S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1373–1379 (2017) УДК 512.552
DOI 10.17377/semi.2017.14.118 MSC 16P10

КОНЕЧНЫЕ КОЛЬЦА, НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРАФЫ КОТОРЫХ УДОВЛЕТВОРЯЮТ УСЛОВИЮ ДИРАКА

Ю.Н. МАЛЬЦЕВ, А.С. МОНАСТЫРЕВА

Abstract. We describe all associative finite rings in which nilpotent graphs satisfy the Dirac's condition.

Keywords: associative ring, finite ring, nilpotent graph, the Dirac's theorem.

1. Введение

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца (не обязательно коммутативные и не обязательно имеющие единицу), если не оговаривается специально другое.

Сформулируем понятие нильпотентного графа кольца. Итак, пусть R — произвольное ассоциативное кольцо и $N(R)$ — множество нильпотентных элементов кольца R. Вершинами нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$ кольца R являются элементы множества

$$Z_N(R)^* = \{x \in R \setminus \{0\} \mid (\exists y \in R \setminus \{0\})(xy \in N(R))\},$$

при этом две различные вершины $x, y \in Z_N(R)^*$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $xy \in N(R)$. Данное определение было введено в работе [4]. Легко видеть, что если $(xy)^n = 0$, то $(yx)^{n+1} = y(xy)^n x = 0$. Кроме того, из определений следует, что граф делителей нуля $\Gamma(R)$ является подграфом нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$. Напомним, что *графом делителей нуля* $\Gamma(R)$ кольца R называется граф, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$.

Maltsev, Yu.N., Monastyreva, A.S., On finite rings in which nilpotent graphs satisfy the Dirac's condition.

© 2017 Мальцев Ю.Н., Монастырева А.С.

Поступила 26 июня 2017 г., опубликована 8 декабря 2017 г.

В последние годы был опубликован ряд статей, в которых изучаются свойства нильпотентных графов колец. Впервые понятие нильпотентного графа кольца ввел П. Чен в работе [3]. Однако он считал вершинами нильпотентного графа все элементы кольца. П. Чен в этой своей работе дал некоторые оценки хроматического числа нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$ для случаев, когда R коммутативное кольцо или не содержит ненулевых нильпотентных элементов. В работе [4] определение было изменено: вершинами нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$ авторы предложили считать только элементы множества $Z_N(R)^*$. Это определение и используется в статьях [4] – [9] и в настоящей работе. Кроме того, ряд результатов, ранее полученных для графа делителей нуля, в [4] был обобщен для нильпотентного графа. В [5] исследуются нильпотентные графы регулярных по фон Нейманну колец. В частности, исследуется вопрос: в каком случае изоморфизм нильпотентных графов двух колец влечет изоморфизм самих колец. В этом направлении авторам удалось получить некоторые результаты. В работе [6] вычислен диаметр графа $\Gamma_N(M_n(F))$, где F – поле и $n \geq 2$. В статье [7] доказано, что граф $\Gamma_N(M_n(R))$ не является планарным для любого коммутативного кольца R с единицей и $n \geq 2$, и показано, что диаметр графа $\Gamma_N(R)$ не превосходит диаметр графа $\Gamma_N(M_n(R))$ для любого артинова коммутативного кольца R с единицей. В работе [8] полностью описаны конечные ассоциативные кольца, нильпотентный граф которых является однородным, двудольным или полным. В работе [9] описаны конечные кольца, нильпотентные графы которых являются эйлеровыми.

Цель настоящей работы — описать конечные ассоциативные кольца, нильпотентные графы которых удовлетворяют условию Дирака. Ранее, в работах [1, 2], описываются свойства конечных колец, у которых граф делителей нуля удовлетворяет условию Дирака, но полного описания таких колец пока получить не удалось. В настоящей работе полностью описаны конечные кольца, нильпотентные графы которых удовлетворяют условию Дирака.

Введем обозначения и понятия, используемые нами в работе.

Если граф имеет простой цикл, содержащий все вершины графа по одному разу, то такой цикл называется *гамильтоновым циклом*, а граф называется *гамильтоновым графом* [10, с. 232]. Граф G называется *связным*, если любая пара его различных вершин соединена простой цепью [11, с. 27]. Степень вершины v графа мы будем обозначать символом $\rho(v)$. В теории графов известна следующая теорема.

Теорема Дирака. *Любой граф, в котором степень каждой вершины не меньше, чем $\frac{n}{2}$, где n — число вершин в данном графе, причем $n \geq 3$, является гамильтоновым* [10, с. 233].

В настоящей статье мы исследуем свойства колец, графы делителей нуля которых удовлетворяют условию теоремы Дирака. Впредь мы будем говорить, что граф удовлетворяет *условию Дирака*, если он удовлетворяет условию теоремы Дирака.

Пусть аддитивная группа кольца R разлагается в прямую сумму своих ненулевых аддитивных подгрупп $A_i, i = 1, \ldots, n$ и $n \geq 2$, т.е. $R = A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_n$. Если все A_i являются двусторонними идеалами кольца R, то кольцо R называют *разложимым* и пишут $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Через $J(R)$ мы будем обозначать радикал Джекобсона кольца R [12, с. 73].

Для простого числа p будем полагать, что $GF(p^n)$ — поле из p^n элементов. Кольцо всех квадратных матриц n-го порядка с коэффициентами из кольца R обозначим через $M_n(R)$. Количество элементов в конечном множестве A мы будем обозначать через $|A|$. Конечное кольцо R с единицей называется локальным, если фактор-кольцо $R/J(R)$ является полем.

2. Основной результат

Предложение 1. *Пусть R — нильпотентное конечное кольцо порядка n. Граф $\Gamma_N(R)$ удовлетворяет условию Дирака в том и только в том случае, когда $n \geq 3$.*

Доказательство. Пусть нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ нильпотентного кольца R удовлетворяет условию Дирака и $|R| = n$. Тогда в графе $\Gamma_N(R)$ ровно $n-1$ вершина. Возьмем произвольный ненулевой элемент a кольца R. Тогда $\rho(a) = n-2$. По условию $n-2 \geq \dfrac{n-1}{2}$, т.е. $n \geq 3$. Аналогично доказывается обратное утверждение. □

Предложение 2. *Пусть R — полупростое конечное кольцо. Нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ удовлетворяет условию Дирака в том и только в том случае, когда $R \cong GF(q) \oplus GF(q)$.*

Доказательство. Пусть нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ полупростого кольца R удовлетворяет условию Дирака. Поскольку $J(R) = (0)$, то $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_s$, где $R_i \cong M_{n_i}(GF(q_i))$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Если $n_1 = n_2 = \ldots = n_s = 1$, то в кольце R нет нильпотентных элементов. В этом случае нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ совпадает с графом делителей нуля $\Gamma(R)$. В работе [2] доказано, что если кольцо S без единицы и граф $\Gamma(S)$ удовлетворяет условию Дирака, то кольцо S нильпотентно. Значит, в нашем случае кольцо R с единицей. В работе [2] все конечные кольца с единицей, графы делителей нуля которых удовлетворяют условию Дирака, описаны. Из этого описания следует, что $R \cong GF(q) \oplus GF(q)$. Рассмотрим теперь случай, когда, например, $n_1 \geq 2$. По теореме Файна — Херстейна (см. [13]) число всех нильпотентных элементов кольца $M_{n_i}(GF(q_i))$ равно $q_i^{n_i^2 - n_i}$. Поэтому

$$\rho(1) = q_1^{n_1^2 - n_1} \cdot q_2^{n_2^2 - n_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s^2 - n_s} - 1 \geq \frac{|\Gamma_N(R)|}{2}.$$

Поскольку для любого ненулевого элемента $a \in R$ найдется такой ненулевой элемент $b \in R$, что элемент ab нильпотентный, то $|\Gamma_N(R)| = |R| - 1$. Далее, $|R| = q_1^{n_1^2} \cdot q_2^{n_2^2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s^2}$. Следовательно,

$$q_1^{n_1^2 - n_1} \cdot q_2^{n_2^2 - n_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s^2 - n_s} - 1 \geq \frac{q_1^{n_1^2} \cdot q_2^{n_2^2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s^2} - 1}{2},$$

или

$$2q_1^{n_1^2 - n_1} \cdot q_2^{n_2^2 - n_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s^2 - n_s} \geq q_1^{n_1^2} \cdot q_2^{n_2^2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s^2} + 1.$$

С другой стороны,

$$2q_1^{n_1^2 - n_1} \cdot q_2^{n_2^2 - n_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s^2 - n_s} = \frac{2}{q_1^{n_1} \cdot q_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s}} \cdot q_1^{n_1^2} \cdot q_2^{n_2^2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s^2} < q_1^{n_1^2} \cdot q_2^{n_2^2} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s^2};$$

противоречие с ранее полученным неравенством. Следовательно, $n_1 = n_2 = \ldots = n_s = 1$. Обратное утверждение следует из результатов работы [2]. □

В работе [9] доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть R — ненулевое конечное ненильпотентное кольцо, $|R| = p^{\alpha}$, p – простое число, и $J(R) \neq (0)$. Тогда $|N(R)| = p^{\beta}$, причем $1 \leq \beta \leq \alpha - 1$.*

Предложение 3. *Пусть R — ненулевое конечное ненильпотентное кольцо, $|R| = p^k$, где p — простое число, $R \neq J(R) \neq (0)$. Тогда граф $\Gamma_N(R)$ не удовлетворяет условию Дирака.*

Доказательство. Пусть кольцо R удовлетворяет условию предложению. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Кольцо R не содержит единицу.

Предположим, что граф $\Gamma_N(R)$ удовлетворяет условию Дирака. В кольце R существует идемпотент e, такой, что его образ $\overline{e}$ является единицей в фактор-кольце $R/J(R)$ [12]. В частности,

$$eR(1-e) \dotplus (1-e)Re \dotplus (1-e)R(1-e) \subseteq J(R).$$

Заметим, что каждый ненулевой элемент $x \in J(R)$ является вершиной графа $\Gamma_N(R)$, смежной со всеми остальными ненулевыми элементами кольца R. Следовательно, в графе $\Gamma_N(R)$ ровно $|R|-1$ вершин. Вычислим степень идемпотента e. Для этого рассмотрим пирсовское разложение кольца R:

$$R = eRe \dotplus eR(1-e) \dotplus (1-e)Re \dotplus (1-e)R(1-e).$$

Возьмем произвольный ненулевой элемент $x = exe + ex(1-e) + (1-e)xe + (1-e)x(1-e)$ из R. Заметим, что элемент ex является нильпотентным тогда и только тогда, когда элемент exe является нильпотентным. Значит,

$$\rho(e) = |N(eRe)| \cdot |eR(1-e)| \cdot |(1-e)Re| \cdot |(1-e)R(1-e)| - 1.$$

Обозначим $m = |eR(1-e)| \cdot |(1-e)Re| \cdot |(1-e)R(1-e)|$. Поскольку в кольце R не содержится единица, то $m \geq 2$. Пусть $|eRe| = p^k$. Тогда по лемме 1 имеем, что $|N(eRe)| = p^{\delta}$, причем $0 \leq \delta \leq k-1$. Следовательно, $\rho(e) = p^{\delta} \cdot m - 1 \geq \dfrac{|R|-1}{2}$. Значит, $p^{\delta} \cdot m - 1 \geq \dfrac{p^k \cdot m - 1}{2}$, или $2p^{\delta} \cdot m \geq p^k \cdot m + 1$, т. е. $0 \geq m \cdot p^{\delta}(p^{k-\delta} - 2) + 1$; противоречие. Следовательно, граф $\Gamma_N(R)$ не удовлетворяет условию Дирака.

Случай 2. Кольцо R содержит единицу.

Заметим, что число вершин в графе $\Gamma_N(R)$ равно $|R|-1$ (см. доказательство предложения 3). Если $\Gamma_N(R)$ удовлетворяет условию Дирака, то

$$\rho(1) = |N(R)| - 1 \geq \frac{|R|-1}{2},$$

т. е. $2 \cdot |N(R)| \geq |R| + 1$. По теореме Веддербарна — Артина

$$R/J(R) \cong M_{n_1}(GF(p^{k_1})) \oplus \ldots \oplus M_{n_s}(GF(p^{k_s})),$$

где $s \geq 1$, (см. [12]), и

$$|N(R)| = p^{k_1(n_1^2 - n_1)} \cdot \ldots \cdot p^{k_s(n_s^2 - n_s)} \cdot |J(R)|, \quad |R| = p^{k_1 n_1^2} \cdot \ldots \cdot p^{k_s n_s^2}.$$

Пусть $|J(R)| = p^{\gamma}$, где $\gamma \geq 1$. Следовательно,

$$2p^{k_1(n_1^2-n_1)+\ldots+k_s(n_s^2-n_s)+\gamma} \geq p^{k_1 n_1^2+\ldots+k_s n_s^2+\gamma} + 1,$$

или

$$0 \geq p^{k_1(n_1^2-n_1)+\ldots+k_s(n_s^2-n_s)+\gamma}\left(p^{k_1 n_1+\ldots+k_s n_s} - 2\right) + 1;$$

противоречие. Предложение доказано. □

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат.

Теорема. *Пусть R — конечное кольцо. Граф $\Gamma_N(R)$ удовлетворяет условию Дирака в том и только в том случае, когда выполняется одно из двух условий:*

(1) *R — нильпотентное кольцо порядка $n \geq 3$;*
(2) *$R \cong GF(q) \oplus GF(q)$.*

Доказательство. Пусть нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ конечного ассоциативного кольца R удовлетворяет условию Дирака. Если кольцо R нильпотентно, то по предложению 1 R удовлетворяет условию (1) теоремы. Предположим теперь, что кольцо R является ненильпотентным. Далее, если $|R| = p^k$, где p — простое число, $k \geq 1$, то из предложений 2–4 следует, что граф $\Gamma_N(R)$ кольца R удовлетворяет условию Дирака тогда и только тогда, когда $R \cong GF(q) \oplus GF(q)$.

Пусть теперь $|R| = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа, $s \geq 2$, причем $(0) \neq J(R) \neq R$. Тогда $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_s$, где $|R_i| = p_i^{a_i}$, R_i — двусторонний идеал кольца R, $i \leq s$. Поскольку $R \neq J(R)$, то существует $i_0 \leq s$, такое, что $R_{i_0} \neq J(R_{i_0})$. Полагая $A = R_{i_0}$ и $B = \oplus_{j \neq i_0} R_j$, можем записать $R = A \oplus B$, причем $|A| = p^a$ для некоторого простого числа p, $|B| = m$ и число m не делится на p, $m \geq 1$. Для завершения доказательства рассмотрим два случая.

Случай 1. Подкольцо A не содержит единицу.

В этом случае в кольце A существует идемпотент e, образ которого в факторкольце $A/J(A)$ является единицей [12]. Тогда в пирсовском разложении

$$A = eAe \dotplus eA(1-e) \dotplus (1-e)Ae \dotplus (1-e)A(1-e)$$

аддитивная подгруппа $eA(1-e) \dotplus (1-e)Ae \dotplus (1-e)A(1-e)$ является ненулевой и содержится в $J(A)$. Пусть ее порядок равен p^γ, где $\gamma \geq 1$. Подсчитаем степень элемента $(e,0)$. Пусть $x = (y,b) \in R$, где $y \in A, b \in B$, — это такой элемент, что $(e,0) \cdot x = (ey,0)$ является нильпотентным элементом кольца R. Запишем $y = eye + ey(1-e) + (1-e)ye + (1-e)y(1-e)$. Тогда $ey = eye + ey(1-e)$ является нильпотентным в том и только в том случае, если eye тоже является нильпотентным. Поэтому

$$\rho((e,0)) = |N(eAe)| \cdot |B| \cdot p^\gamma - 1 \geq \frac{p^a \cdot |B| - 1}{2},$$

или $2|N(eAe)| \cdot p^\gamma \cdot m \geq p^a \cdot m + 1$. По лемме 1 имеем, что $|N(eAe)| = p^\delta$ для некоторого числа $\delta \geq 1$, причем $\delta \leq a_1 - 1$, где $|eAe| = p^{a_1}$. Далее, получаем $|A| = p^{a_1} \cdot p^\gamma = p^{a_1+\gamma}$, т. е. $a = a_1 + \gamma$. Следовательно, $m \cdot (p^a - 2p^{\delta+\gamma}) + 1 \leq 0$, т. е. $p^a < 2p^{\delta+\gamma}$. С другой стороны,

$$p^a = p^{a_1+\gamma} = p^{a_1-1} \cdot p \cdot p^\gamma \geq p^\delta \cdot p \cdot p^\gamma = p \cdot p^{\delta+\gamma} \geq 2p^{\delta+\gamma}.$$

Противоречие показывает, что этот случай невозможен.

Случай 2. Подкольцо A содержит единицу.

Тогда степень элемента $(1,0)$ равна

$$\rho((1,0)) = |N(A)| \cdot |B| - 1 \geq \frac{|A| \cdot |B| - 1}{2},$$

или $2|N(A)| \cdot |B| \geq |A| \cdot |B| + 1$, т. е. $0 \geq |B| \cdot (|A| - 2|N(A)|) + 1$. По лемме 1 $|N(A)| = p^{\delta_1}$ для некоторого числа $\delta_1 \leq a-1$. Значит, $0 \geq |B| \cdot p^{\delta_1}(p^{a-\delta_1} - 2) + 1$;

противоречие. Следовательно, и этот случай невозможен. Теорема доказана. □

Пример. Заметим, что существует конечное кольцо, нильпотентный граф которого не удовлетворяет условию Дирака, но является гамильтоновым. Рассмотрим кольцо $R = M_2(GF(2))$. Тогда граф $\Gamma_N(R)$ не удовлетворяет условию Дирака (см. теорему выше). Однако в графе $\Gamma_N(R)$ есть гамильтонов цикл:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что граф делителей нуля ассоциативного конечного кольца является связным [14]. Позже в работе [15] доказано, что граф делителей нуля конечного альтернативного и конечного ассоциативного по нулю кольца является связным. (Напомним, что алгебра R (необязательно ассоциативная) называется *ассоциативной по нулю*, если для всех $a, b, c \in R$ равенство $(ab)c = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $a(bc) = 0$.) Нильпотентный граф любого конечного ассоциативного кольца является связным [4, теорема 2.3]. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть R — ненулевое конечное альтернативное кольцо. Тогда нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ является связным.*

Доказательство. Пусть кольцо R удовлетворяет условию предложения. Предположим, что нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ не является связным, т. е. в нем, как минимум, две не связных между собой компоненты. Заметим, что граф делителей нуля $\Gamma(R)$ является подграфом нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$. Поэтому, так как граф $\Gamma(R)$ связен [15] , одна из компонент нильпотентного графа $\Gamma_N(R)$ целиком содержит в качестве подграфа граф делителей нуля $\Gamma(R)$. Поскольку нильпотентный граф $\Gamma_N(R)$ не является связным, то найдется вершина x, которая входит в компоненту связности нильпотентного графа, не содержащую делителей нуля. Следовательно, элемент x не является делителем нуля кольца R. Однако по определению нильпотентного графа найдется ненулевой элемент $y \in R$, такой, что элемент xy является нильпотентным, т. е. $(xy)^n = 0$ для некоторого числа $n \geq 2$. Мы можем считать, что n — наименьшее натуральное число с таким свойством. Заметим также, что и элемент y не является делителем нуля, иначе вершина x будет смежной с вершиной подграфа $\Gamma(R)$, чего быть не может. В силу того, что кольцо R является альтернативным, получаем, что $x(yx)^{n-1}y = 0$. Значит, $(yx)^{n-1}y = 0$. А отсюда следует, что и $(yx)^{n-1} = 0$. Если $n = 2$, то x и y являются делителями нуля; противоречие. Если же $n \geq 3$, то, рассуждая аналогично, получим, что $(xy)^{n-2} = 0$. Противоречие доказывает теорему. □

Мы выражаем искреннюю признательность рецензенту за внимательное прочтение нашей статьи.

References

[1] A.S. Kuzmina, Yu.N. Maltsev, *Finite rings with some restrictions on zero-divisor graphs*, Izvestiya vyzov. Matematika, **12** (2014), 49–59. MR3408298

[2] A.S. Kuzmina, Yu.N. Maltsev, *On Finite Rings in Which Zero-Divisor Graphs Satisfy the Dirac's condition*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **36**:4 (2015), 375–383. MR3431197

[3] P. Chen, *A kind of graph structure of rings*, Alg. Colloquium, **10**:2 (2003), 229–238. MR1980442

[4] A. Li, Q. Li, *A kind of graph structure on non-reduced rings*, Alg. Colloquium, **17**:1 (2010), 173–180. MR2589755

[5] A. Li, Q. Li, *A kind of graph structure on von-Neumann regular rings*, Int. J. of Algebra, **4**:6 (2010), 291–302. MR2652245

[6] M.J. Nikmehr, S. Khojasteh, *On nilpotent graph of a ring*, Turkish J. of Math., **37**:4 (2013), 553–559. MR3070932

[7] A. Mahmoodi, *Nilpotent graphs of matrix algebras*, J. of Algebraic Structures and Their Appl., **1**:2 (2014), 123–132.

[8] A.S. Kuzmina, Yu.N. Maltsev, *Finite rings with regular nilpotent graphs*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 810–817. MR3493746

[9] A.S. Kuzmina, Yu.N. Maltsev, *Finite rings with Eulerian nilpotent graphs*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 274–279. MR3633261

[10] R. Diestel, *Graph theory*, Novosibirsk, 2002 (in Russian).

[11] F. Harary, *Graph Theory*, M.: Mir, 1973 (in Russian). MR0345856

[12] V.P. Elizarov, *Finite rings*, Moscow, Gelios–ARV, 2006 (in Russian).

[13] N.J. Fine, I.N. Herstein, *The probability that a matrix be nilpotent*, Illinois J. Math., **2** (1958), 499–504. MR0096677

[14] S.P. Redmond, *The Zero-Divisor Graph of a Noncommutative Ring*, Int. J. Commut. Rings **1**:4 (2002), 203–211.

[15] I.M. Isaev, A.S. Kuzmina, *On Connectivity of Zero-Divisor Graphs of Algebras*, Vestnik Altai State Pedagogical Academy. Natural sciences, **7** (2011), 7–10.

Yurii N. Maltsev, Anna S. Monastyreva
Altai State Pedagogical University,
55, Molodeghnaya st.,
Barnaul, Russia, 656031
E-mail address: `maltsevyn@gmail.com, akuzmina1@yandex.ru`