_{L^1(\Omega)} < m$. В силу (33) найдется номер N_1 такой, что $\|\rho u_n\|_{L^1(\Omega)} < m$ при $n \ge N_1$. Пусть $\|\rho u\|_{L^1(\Omega)} = m$. Предположим, что существует номер N_2, что справедливо неравенство $\|\rho u_n\|_{L^1(\Omega)} > m$ при $n \ge N_2$. Пусть

$$I_n(t) = \int_\Omega \min\{t, u_n(x)\}\rho(x)\, dx, \qquad t \in \mathcal{I} \triangleq [u_{\min}, u_{\max}].$$

Поскольку

$$\begin{aligned} |I_n(t_2) - I_n(t_1)| &\le \int_\Omega |\min\{t_2, u_n(x)\} - \min\{t_1, u_n(x)\}|\, \rho(x)\, dx \le \\ &\le \int_{A(t_1,t_2)} |\max\{t_1, t_2\} - \min\{t_1, t_2\}|\, \rho(x)\, dx \le |t_2 - t_1| \|\rho\|_{L^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

где

$$A(t_1, t_2) = \{x \in \Omega : \ u_n(x) \ge \min\{t_1, t_2\}\},$$

то функция $I_n(\cdot)$ непрерывна на отрезке $\mathcal{I}$. Так как $I_n(u_{\min}) \le m < I_n(u_{\max})$, то найдется $c_n \in \mathcal{I}$, что $I_n(c_n) = m$. Пусть $v_n = \min\{c_n, u_n\}$. Легко видеть, что $v_n \in \mathcal{U}_2 \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Пусть $\chi_n(x)$ обозначает характеристическую функцию множества $\{x \in \Omega : \ u_n(x) \ge c_n\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_\Omega \rho(x) u_n(x)\, dx &= \int_\Omega \rho(x) v_n(x)\, dx + \int_\Omega (u_n(x) - c_n)\, \chi_n(x)\rho(x)\, dx \\ &= m + \int_\Omega (u_n(x) - c_n)\, \chi_n(x) \rho(x)\, dx, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_\Omega (u_n(x) - c_n)\, \chi_n(x)\rho(x)\, dx \to 0. \tag{34}$$

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что

$$c_n \to c_*, \qquad (u_n - c_n)\, \chi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \omega_*, \ \ \chi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \chi_* \ \text{ в } \ L^\infty(\Omega). \tag{35}$$

Тогда, используя (32) и [3, Лемма 2.1], заключаем, что

$$(u_n - c_n)\, \chi_n \rightharpoonup (u - c_*)\, \chi_* \ \text{ в } \ L^2(\Omega), \qquad \omega_* = (u - c_*)\, \chi_*. \tag{36}$$

Поскольку $(u_n(x) - c_n)\,\chi_n(x) \geq 0$ для п. в. $x \in \Omega$, то $(u(x) - c_*)\,\chi_*(x) \geq 0$ п. в. на Ω. Вместе с (34)–(36) это означает, что $(u(x) - c_*)\,\chi_*(x) = 0$ для п. в. $x \in \Omega$. Таким образом, для любого $g \in L^1(\Omega)$

$$\int_\Omega v_n(x)g(x)\,dx = \int_\Omega u_n(x)g(x)\,dx - \int_\Omega (u_n(x) - c_n)\,\chi_n(x)g(x)\,dx$$
$$\to \int_\Omega u(x)g(x)\,dx.$$

Итак, мы построили последовательность $\{v_n\} \subset \mathcal{U}_2 \cap C^{0,1}(\bar\Omega)$ такую, что $v_n \xrightarrow{*} u$.

Ясно, что остается только разобрать случай, когда $u \in \mathcal{U}_3$ и $\|\rho u_n\|_{L^1(\Omega)} < m$ для всех достаточно больших номеров n. Его рассмотрение проводится аналогично. □

Благодарности

Автор выражает признательность рецензенту за высказанные замечания и пожелания.

References

[1] N.V. Banichuk, *Problems and Methods of Optimal Structural Design*, New York:Plenum Press, 1983. MR0715778

[2] W.G. Litvinov, *Optimization in Elliptic Problems with Applications to Mechanics of Deformable Bodies and Fluid Mechanics*, Basel: Birkhäuser Verlag, 2000. MR1774123

[3] V.Yu. Goncharov, *Existence Criteria in Some Extremum Problems Involving Eigenvalues of Elliptic Operators*, Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, **9**:1 (2016), 37–47.

[4] A. Henrot, *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*, Basel:Birkhäuser Verlag, 2006. MR2251558

[5] E.J. Haug, B. Rousselet, *Design Sensitivity Analysis in Structural Mechanics. II. Eigenvalue Variations*, Journal of Structural Mechanics, **8**:2 (1980), 161–186. MR0607803

[6] A. Myslinski, *Bimodal Optimal Design of Vibrating Plates Using Theory and Methods of Nondifferentiable Optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications, **46**:2 (1985), 187–203. MR0794247

[7] S.J. Cox, *The Generalized Gradient at a Multiple Eigenvalue*, Journal of Functional Analysis, **133** (1995), 30–40. MR1351641

[8] S.J. Cox, J.R. McLaughlin, *Extremal Eigenvalue Problems for Composite Membranes, II*, Applied Mathematics and Optimization, **22** (1990), 169–187. MR1554202

[9] S.J. Cox, M.L. Overton, *On the optimal design of columns against buckling*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, **23**:2 (1992), 287–325. MR1147865

[10] V. Barbu, T. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, New York:Springer, 2012. MR3025420

[11] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2011. MR2759829

[12] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, New York: Springer-Verlag, 1998. MR1488695

[13] F.H. Clarke, *A new approach to Lagrange multipliers*, Mathematics of Operations Research, **1**:2 (1976), 165–174. MR0414104

Vasily Yur'evich Goncharov
Moscow Aviation Institute (National Research University),
Volokolamskoe Shosse, 4,
125993, Moscow, Russia
E-mail address: fulu.happy@gmail.com