S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1380–1412 (2017) УДК 519.148

DOI 10.17377/semi.2017.14.119 MSC 52C15

О СВОЙСТВАХ МОЗАИЧНЫХ ПЯТИУГОЛЬНИКОВ С ПАРОЙ РАВНЫХ СМЕЖНЫХ СТОРОН

О.Г. БАГИНА

Abstract. It was obtained by O.G. Bagina the complete classification of convex mosaic pentagons, admitting normal (edge to edge) tilings, in 2011 - 2012. The classification includes 8 types of such pentagons. In the proof of the completeness of this list the following fact was used. If a convex pentagon tiles the plane normally, belongs only the first type of the list and has only a pair of equal adjacent edges, that is, the angles and edges of this pentagon satisfy the relations $C_0 = C_1, x_2 + x_3 = 180^o$, then it angles satisfy also the relation $x_0+2x_1 = 360^o$. But this statement has not been proven. This paper fills this gap.

Keywords: convex pentagon, mosaic pentagon, tiling the plane, normal tiling.

1. Введение

Совокупность замкнутых ограниченных фигур $T = \{P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots\}$ называется замощением плоскости, если фигуры расположены на плоскости так, что они не имеют общих внутренних точек, и их объединение есть вся плоскость. Плоскость, выложенную фигурами, называют мозаикой, а фигуры замощения называют плитками. Рассмотрим задачу замощения плоскости конгруэнтными выпуклыми пятиугольниками.

Определение 1. *Будем называть пятиугольник мозаичным, если существует замощение евклидовой плоскости пятиугольниками, конгруэнтными данному, такое, что никакие два пятиугольника не имеют общих внутренних точек.*

Bagina, O.G., The properties of mosaic pentagons with a pair of equal adjacent edges.

Поступила 9 декабря 2016 г., опубликована 8 декабря 2017 г.

Было найдено 14 типов мозаичных пятиугольников [1], [3], [4]. Но до сих пор нет доказательства полноты имеющегося перечня.

Определение 2. *Мозаика называется нормальной, если пересечение любых двух смежных ее плиток является ребром или вершиной каждой из них.*

Некоторые мозаичные пятиугольники из известного списка не допускают нормальных мозаик, но есть мозаичные пятиугольники, замощающие плоскость нормально.

Пусть $\mathbf{P}$ — произвольная нормальная мозаика из пятиугольников, конгруэнтных пятиугольнику P. Тем же символом P будем обозначать какую-нибудь плитку мозаики. Пусть X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 — последовательные вершины пятиугольника P , его углы — соответственно x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Длины сторон пятиугольника $C_i = |X_{i-1}X_i|$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, индексы в последнем равенстве берутся по модулю 5.

В работах [1], [2] рассматривалась задача нахождения выпуклых мозаичных пятиугольников, допускающих нормальные мозаики, и в результате были найдены все такие пятиугольники. Основной результат работ содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Выпуклый пятиугольник тогда и только тогда замощает плоскость нормально, когда он относится к одному из следующих типов:*

1a. $x_0 + x_1 = 180°, C_0 = C_2$;
1b. $x_0 + x_1 = 180°$, $C_3 = C_4$;
2. $x_0 + x_2 = 180°, C_1 = C_3, C_0 = C_2$;
3. $x_0 = x_2 = 90°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
4. $x_2 = 2x_0 = 120°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
5. $x_1 + x_3 = 180°, x_0 = 2x_3, C_0 = C_1 = C_2, C_3 = C_4$;
6. $x_0 + 2x_3 = 360°, x_2 + 2x_1 = 360°; C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
7. $x_1 + 2x_0 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
8. $x_1 + 2x_4 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$.

Обозначим T_i — множество пятиугольников, углы и стороны которых удовлетворяют соотношениям, перечисленным в i-м пункте теоремы 1, $i = 2, \dots, 8$. Если углы и стороны пятиугольника нормальной мозаики удовлетворяют соотношениям $x_0 + x_1 = 180°$, $C_0 = C_2$ пункта 1a теоремы 1 с точностью до перенумерации вершин, то будем говорить, что он относится к типу 1a и T_{1a} — множество таких пятиугольников. Если углы и стороны пятиугольника удовлетворяют соотношениям $x_0 + x_1 = 180°$, $C_3 = C_4$ пункта 1b теоремы 1 с точностью до перенумерации вершин, то он относится к типу 1b и T_{1b} — множество таких пятиугольников.

Однако, в теореме 1 было опущено следующее условие. Если пятиугольник относится к типу 1b, то, для того, чтобы он замощал плоскость нормально, необходимо, чтобы его углы удовлетворяли так же соотношению $x_3 + 2x_2 = 360°$. То есть мозаичные пятиугольники типа 1b удовлетворяют соотношениям $x_0 + x_1 = 180°, x_3 + 2x_2 = 360°, C_3 = C_4$.

Таким образом, в пункт 1b теоремы 1 необходимо добавить соотношение $x_3 + 2x_2 = 360°$. Мозаика из таких пятиугольников приведена на рисунке 1.

Достаточность пунктов 1 — 8 теоремы 1 доказывается построением нормальных мозаик из пятиугольников соответсвующего типа. При доказательстве необходимости пунктов 1 — 8 теоремы 1 мы брали произвольную нормальную

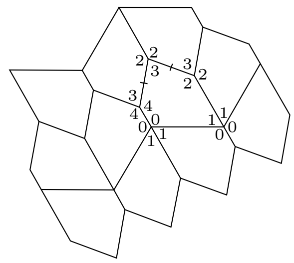

Рис. 1. Мозаика из пятиугольников типа $1b$.

мозаику из выпуклых пятиугольников и приходили к выводу, что пятиугольник этой мозаики относится хотя бы к одному из перечисленных восьми типов. При этом мы использовали тот факт, что, если пятиугольник замощает плоскость нормально и относится только к типу $1b$, то углы этого пятиугольника удовлетворяют соотношению $x_3 + 2x_2 = 360°$. Но данное утверждение не было доказано.

Настоящая работа восполняет этот пробел, то есть целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть пятиугольник P замощает плоскость нормально. Если $P \notin T_{1a}$ и в этом пятиугольнике $C_0 = C_1$, $x_2 + x_3 = 180°$, то либо $x_0 + 2x_1 = 360°$, либо $P \in T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_7 \cup T_8$.*

В этой теореме мы выбрали нумерацию вершин несколько по другому.

Определение 3. *Назовем пятиугольник P мозаики, удовлетворяющий, условию теоремы 2, типовым.*

Таким образом, углы и стороны типового пятиугольника с точностью до перенумерации вершин удовлетворяют соотношениям: $C_0 = C_1$, $x_2 + x_3 = 180°$ и $C_2 \neq C_4$.

В доказательстве теоремы 2 используются аналогичные методы и алгоритмы, как и в доказательстве теоремы 1.

2. Определения и обозначения

Чтобы изложение было полным, приведем основные понятия и формулы из работ [1, п. 3], [2, п. 1, п. 2].

Будем обозначать вершины пятиугольника либо символом X_i, либо просто символом i, $i = 0, \ldots, 4$. А стороны пятиугольника обозначим либо X_iX_j, либо ij, либо просто i, где $i = 0, \ldots, 4$, $j = i + 1$ и все индексы берутся по модулю 5.

Обозначим $\delta(i)$ — тип i-й стороны пятиугольника P, $i = 0, \ldots, 4$. При этом стороны i, j пятиугольника P одинакового типа, то есть $\delta(i) = \delta(j)$, если их длины равны.

Определение 4. *Назовем последовательность $\delta(P) = \delta(0)\delta(1)\delta(2)\delta(3)\delta(4)$ из пяти цифр δ-типом пятиугольника P. Каждая цифра $\delta(i), i = 0, \ldots, 4$ последовательности $\delta(P)$ принимает значение от 1 до 5 и является типом i-й стороны пятиугольника P.*

Учитывая, что нумерацию можно начинать с любой вершины и менять направление нумерации, имеется ровно 12 различных δ-типов: 12345, 11234, 11232, 12134, 12123, 11213, 11212, 11223, 11123, 11122, 11112, 11111.

Определение 5. *Степенью вершины плитки P называется число сходящихся в ней пятиугольников. Степень любой вершины не может быть меньше трех. Пусть $(\alpha_0, \ldots, \alpha_4)$ — строка, в которой $\alpha_0 \leq \ldots \leq \alpha_4$ и каждое из чисел является степенью одной из вершин P. Такие строки будем называть набором степеней. Далее степень i-ой вершины пятиугольника P будем обозначать символом v_i.*

Доказательство теоремы 1 основывается на следующей теореме [1, п. 2, предложение 1].

Теорема 3. *В любой нормальной пятиугольной мозаике найдется хотя бы один пятиугольник, для которого набор степеней вершин один из следующих: $(3,3,3,3,3)$, $(3,3,3,3,4)$, $(3,3,3,3,5)$, $(3,3,3,3,6)$, $(3,3,3,4,4)$.*

Определение 6. *Пятиугольник мозаики, удовлетворяющий заключению теоремы 3, будем называть центральным.*

Определение 7. *Некоторое множество плиток, конгруэнтных P, называется короной для плитки P, если выполняются условия:*
1) плитки этого множества замощают часть V плоскости;
2) плитка P содержится внутри V;
3) это множество минимально с условиями 1 и 2.

Для того, чтобы существовала мозаика, отвечающая заданному выпуклому пятиугольнику, очевидно необходимо, чтобы существовала корона для каждой плитки мозаики.

Пусть $i_1 i_2 \ldots i_k$ сочетание с повторениями на пяти символах: 0, 1, 2, 3, 4. Пусть на плоскости существует такое расположение пятиугольников $P_1, P_2, \ldots, P_k$, конгруэнтных P, для которого выполняются три условия (рис. 2):

а) некоторая точка O плоскости является общей вершиной углов i_1, i_2, …, i_k пятиугольников $P_1, P_2, \ldots, P_k$, соответственно;

б) каждая другая точка некоторой достаточно малой окрестности O, не лежащая на сторонах пятиугольников, попадает внутрь ровно одного пятиугольника из списка;

в) каждая точка, лежащая на стороне, выходящей из O, одного из пятиугольников принадлежит ровно двум пятиугольникам из нашего списка, то есть стороны смежных пятиугольников равны.

Другими словами, конечная последовательность плиток $P_1, P_2, \ldots, P_k$, конгруэнтных P, образует "цикл" вокруг точки O, являющейся вершиной каждой из плиток.

Пятиугольники $P_1, P_2, \ldots, P_k$ замощают часть плоскости, для которой точка O является внутренней. В этом случае выполняется равенство $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k} = 360^\circ$.

Определение 8. *Будем называть сочетание $i_1 i_2 \ldots i_k$ меткой P, если для него выполняются условия (а)-(в).*

Множество всех меток P будем обозначать символом $\mathcal{M}(P)$ или даже $\mathcal{M}$, если из контекста ясно, о каком P идет речь. Элементы меток будем называть символами. Число символов метки называется ее длиной. Термин длина будем употреблять также для произвольных сочетаний. Длина метки не может быть меньше 3. Далее, если $i-$ один из символов метки v, то будем говорить, что v соответствует (отвечает, принадлежит и т.д) вершине i; или в вершине i имеет место метка v; или v — метка для вершины i и т.д.

Определение 9. *Метки v, w, отвечающие смежным вершинам i, j пятиугольника P, соответственно (рис. 3), будем называть согласованными, если выполняются условия:*
1) $v = ik\ldots$, $w = jl\ldots$;
2) k, l — смежные вершины пятиугольника P_1;
3) стороны X_iX_j, X_kX_l пятиугольников P, P_1, соответственно, одинаковой длины.

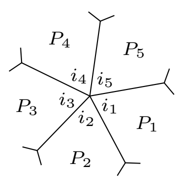

Рис. 2

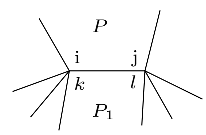

Рис. 3

При доказательстве теоремы 2 нам достаточно рассмотреть следующие δ-типы: 11234, 11213, 11223, 11123, 11122, 11112, так как нам необходимо исключить равенство двух каких-нибудь несмежных сторон. Для каждого δ-типа будем брать центральную плитку нормальной мозаики, при этом она должна удовлетворять условию теоремы 2, то есть быть типовой. Затем будем строить все возможные короны для этой плитки.

Составим таблицу 1 для пятиугольников $P \notin \{T_{1a} \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_7 \cup T_8\}$, включающую в себя соотношения на стороны и углы типового пятиугольника, удовлетворяющие условию и заключению теоремы 2. Во втором столбце таблицы указывается δ-тип пятиугольника, в третьем и четвертом столбцах указываются равенство двух смежных сторон для этого типа и соотношение на смежные углы вида $x_i + x_{i+1} = 180^\circ$, удовлетворяющие условию теоремы 2. В пятом столбце указываются соотношения, которые должны выполняться, согласно заключению теоремы 2, при этом достаточно выполнения одного из указанных соотношений, так как второе соотношение является следствием первого соотношения и соотношения из четвертого столбца.

Настоящая работа содержит пять глав. Первая и вторая глава включает в себя основные определения и формулировки теорем. Глава 3 включает в себя исследования пятиугольников δ-типов 11234, 11213, 11223, 11123. Главы 4 и 5 посвящены δ-типам 11122 и 11112, соответственно.

3. Пятиугольники δ-типов 11234, 11213, 11223, 11123

В главе рассматриваются четыре леммы, каждая лемма посвящена исследованию одного из перечисленных в заголовке δ-типов пятиугольников. Обсуждаемые утверждения не зависят от способа нумерации вершин пятиугольника.

№	Тип	Равенство сторон	Условие теоремы	Заключение теоремы
1	**11234**	$C_0 = C_1$	$x_2 + x_3 = 180°$	$x_0 + 2x_1 = 360°$, $x_0 + 2x_4 = 360°$
2	**11213**	$C_0 = C_1$	$x_2 + x_3 = 180°$	$x_0 + 2x_1 = 360°$, $x_0 + 2x_4 = 360°$
3	**11223**	$C_0 = C_1$	$x_2 + x_3 = 180°$	$x_0 + 2x_1 = 360°$, $x_0 + 2x_4 = 360°$
		$C_2 = C_3$	$x_0 + x_4 = 180°$	$x_2 + 2x_3 = 360°$, $x_2 + 2x_1 = 360°$
4	**11123**	$C_0 = C_1$	$x_2 + x_3 = 180°$	$x_0 + 2x_1 = 360°$, $x_0 + 2x_4 = 360°$
		$C_1 = C_2$	$x_3 + x_4 = 180°$	$x_1 + 2x_2 = 360°$, $x_1 + 2x_0 = 360°$
5	**11122**	$C_0 = C_1$	$x_2 + x_3 = 180°$	$x_0 + 2x_1 = 360°$, $x_0 + 2x_4 = 360°$
		$C_1 = C_2$	$x_3 + x_4 = 180°$	$x_1 + 2x_2 = 360°$, $x_1 + 2x_0 = 360°$
6	**11112**	$C_0 = C_1$	$x_2 + x_3 = 180°$	$x_0 + 2x_1 = 360°$, $x_0 + 2x_4 = 360°$
		$C_2 = C_3$	$x_0 + x_4 = 180°$	$x_2 + 2x_3 = 360°$, $x_2 + 2x_1 = 360°$

Таблица 1

Лемма 1. *Если P — центральная, типовая плитка мозаики, и $\delta(P) = 11234$, то $x_0 + 2x_1 = 360°$.*

Доказательство. Так как P — типовая плитка, то согласно первой строки таблицы 1, считаем, что $C_0 = C_1$, $x_2 + x_3 = 180°$. Необходимо доказать, что $x_0 + 2x_1 = 360°$, $x_0 + 2x_4 = 360°$. Достаточно рассмотреть три случая: $v_2 = 3$, $v_3 = 3$, $v_2 = v_3 = 4$.

Замечаем, что в $\mathcal{M}(P)$ не существует меток длины три, отвечающих вершинам 2 и 3. Следовательно равенства $v_2 = 3$ или $v_3 = 3$ невозможны.

Пусть $v_2 = v_3 = 4$. Тогда $v_1 = v_4 = 3$ (рис. 4, 5). Пусть плитка P_1 приложена к стороне 2 плитки P, а плитка P_2 приложена к стороне 4 плитки P, рис. 4. Если плитки P и P_1 или P и P_2 имеют одинаковые ориентации, то плитка P_3 или P_4 имеют смежные стороны типов 1 и 3, что не так.

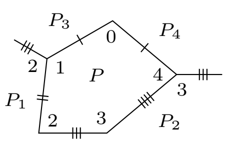

Рис. 4

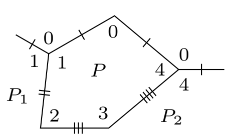

Рис. 5

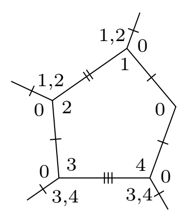

Рис. 6

Следовательно P, P_1 и P, P_2 имеют противоположные ориентации, рис. 5. Тогда $110, 440 \in \mathcal{M}(P) \Rightarrow x_0 + 2x_1 = 360°$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если P — центральная, типовая плитка мозаики и $\delta(P) = 11213$, то $x_0 + 2x_1 = 360°$*

Доказательство. Так как P — типовая плитка, то согласно второй строки таблицы 1, считаем, что $C_0 = C_1$, $x_2 + x_3 = 180°$. Необходимо доказать, что $x_0 + 2x_1 = 360°$, $x_0 + 2x_4 = 360°$.

Заметим, что если $v_i = 3$, $i = 1, 2, 3, 4$, то i-й вершине может отвечать ровно две метки. Одна из которых 012 или 034, а другая $ii0$, рис. 6. Если $012 \in \mathcal{M}(P)$

или $034 \in \mathcal{M}(P)$, то $P \in T_{1a}$, противоречие. Будем считать поэтому, что если $v_i = 3$, то вершине i отвечает метка $ii0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Из рис. 6 можно усмотреть также, что из двух вершин 2, 3 по крайней мере одна должна иметь степень выше третьей. Можно считать, что $v_2 \geq 4$, иначе перенумеруем вершины по правилу $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 3$. Поскольку из трех вершин 1,3,4 по крайней две имеют степень 3, то достаточно рассмотреть 3 случая:

1) $v_3 = v_4 = 3$. Тогда $\{330, 440\} \subset \mathcal{M} \Rightarrow x_0 + 2x_4 = 360°$.

2) $v_1 = v_4 = 3$. Тогда $\{110, 440\} \subset \mathcal{M} \Rightarrow x_0 + 2x_1 = 360°$.

3) $v_1 = v_3 = 3$. Тогда $\{110, 330\} \subset \mathcal{M} \Rightarrow x_0 + 2x_1 = 360°$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если P — центральная, типовая плитка мозаики и $\delta(P) = 11223$, то $P \in T_3 \cup T_4$, либо $x_0 + 2x_1 = 360°$, либо $x_2 + 2x_1 = 360°$.*

Доказательство. Так как P — типовая плитка, то согласно третьей строки таблицы 1, считаем, что $C_0 = C_1$, $x_2 + x_3 = 180°$ или $C_2 = C_3$, $x_0 + x_4 = 180°$. Если пятиугольник удовлетворяет первой паре соотношений, будем называть его 1-типовым, если пятиугольник удовлетворяет второй паре соотношений, будем называть его 2-типовым. Необходимо доказать, что, если $P \notin T_3 \cup T_4$, то $x_0 + 2x_1 = 360°$, $x_0 + 2x_4 = 360°$ для 1-типового пятиугольника, $x_2 + 2x_3 = 360°$, $x_2 + 2x_1 = 360°$ для 2-типового пятиугольника.

Заметим, что $x_0 + 2x_1 + x_2 > 360°$ или равносильно $x_3 + x_4 < x_1 + 180°$. Учитывая возможность перенумерации $(1 \leftrightarrow 3, 0 \leftrightarrow 4)$, достаточно рассмотреть четыре случая: $v_3 = v_4 = 3$, $v_0 = v_4 = 3$, $v_3 = v_4 = 4$, $v_0 = v_3 = 4$.

Пусть плитка P_1 приложена к стороне 34 плитки P. Рассмотрим вначале случай, когда плитки P и P_1 ориентированы противоположно.

1) $v_3 = v_4 = 3$, рис. 7. Тогда вершине 3 отвечает метка 332, а вершине 4 — метка 440. Для 1-типового пятиугольника из полученных соотношений имеем $x_1 = x_4 \Rightarrow x_0 + 2x_1 = 360°$; для 2-типового пятиугольника $x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 + 2x_1 = 360°$.

2) $v_0 = v_4 = 3$, рис. 8. Тогда вершине 4 отвечает метка 440 и $\delta(a) = 2$ или $\delta(a) = 3$. Для 1-типового пятиугольника из полученных соотношений имеем $x_1 = x_4 \Rightarrow x_0 + 2x_1 = 360°$; для 2-типового пятиугольника $x_4 = 180°$, противоречие.

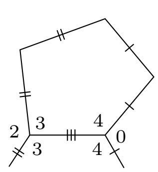

Рис. 7

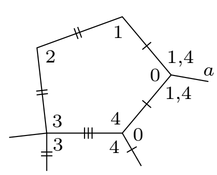

Рис. 8

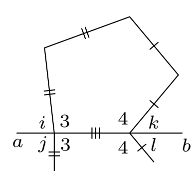

Рис. 9

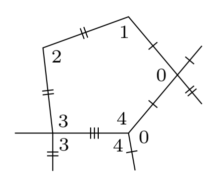

Рис. 10

3) $v_3 = v_4 = 4$, рис. 9. Пусть a и b — ребра, указанные на рисунке.

Если $\delta(a) = 2$, то $i = j = 2$. Тогда $x_2 + x_3 = 180°$. В вершине 4 возможны метки 4400, 4411, 4444. В первом случае $x_1 = 180°$, во втором $x_0 = 180°$, противоречие. Пусть 4444. В вершине 0 возможна метка 000. Откуда следует $x_0 = 120°$, $x_1 = 150°$. В вершине 1 возможна только метка 112, тогда $x_2 = 60° \Rightarrow P \in T_4$.

Если $\delta(a) = 1$, $\delta(b) = 2$ то $i = j = k = l = 1$. Следовательно, $x_1 + x_3 = x_1 + x_4 = 180°$. Кроме того, вершине 0 отвечает метка 000, а вершине 2 —

метка 222, т.е. $x_0 = x_2 = 120°$. Из этих соотношений получаем $x_0 = x_2 = x_3 = x_4 = 120°, x_1 = 60°$. Последнее противоречит неравенству, приведенному в самом начале доказательства леммы.

Если $\delta(a) = 1$, $\delta(b) = 3$ то $i = j = 1$, $k = l = 4$. Следовательно, $x_1 + x_3 = 180°$, $x_4 = 90°$. Кроме того, по-прежнему $x_0 = x_2 = 120°$. Тогда сумма всех пяти углов равна $510°$, противоречие.

К такому же противоречию приводит предположение $\delta(a) = 3$, $\delta(b) = 2$.

Пусть, наконец, $\delta(a) = \delta(b) = 3$. Тогда $x_3 = x_4 = 90°$, кроме того $x_0 = x_2 = 120°$. Отсюда следует, что длины сторон первого и второго типов одинаковы, что невозможно. Этим случай 3 разобран полностью.

4) $v_0 = v_3 = 4$, рис. 10. Тогда 440 — метка, отвечающая вершине 4. Если P — 1-типовая, то $x_0 + 2x_4 = 360°$; если P — 2-типовая, то $x_4 = 180°$, противоречие.

Пусть плитки P и P_1 ориентированы одинаково. Соображения, связанные с "симметрией" позволяют ограничиться случаями: $v_4 = 3$, $v_3 = v_4 = 4$.

1) $v_4 = 3$. Тогда 134 — метка вершины 4. Стало быть $x_0 + x_2 = 180°$.

Если теперь $v_0 = 3$, рис. 11, то $x_0 = 120°$, $x_2 = 60°$, $P \in T_4$.

Пусть $v_0 = 4$, a — ребро, указанное на рис. 12. Если $\delta(a) = 1$, то 0000 — метка, тогда $x_0 = 90°$, $P \in T_3$.

Если $\delta(a) = 3$, то $x_0 + x_4 = 180°$, рис. 12. Пусть $v_1 = 3$, $v_2 = 3$. В вершине 1 метка 011, в вершине 2 — 222. Получаем $x_2 = 120°$, $x_0 = 60°$, $P \in T_4$. Пусть $v_2 = 4$, в вершине 2 метка 2222, тогда $x_0 = x_2 = x_4 = 90°$, $x_1 = 135° \Rightarrow x_2 + 2x_1 = 360°$. Пусть $v_3 = 3$, $v_2 = 3$. В вершине 2 метка 222, получаем $P \in T_4$.

Если $\delta(a) = 2$, рис. 13, то метка вершины 0 — 0011. Тогда $v_1 = 4$, иначе меткой вершины 1 будет 110, что невозможно. Так как $\delta(b) \neq 3$, иначе 0134 — метка, то $\delta(b) = 2$ или $\delta(b) = 1$. Если $\delta(b) = 2$, то 0112 — метка, что противоречит неравенству из начала доказательства леммы. Если $\delta(b) = 1$, то 0011 — метка вершины 1. Тогда 222 — метка вершины 2. Последнее означает, что $x_2 = 120°$, $x_0 = 60°$, $P \in T_4$. Тем самым случай, когда $v_4 = 3$ рассмотрен полностью.

2) $v_3 = v_4 = 4$. Пусть a — ребро, указанное на рис. 14. Отметим, что $\delta(a) \neq 1, 2$, иначе 0134 или 1234 — метки, что невозможно.

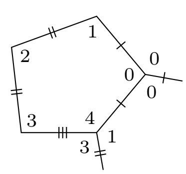

Рис. 11

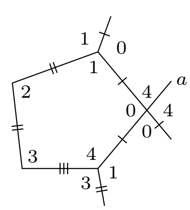

Рис. 12

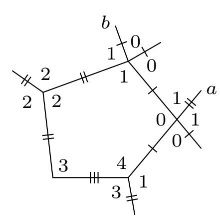

Рис. 13

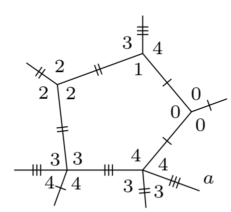

Рис. 14

Пусть $\delta(a) = 3$. Тогда 3344 — метка, т.е. $x_3 + x_4 = 180°$. Далее, 000 — метка вершины 0, следовательно $x_0 = 120°$.

Точно также замечаем, что меткой вершины 3 может быть тоже лишь 3344. Тогда вершине 2 отвечает метка 222. Поскольку $v_1 = 3$, то 134 — единственная метка, отвечающая вершине 1, согласованная с метками вершин 0 и 2. Однако наличие такой метки ведет к противоречивому равенству: $x_1 = 0°$. Этим случай 2 разобран полностью и лемма доказана.

Лемма 4. *Если P — центральная, типовая плитка мозаики и $\delta(P) = 11123$, то $x_0 + 2x_1 = 360°$ либо $x_1 + 2x_0 = 360°$.*

Доказательство. Так как P — типовая плитка, то согласно четвертой строки таблицы 1, считаем, что $C_0 = C_1$, $x_2 + x_3 = 180°$ или $C_1 = C_2$, $x_3 + x_4 = 180°$. Если пятиугольник удовлетворяет первой паре соотношений, будем называть его 1-типовым, если пятиугольник удовлетворяет второй паре соотношений, будем называть его 2-типовым. Необходимо доказать, что $x_0 + 2x_1 = 360°$, $x_0 + 2x_4 = 360°$ для 1-типового пятиугольника, $x_1 + 2x_2 = 360°$, $x_1 + 2x_0 = 360°$ для 2-типового пятиугольника.

Пусть $x_3 = 90°$. Тогда, так как P — типовая, то $x_2 = 90°$ или $x_4 = 90°$. Тогда не может быть $\{22i, 44j\} \subset \mathcal{M}(P)$, $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$.

Пусть плитка P_1 приложена к стороне 34 плитки P. Сначала разберем случай, когда P и P_1 ориентированы одинаково.

Если $v_3 = 3$, то вершине 3 отвечает метка 234. Значит $P \in T_{1a}$, противоречие. То же самое верно и в случае, если $v_4 = 3$. Если $v_3 = 4$, то вершине 3 отвечает единственная метка длины 4: 3344. Следовательно $x_3 + x_4 = 180°$. В вершине 2 возможны метки 122 и 022. В первом случае получаем $x_0 = x_2 \Rightarrow x_1 + 2x_0 = 360°$. Во втором случае $x_1 = x_2$. В вершине 0 возможны метки $001, 000, 111$. Во всех случаях $x_0 = x_1 = x_2 = 120° \Rightarrow x_1 + 2x_0 = 360°$.

Поскольку из двух вершин центральной плитки по крайней мере одна имеет степень 3 или 4, то этим случай, когда плитка P_1 ориентирована одинаково с P, исчерпан.

Пусть P и P_1 имеют разные ориентации, рис. 15. Точно также можно считать, что плитка P_2, приложенная к стороне 3 плитки P, ориентирована с P тоже противоположно.

Ясно, что $v_3 \geq 4$. Учитывая возможность перенумерации по правилу $0 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow 4$, достаточно рассмотреть случаи: 1) $v_3 = v_4 = 4$; 2) $v_0 = v_3 = 4$; 3) $v_3 \geq 4$ и остальные вершины имеют степень 3.

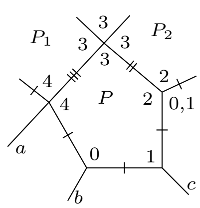

Рис. 15

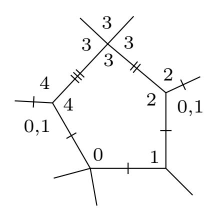

Рис. 16

1) Пусть $v_3 = v_4 = 4$. Тогда $x_3 = 90°$. Все используемые обозначения на рис. 15. Вершине 2 отвечают две метки: 220, 221. Значит $x_2 \neq 90°$, а $x_4 = 90°$. Если 221 — метка, то $x_0 = x_2 \Rightarrow x_1 + 2x_0 = 360°$. Пусть 220 метка в вершине 2. В вершине 1 возможна только метка 011. В вершине 0 возможны метки 011 и 001. Во втором случае имеем $x_1 + 2x_0 = 360°$.

Пусть 011 метки в вершинах 0 и 1. Вершине 4 отвечают метки 2244 и 0044. В первом случае $x_2 = 90°$, противоречие. Во втором случае $x_0 = x_3 = x_4 = 90°$, $x_1 = x_2 = 135°$.

Для такого пятиугольника есть две короны, соответствующие набору меток (011, 011, 022, 3333, 0044), рис. 17. Короны различаются между собой только расположением плитки P_1. На рисунке указана корона, у которой плитки

P и P_1 ориентированы противоположно, во второй короне эти плитки ориентированы одинаково. Полученные короны не могут быть продолжены до мозаики. Препятствием для продолжения замощения плоскости служит вершина, обведенная на рисунке кружочком. В указанной вершине возможны метки вида $14i_1 \dots i_k$, $k = 1, 2 \dots$. Тогда $x_1 + x_4 + x_{i_1} + \dots + x_{i_k} = 360^\circ$ $\Rightarrow x_{i_1} + \dots + x_{i_k} = 360^\circ - 225^\circ = 135^\circ$. Следовательно, дополнительно в этой вершине может сходиться только угол x_1 или x_2, но тогда не будет выполняться равенство соответствующих сторон.

Этим полностью разобран случай 1.

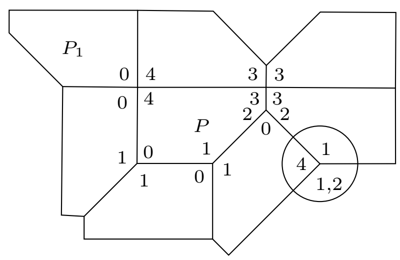

Рис. 17. Корона (011, 011, 022, 3333, 0044)

2) $v_0 = v_3 = 4$. По-прежнему $x_3 = 90^\circ$, рис. 16. Так как вершине 2 отвечают метки 220, 221. Вершине 4 теперь тоже отвечают метки 440, 441. Поэтому $x_2 \neq 90^\circ$, $x_4 \neq 90^\circ$, что противоречит условию типовой плитки.

3) $v_3 \geq 4$ и остальные вершины имеют степень 3. Из двух ребер a и b (рис. 18) одно обязательно имеет первый тип. Можно считать, что это ребро a. Иначе перейдем к симметричному варианту за счет перенумерации вершин $0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$. Мы уже видели, что вершине 2 отвечает одна из двух меток 220, 221, а вершине 4 — 440, 441. Если выполняется одно из включений: $(221, 440) \in \mathcal{M}$, $(220, 440) \in \mathcal{M}$, $(221, 441) \in \mathcal{M}$, то из условия, что P — типовая, следует $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$ либо $x_1 + 2x_0 = 360^\circ$.

Пусть $(220, 441) \in \mathcal{M}$. Рассмотрим метки вершины 3. Случай $v_3 = 4$ рассматривался ранее. Если $v_3 = 5$ (рис. 19), то $\delta(c) = 1$ и тогда 24333 — метка вершины 3.

Для 1-типовой плитки с учетом всех полученных соотношений на углы получаем $x_3 = 45^\circ, x_4 = 90^\circ \Rightarrow x_1 = 180^\circ$; для 2-типовой плитки $x_3 = 45^\circ, x_2 = 90^\circ \Rightarrow x_0 = 180^\circ$, противоречие.

Пусть $v_3 = 6$. Рассмотрим все возможные варианты значений $\delta(c)$, $\delta(d)$, имея ввиду, что $\delta(c) \neq 3$, $\delta(d) \neq 2$ (рис. 20).

Пусть $\delta(c) = 1$, $\delta(d) = 1$. Тогда вершине 3 отвечает одна из двух меток: 024333, 124333. Для первой метки $3x_3 + x_2 + x_0 + x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_1 = 180^\circ + 2x_3 > 180^\circ$. Для второй метки $3x_3 + x_2 + x_1 + x_4 = 360^\circ \Rightarrow x_0 = 180^\circ + 2x_3 > 180^\circ$. В обоих случаях получаются противоречивые неравенства.

Пусть $\delta(c) = 1$, $\delta(d) = 3$. Тогда вершине 3 отвечает метка 333344. Для 1-типовой плитки $x_4 = 90^\circ, x_1 = 180^\circ$; для 2-типовой плитки $x_3 = 0^\circ$, противоречие.

Пусть $\delta(c) = 2$, $\delta(d) = 1$. Тогда вершине 3 отвечает метка 223333. Для 1-типовой плитки $x_3 = 0^\circ$; для 2-типовой плитки $x_2 = 90^\circ, x_0 = 180^\circ$, противоречие.

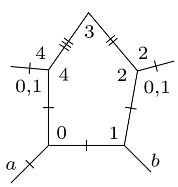

Рис. 18

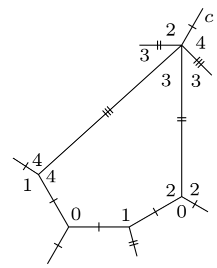

Рис. 19

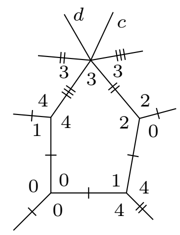

Рис. 20

Пусть $\delta(c) = 2$, $\delta(d) = 3$. Тогда вершине 3 отвечает метка 333333. Следовательно $x_3 = 60^\circ$. Так как P — типовая, $x_2 = x_0 = x_4 = x_1 = 120^\circ \Rightarrow x_0 + 2x_1 = 360^\circ, x_1 + 2x_0 = 360^\circ$. Этим полностью исследован случай 3. Лемма доказана.

4. Пятиугольники δ-типа 11122

4.1. В этой главе будет исследован случай, когда длины трех идущих подряд сторон одинаковы и одинаковы длины оставшихся двух сторон, то есть δ-тип 11122.

Обсуждаемые утверждения не зависят от способа нумерации вершин пятиугольника. Всюду здесь мы придерживаемся нумерации, при которой первые три стороны имеют равные длины и две оставшиеся стороны имеют равные длины. Для заданного пятиугольника таких нумераций имеется две. Одна из другой получается заменой $0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$. Такую замену мы называем симметрией, а обе нумерации вершин — допустимыми. Одна из двух допустимых нумераций выбирается случайно.

Более подробно опишем некоторые из множеств T_i для данного δ-типа:

$T_{1a} = \{P | x_0 + x_1 = 180^\circ\}$,

$T_3 = \{P | x_1 = x_3 = 90^\circ\} \cup \{P | x_0 = x_3 = 90^\circ\}$,

$T_4 = \{P | x_1 = 2x_3 = 120^\circ\} \cup \{P | x_3 = 2x_1 = 120^\circ\} \cup \{P | x_0 = 2x_3 = 120^\circ\} \cup \{P | x_3 = 2x_0 = 120^\circ\}$,

$T_5 = \{P | x_1 + x_3 = 180^\circ, x_0 = 2x_3\} \cup \{P | x_0 + x_3 = 180^\circ, x_1 = 2x_3\}$.

Наша цель — доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Если P — центральная, типовая плитка, и $\delta(P) = 11122$, то $P \in T_3 \cup T_4 \cup T_5$, либо $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$, либо $x_1 + 2x_0 = 360^\circ$.*

Так как P — типовая плитка, то согласно пятой строки таблицы 1, считаем, что $C_0 = C_1$, $x_2 + x_3 = 180^\circ$ или $C_1 = C_2$, $x_3 + x_4 = 180^\circ$. Если пятиугольник удовлетворяет первой паре соотношений, будем называть его 1-типовым, если пятиугольник удовлетворяет второй паре соотношений, будем называть его 2-типовым. Необходимо доказать, что, если $P \notin T_3 \cup T_4 \cup T_5$, то $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$, $x_0 + 2x_4 = 360^\circ$ для 1-типового пятиугольника, $x_1 + 2x_2 = 360^\circ$, $x_1 + 2x_0 = 360^\circ$ для 2-типового пятиугольника.

Пусть существует мозаика, составленная из плиток, конгруэнтных пятиугольнику P. В силу теоремы 3 существует так называемая центральная плитка этой мозаики, которая обладает тем свойством, что три ее вершины имеют степень 3, а две оставшиеся имеют степень 4 или четыре вершины степени 3, а пятая степени ≤ 6. Всюду дальше символом P всегда обозначается выпуклый пятиугольник, удовлетворяющий условию $\delta(P) = 11122$ и являющийся центральной и типовой плиткой некоторой мозаики.

Укажем несколько свойств таких пятиугольников, сформулированных в следующих леммах. Приведем доказательства некоторых лемм, отличающихся от доказательств соответствующих лемм работы [2, п.4], в связи с введением понятия типовая плитка и множества T_{1a}. Доказательство оставшихся лемм изложено в работе [2, п.4].

Лемма 5. *Если $\delta(P) = 11122$, то углы пятиугольника P удовлетворяют условиям:*

1) $x_1 + 2x_2 + x_3 > 360°$, $x_0 + 2x_4 + x_3 > 360°$;

2) $x_0 + x_1 > 120°$.

Лемма 6. *Если $\delta(P) = 11122$, то углы пятиугольника P обращают в нуль функцию S*

$$S = 2\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_1 + 2x_2 + x_3 - 360°}{2} - \sin\frac{2x_4 + x_3 - 180°}{2}.$$

Лемма 7. *Пусть $\delta(P) = 11122$. Если $x_3 + 2x_2 = 360°$, то $x_1 \leq 90°$.*

Если $x_3 + 2x_4 = 360°$, то $x_0 \leq 90°$.

Если $x_0 = x_1$, то $x_2 = x_4$.

Используя понятие метки, введенное в § 2, рассмотрим еще несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 8. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *Если $v_i = 4$, то метка i-й вершины не может состоять из четырех попарно различных чисел;*

2) *Если iik, $jjk \in \mathcal{M}$ и i, j, k попарно различны, то сумма двух оставшихся углов равна* $180°$*;*

3) *Если* $234 \in \mathcal{M}$*, то $P \in T_{1a}$;*

4) *Не может быть одновременно* $22i$, $44j \in \mathcal{M}$*, $x_3 = 90°$, $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$;*

5) *Если* $024 \in \mathcal{M}$*, $x_3 = 90°$, то $P \in T_3$;*

6) *Если* 024, $111 \in \mathcal{M}$*, то $P \in T_4$;*

7) *Если* 024, $333 \in \mathcal{M}$*, то $P \in T_4$;*

8) *Если* 220, 440, $333 \in \mathcal{M}$*, то $P \in T_4$;*

9) *Если* 024, $110 \in \mathcal{M}$*, то $P \in T_5$;*

10) *Если* 220, 440, $111 \in \mathcal{M}$*, то $P \in T_4$;*

11) *Если* 2433, $024 \in \mathcal{M}$*, то $P \in T_5$;*

12) *Все утверждения остаются верными при заменах* $0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$, *выполняемых по отдельности или одновременно.*

Доказательство. Доказательства требуют лишь пункты (3) и (4).

3) Если $234 \in \mathcal{M}$, то $x_0 + x_1 = 180° \Rightarrow P \in T_{1a}$.

4) Так как P — типовая, то $x_2 + x_3 = 180°$ или $x_3 + x_4 = 180°$. Получаем $x_2 = 90°$ или $x_4 = 90° \Rightarrow x_i = 180°$ или $x_j = 180°$. Лемма доказана. □

Лемма 9. 1) *Каждая из строк* 0344 *или* 1322 *не может быть меткой;*

2) *Наборы из трех меток* 333, 221, 440 *или* 333, $220{,}441$ *невозможны.*

Лемма 10. *Если a — ребро, выходящее из вершины* 2 *или* 4*, и $\delta(a) = 2$, то $P \in T_{1a}$.*

Доказательство. Метками вершины 2 могут быть лишь 234 и 223. В первом случае $P \in T_{1a}$, лемма 8. Во втором — $x_1 \leq 90^\circ$, лемма 7. С другой стороны, метка 223 в вершине 2 влечет метки 110 или 111 в вершине 1. В любом случае $x_1 > 90^\circ$. Противоречие. Второе утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана. □

В силу сказанного выше, а также учитывая, что имеет место "симметрия" $0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$, для доказательства теоремы 4 достаточно рассмотреть семь случаев:

1. $v_2 = v_3 = v_4 = 3$; 2. $v_1 = v_2 = v_3 = 3$; 3. $v_0 = v_2 = v_3 = 3$;
4. $v_0 = v_1 = v_3 = 3$; 5. $v_0 = v_1 = v_2 = v_4 = 3$;
6. $v_1 = v_3 = 4$; 7. $v_2 = v_3 = 4$.

4.2. Случай $v_2 = v_3 = v_4 = 3$. Обозначим a, b, c — ребра, выходящие из вершин 3, 4, 2 соответственно. Если $\delta(a) = 1$, то $\delta(b) = \delta(c) = 2$ (рис. 21). Из этого же рисунка можно усмотреть все возможные метки вершин 2 и 4. Если $234 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_{1a}$; если 223 и 443 — метки, то $P \in T_{1a}$, лемма 8. Во всех случаях получаем противоречие.

Если $\delta(a) = 2$, то $x_3 = 120^\circ$ и $\delta(b) = \delta(c) = 1$ (рис. 22). Все возможные метки вершины 2: 220, 221, 240, 241; для вершины 4: 440, 441, 420, 421. Если $024 \in \mathcal{M}$ или $124 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_4$; если имеют место метки 220, 440 или 221, 441, то $P \in T_4$, лемма 8. Наборы меток 220, 441 или 221, 440, с учетом метки 333 иметь место не могут в силу леммы 9. Этим пункт 4.2 полностью исследован.

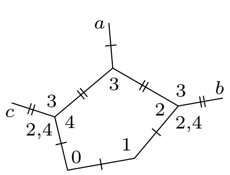

Рис. 21

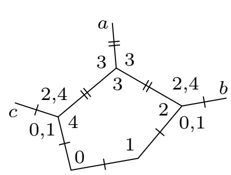

Рис. 22

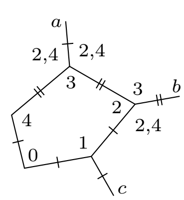

Рис. 23

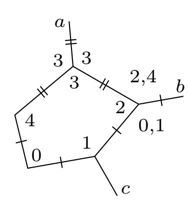

Рис. 24

4.3. Случай $v_1 = v_2 = v_3 = 3$. Обозначим a, b, c — ребра, выходящие из вершин 3, 2, 1 соответственно.

Если $\delta(a) = 1$ (рис. 23) то $\delta(b) = 2$ и по лемме 10 $P \in T_{1a}$, противоречие.

Пусть $\delta(a) = 2$. Тогда $\delta(b) = 1$ (рис. 24). Тогда $x_3 = 120^\circ$. Если меткой является 024 или 124, то $P \in T_4$, лемма 8. Рассмотрим поочередно случаи, когда в вершине 2 имеет место одна из двух меток 221 или 220.

А. Пусть $221 \in \mathcal{M}$. Если P — 2-типовая, то $x_1 + 2x_0 = 360^\circ$. Если P — 1-типовая, то $x_2 = 60^\circ$. Тогда $x_1 = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$, противоречие.

В. Пусть $220 \in \mathcal{M}$ для вершины 2. Если P — 1-типовая, то $x_2 = 60^\circ$. Тогда $x_0 = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$, противоречие.

Пусть P — 2-типовая, тогда $x_4 = 60^\circ$. Если $\delta(c) = 1$, рис. 24, то в вершине 1 имеет место метка 110 или 111. Во втором случае получаем $x_0 = x_1 = x_2 = 120^\circ$, противоречие с леммой 5(1).

Пусть 110 — метка в вершине 1. Значит $x_1 = x_2$. Пусть $v_4 = 3$. Вершине 4 отвечают метки 420, 421, 440, 441. Если 420, то $P \in T_4$, лемма 8. Если 440 или

441, то $x_0 = 240°$ или $x_1 = 240°$, противоречие. Если 421, то $x_0 = x_4 = 60°$, $x_1 = x_2 = 150°$, противоречие с леммой 5(1).

Пусть $v_4 = 4$. Вершине 4 отвечают метки 4200, 4400, 4401, 4211, 4411, 4222, 4422, 4442, 4444. Если 4200, то $x_0 = 80°, x_1 = x_2 = 140°$, противоречие с леммой 5(1). Если 4400 или 4401, или 4411, или 4422, то $x_0 = x_1 = x_2 = 120°$, противоречие с леммой 5(1). Если 4442, то $x_2 = 180°$. Если 4211 или 4222, то $x_0 = 160°, x_1 = x_2 = 100°$, противоречие с леммой 6. Если 4444, то $x_4 = 90°$, противоречие.

Пусть $\delta(c) = 2$, рис. 24. Тогда метками вершины 1 могут быть лишь 124, 441. В первом случае $P \in T_4$, лемма 8. Второй случай в силу леммы 9(2) невозможен. Этим пункт полностью исследован.

4.4. Случай $v_0 = v_2 = v_3 = 3$**.** Можно считать, что $v_1 = v_4 = 4$. Иначе $v_1 = 3$, и мы приходим к пункту 4.3; или $v_4 = 3$, и мы оказываемся в условиях пункта 4.2.

Пусть a и c — ребра, выходящие из вершин 3 и 0 соответственно, b — ребро, выходящее из вершины 4 и являющееся стороной плитки, смежной с P по стороне 04 (рис. 25). Далее поочередно рассматриваются 4 случая в зависимости от значений $\delta(a)$ и $\delta(b)$.

A. Пусть $\delta(a) = 1$, $\delta(b) = 1$ (рис. 25).

Можно считать, что в вершине 2 имеет место метка 223, иначе $P \in T_{1a}$ (лемма 8). Тогда такая же метка и в вершине 3, иначе $P \in T_{1a}$. Если P — 1-типовая, то $x_2 = 180°$, противоречие.

Пусть P — 2-типовая. Из лемм 8 и 9 следует, что в вершине 4 возможна метка 1344, тогда $2x_0 + x_1 = 360°$.

B. Пусть $\delta(a) = 1$, $\delta(b) = 2$. В вершинах 3 и 2 по-прежнему имеет место метка 223, при этом $x_3 + x_4 = 180°$. Тогда в вершине 4 возможны лишь такие метки: 3344, 2433 (рис. 26).

Пусть 3344 — метка вершины 4. В вершине 0 возможны следующие метки: 000, 001. Для метки 001 получаем, что $x_1 + 2x_0 = 360°$.

Пусть 000 — метка. В вершине 1 возможны следующие метки: 1110, 1111, 1124, 1144. Если 1110 или 1124, то $x_3 = 240°$, противоречие. Если 1111, то $x_0 = x_4 = 120°$, $x_1 = 90°$, $x_2 = 150°$, $x_3 = 60°$, тогда $P \in T_4$. Если 1144, то 122 и 100 — метки, то есть $x_1 + 2x_0 = 360°$.

Пусть 2433 — метка вершины 4. Так как $\delta(c) = 1$, то метками вершины 0 могут быть только 011, 001. Если имеет место метка 011, то $x_1 > 90°$. С другой стороны, в силу леммы 7 $x_1 \le 90°$, противоречие. Для метки 001, следует $x_1 + 2x_0 = 360°$.

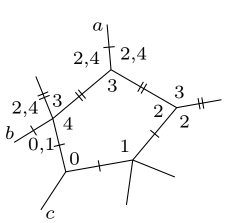

Рис. 25

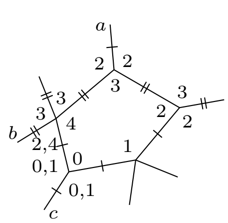

Рис. 26

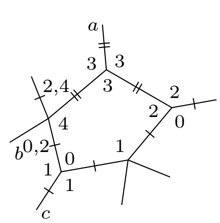

Рис. 27

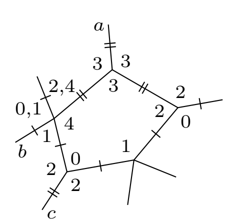

Рис. 28

C. Пусть $\delta(a) = 2$, $\delta(b) = 1$ или $\delta(b) = 2$. Тогда $x_3 = 120°$. Так как P — типовая, то $x_2 + x_3 = 180°$ или $x_3 + x_4 = 180°$. Тогда $x_2 = 60°$ или $x_4 = 60°$.

Метками вершины 2 могут быть лишь 240, 241, 220, 221. Если имеют место первые две метки, то $P \in T_4$, лемма 8. Далее поочередно рассмотрим случаи меток 220 и 221.

C.0. Пусть $220 \in \mathcal{M}$ для вершины 2, рис. 27. Если $x_2 = 60°$, то $x_0 = 240°$, противоречие.

Пусть $x_4 = 60°$, тогда $x_1 = x_2$. Если $\delta(c) = 1$, то метками вершины 0 могут быть только строки 000, 001, 110; если $\delta(c) = 2$, то 220, 440, 024.

Для меток 440, 024 $P \in T_4$. Для метки 000 получаем $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_0 = 60°$, противоречие с леммой 5(1). Для метки 001 следует $x_1 + 2x_0 = 360°$.

Пусть $110 \in \mathcal{M}$, рис. 27. Вершине 4 отвечают метки 4200, 4400, 4410, 4222, 4422, 4442. Если вершине 4 отвечает одна из меток 4200, 4400, 4410, 4422, то $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_0 = 60°$, противоречие с леммой 5(1). Если 4442 — метка, то $x_2 = 180°$, противоречие. Пусть 4222 — метка. Тогда $x_0 = 160°$, $x_1 = x_2 = 100°$, $x_3 = 120°$, $x_0 = 60°$. Так как функция S из леммы 6 не равна нулю при этих значениях углов, получаем противоречие.

Пусть вершина 0 имеет такую же метку 220, что и вершина 2, рис. 28. С учетом леммы 4 имеется три метки вершины 4, согласованные с метками 333 и 220 вершин 3 и 0 соответственно: 0144, 2411, 1144.

Для метки 0144 или 1144 следует, $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_0 = 60°$, противоречие с леммой 5(1). Для метки 2411 получаем, $x_0 = 160°$, $x_1 = x_2 = 100°$, $x_3 = 120°$, $x_0 = 60°$. Так как функция S из леммы 6 не равна нулю при этих значениях углов, получаем противоречие. Этим полностью исследован случай метки 220 в вершине 2.

C.1. Пусть $221 \in \mathcal{M}$ для вершины 2. Если $x_2 = 60°$, то $x_1 = 240°$, противоречие. Если $x_4 = 60°$, то $x_1 + 2x_0 = 360°$.

Этим полностью исследован случай **C**, а значит пункт 4.4.

4.5. Случай $v_0 = v_1 = v_3 = 3$. Как и выше можно считать, что $v_2 = v_4 = 4$. Пусть a, b, c — ребра, выходящие из вершин 3, 0, 1 соответственно.

A. Пусть $\delta(a) = 1$. Тогда в вершине 3 могут быть лишь следующие метки: 223, 443, 234. Для метки 234 $P \in T_{1a}$, а метка 443 переходит в 223 при упоминавшейся уже симметрии. Поэтому можно считать, что $223 \in \mathcal{M}$ для вершины 3 (рис. 29). Тогда $x_1 \leq 90°$, лемма 7.

Можно считать, что $2433 \in \mathcal{M}$ для вершины 2, так как любая другая метка вершины 2 либо содержит четыре различных символа, либо содержит 223, что влечет противоречие. Для метки 2433, так как P — типовая, то $x_2 = 180°$, противоречие.

B. Пусть $\delta(a) = 2$, тогда $x_3 = 120°$. Пусть вначале $\delta(b) = 1$, $\delta(c) = 1$. Всевозможные метки вершины 0: 000, 001, 011; всевозможные метки вершины 1: 111, 110, 100. Если метки в этих вершинах различны, то $x_0 = x_1 = x_3 = x_4 = 120°$, $x_2 = 60°$ или $x_0 = x_1 = x_3 = x_2 = 120°$, $x_4 = 60°$. В обоих случаях получаем противоречие с леммой 5(1).

Можно считать, следовательно, что метки вершин 0 и 1 одинаковы 001 или 110, с учетом симметрии можно считать, что это — метка 001. Этой метке соответствует единственный вариант, представленный на рис. 30. Если P — 2-типовая, то $2x_0 + x_1 = 360°$.

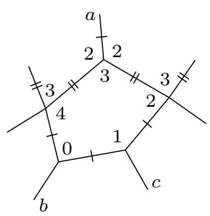

Рис. 29

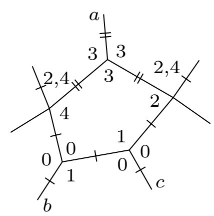

Рис. 30

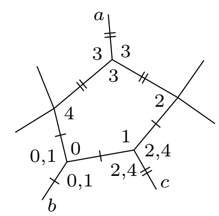

Рис. 31

Пусть P — 1-типовая. Рассмотрим метки вершины 4. Отбрасывая те, что очевидно невозможны, мы получим ровно шесть меток: 1144, 0144, 2411, 2444, 2244, 4444.

Для метки 1124 получаем $x_0 = 140°$, $x_1 = 80°$, $x_2 = 60°$, $x_3 = 120°$, $x_4 = 140°$, что противоречит лемме 5(1). Для метки 2244 получаем $x_0 = x_1 = x_3 = x_4 = 120°$, $x_2 = 60°$, что противоречит лемме 5(1). Для метки 0144 или 1144 получаем $x_0 = 180°$, противоречие. Для метки 4444 получаем $x_1 = 180°$, противоречие.

Пусть теперь $\delta(b) = 1$, $\delta(c) = 2$, рис. 31. Если $124 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_4$, лемма 8. Можно считать стало быть, что вершина 1 имеет метку 221 или 441.

Если имеется еще $001 \in \mathcal{M}$, то $2x_0 + x_1 = 360° \Rightarrow x_0 = x_2 \Rightarrow x_3 + x_4 = 180°$.

Следовательно для метки 221 можно считать, что в вершине 0 имеется метка 110. Если P — 1-типовая, то $2x_1 + x_0 = 360°$. Если P — 2-типовая, то $x_0 = x_1 = x_3 = x_4 = 120°$, $x_2 = 60°$, что противоречит лемме 5(1).

Для метки 441 в вершине 0 имеет место метка 000 или 001. В первом случае, если P — 1-типовая, то $x_0 = x_1 = x_3 = x_4 = 120°$, $x_2 = 60°$, что противоречит лемме 5(1); если P — 2-типовая, то $x_1 = 240°$, противоречие. Для метки 001 получаем равенство $2x_0 + x_1 = 360° \Rightarrow x_0 = x_4 \Rightarrow x_0 + x_3 = 180°$.

Случай $\delta(b) = 2$, $\delta(c) = 1$ симметричен только что рассмотренному. Этим завершается пункт 4.5.

4.6. Случай $v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = 3$. Пусть a, b, c, d — ребра, выходящие из вершин 2, 4, 0, 1, соответственно. В силу симметрии достаточно рассмотреть два различных случая: 1) $\delta(a) = 1$, $\delta(b) = 1$; 2) $\delta(a) = 2$.

Если $\delta(a) = 2$, то $P \in T_{1a}$ в силу леммы 10, противоречие. Пусть $\delta(a) = 1$ и $\delta(b) = 1$ (рис. 32). Тогда в вершине 2 возможны лишь следующие метки: 220, 221, 240, 241. Заменой $0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$ из этих меток получаются всевозможные метки для вершины 4: 441, 440, 421, 420.

С учетом указанной замены могут представиться лишь следующие два случая: 1) метки вершин 2 и 4 содержат 0; 2) метка вершины 2 содержит 1, а метка вершины 4 — 0. В каждом из этих двух случаев имеется три варианта в зависимости от типов ребер c и d:

1)$\delta(c) = 1$, $\delta(d) = 1$; 2)$\delta(c) = 2$, $\delta(d) = 1$; 3)$\delta(c) = 1$, $\delta(d) = 2$.

Отметим, что оба ребра c и d не могут быть одновременно второго типа. В каждом из перечисленных шести случаев имеется восемь различных наборов из четырех меток для вершин 2, 4, 0, 1. Все эти наборы меток можно усмотреть из рисунков 32, 33, 34, где на первых двух рисунках $i = 0$, $j = 1$ или $i = 1$, $j = 0$; на третьем — $i = 2$, $j = 1$ или $i = 4$, $j = 0$.

Все 48 наборов приведены в следующей таблице 2. Полужирным шрифтом выделены те метки, которые позволяют заключить на основании леммы 8 к

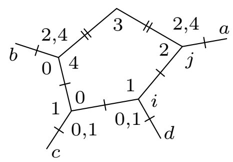

Рис. 32

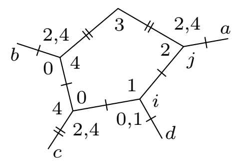

Рис. 33

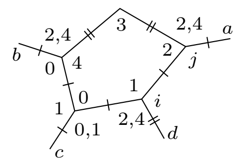

Рис. 34

какому множеству T_i принадлежит пятиугольник. Случаи, обозначенные буквами **A**, **B** или **C**, рассмотрены ниже таблицы.

2	4	0	1	T_i
022	**044**	100	**111**	T_4
022	044	011	011	**A**
022	**024**	100	**111**	T_4
022	024	011	011	**A**
024	044	100	**111**	T_4
024	044	011	011	**A**
024	024	100	**111**	T_4
024	024	**011**	011	T_5

2	4	0	1	T_i
022	044	044	011	**A**
022	044	**024**	**111**	T_4
022	024	044	011	**A**
022	024	**024**	**111**	T_4
024	044	044	011	**A**
024	044	**024**	**111**	T_4
024	024	044	011	**A**
024	024	**024**	**111**	T_4

2	4	0	1	T_i
022	044	100	144	**A**
022	044	011	124	**A**
022	024	100	144	**A**
022	024	011	124	**A**
024	044	100	144	**A**
024	044	011	124	**A**
024	024	100	144	**A**
024	**024**	**011**	124	T_5

2	4	0	1	T_i
122	044	100	011	**A**
122	044	011	100	**A**
122	024	100	011	**A**
122	024	011	100	**A**
124	044	100	011	**A**
124	044	011	100	**A**
124	**024**	**100**	**011**	T_4
124	**024**	**011**	100	T_5

2	4	0	1	T_i
122	044	024	011	**A**
122	044	044	100	**B**
122	**024**	024	**011**	T_5
122	024	044	100	**A**
124	044	024	011	**A**
124	044	044	**100**	T_5
124	024	**024**	**011**	T_4
124	024	044	**100**	T_5

2	4	0	1	T_i
122	044	100	124	**A**
122	044	011	122	**C**
122	024	100	124	**A**
122	**024**	**011**	122	T_5
124	044	**100**	124	T_5
124	044	011	122	**A**
124	024	**100**	**124**	T_5
124	**024**	**011**	122	T_5

Таблица 2

A. В каждом из случаев из набора меток получаем $x_0 = x_1 = x_2 = x_4$, так как P — типовая, то $x_3 = 60^\circ$, $x_0 = 120^\circ$, что противоречит лемме 5(1).

B. Из набора меток следует, что $x_3 + x_4 = 180^\circ$ и при этом $2x_0 + x_1 = 360^\circ$.

C. Из набора меток следует, что $x_2 + x_3 = 180^\circ$ и при этом $2x_1 + x_0 = 360^\circ$. Этим рассмотрение пункта 4.6 завершается.

4.7. Случай $v_1 = v_3 = 4$**.** Пусть a, b — ребра, выходящие из вершин 2, 4, соответственно.

A. Пусть $\delta(a) = 1$ и $\delta(b) = 1$ (рис. 35). Тогда $x_3 = 90^\circ$.

Если $024 \in \mathcal{M}$ или $124 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_3$, лемма 8. Случаи, когда в вершине 2 имеют место метки: 220 или 221; в вершине 4: 440 или 441 не возможны по лемме 8(4).

B. Пусть $\delta(a) = 2$ (рис. 36). Можно считать, что в вершине 2 имеет место метка 223, иначе $P \in T_{1a}$. Вершине 3 отвечают метки 3022, 3122, 3322, 3324, 3344. Если вершине 3 отвечает одна из меток 3022, 3122, 2233, то $x_0 = 0^\circ$ или $x_1 = 0^\circ$, или $x_3 = 0^\circ$, противоречие.

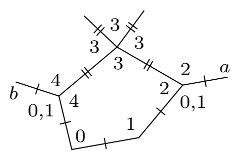

Рис. 35

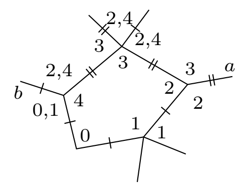

Рис. 36

Пусть вершине 3 отвечает метка 3344. Тогда $x_3 + x_4 = 180°$. Вершине 4 отвечают метки 420, 421, 440, 441, а вершине 0 — метки 000, 001, 011, 022, 024, 044. Наборы меток и соответствующие заключения приведены в следующей таблице 3.

4	0	Заключения
420	001	$x_3 + x_4 = 180°$, $2x_0 + x_1 = 360°$
420	011	T_5
420	024	**B.1**
420	044	$x_2 + x_3 = 180°$, $2x_1 + x_0 = 360°$
421	000	T_4, случай, симметричный случаю (6) леммы 8
421	001	$x_3 + x_4 = 180°$, $2x_0 + x_1 = 360°$
421	022	$x_0 = x_3 = x_4 = 90°$, T_3
421	024	**B.2**
440	001	$x_3 + x_4 = 180°$, $2x_0 + x_1 = 360°$
440	011	$x_2 + x_3 = 180°$, $2x_1 + x_0 = 360°$
440	024	$x_2 + x_3 = 180°$, $2x_1 + x_0 = 360°$
440	044	**B.3**
441	000	**B.4**
441	001	$x_3 + x_4 = 180°$, $2x_0 + x_1 = 360°$
441	022	**B.5**
441	024	$x_1 = x_4 = 120°$, $x_3 = 60°$, T_4

Таблица 3

B.1. Из набора меток следует, $x_1 = x_4$. Если вершине 1 отвечает метка 1111, то $x_1 = 90° \Rightarrow P \in T_3$. Если вершине 1 отвечает метка 1110, то $x_1 = x_4 = 120°$, $x_0 = 180°$, противоречие.

B.2. Из набора меток следует, $x_0 = x_1 = x_4 = 108°$, $x_2 = 144°$, $x_3 = 72°$, что противоречит лемме 6.

B.3. Из набора меток следует, $x_0 = x_2 = 144°$, $x_1 = x_3 = 72°$, $x_4 = 108°$, что противоречит лемме 6.

B.4. Из набора меток следует, $x_0 = 120°$, $x_1 = 80°$, $x_2 = 160°$, $x_3 = 40°$, $x_4 = 140°$, что противоречит лемме 6.

B.5. Из набора меток следует, $x_0 = x_3 = 72°$, $x_1 = x_2 = 144°$, $x_4 = 108°$, что противоречит лемме 6.

Пусть вершине 3 отвечает метка 3324. Так как P — типовая, то $x_2 + x_3 = 180°$ или $x_3 + x_4 = 180°$. Из метки 3324 следует, что эти два равенства выполняются одновременно. Тогда из метки 223 следует, что $x_2 = 180°$. Этим исчерпан пункт 4.7.

4.8. Случай $v_2 = v_3 = 4$. Пусть a — ребро, выходящее из вершин 4, b — ребро, выходящее из вершины 2, изображенное на (рис. 37).

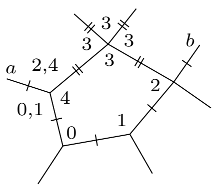

Рис. 37

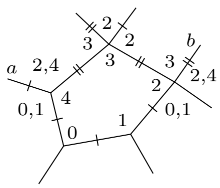

Рис. 38

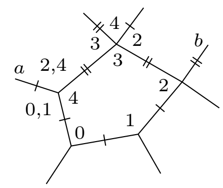

Рис. 39

A. Пусть $\delta(a) = \delta(b) = 1$. Тогда $x_3 = 90°$.

Вершина 4 может иметь метки: 024, 124, 440, 441 (рис. 37). Если имеет место первая или вторая метка, то $P \in T_3$, лемма 8. Поэтому можно считать, что в вершине 4 одна из двух оставшихся меток. Считая, что вершины 0 и 1 также не имеют меток 024, 124, выпишем всевозможные наборы трех меток вершин 4, 0, 1. Всего таких наборов имеется 16. Они приведены в следующей таблице 4.

4	0	1	T_i	4	0	1	T_i
440	001	111	**A.1**	441	001	001	**A.5**
440	001	110	**A.1**	441	001	110	**A.1**
440	001	441	**A.1**	441	001	221	**A.3**
440	110	110	**A.2**	441	000	110	**A.1**
440	110	001	**A.1**	441	000	111	**A.1**
440	110	221	**A.3**	441	000	441	**A.1**
440	440	110	**A.2**	441	220	110	**A.3**
440	440	001	**A.4**	441	220	111	**A.3**

Таблица 4

A.1. Из набора меток получаем $x_0 = x_1 = x_4 = 120° \Rightarrow x_2 = x_3 = 90°$ и $2x_1 + x_0 = 360°$.

A.2. Из каждого набора меток получаем $x_2 + x_3 = 180°$ и $2x_1 + x_0 = 360°$.

A.3. Наборы меток не возможны по лемме 8(4).

A.4. Если P — 2-типовая, то $x_1 = 180°$, противоречие. Если P — 1-типовая, то из набора меток получаем $2x_1 + x_0 = 360°$.

A.5. Если P — 2-типовая, то $x_1 = 180°$, противоречие. Пусть P — 1-типовая, тогда $x_2 = 90°$. Вершине 2 отвечают метки 2201, 2211, 2224, 2244, 2411, 2444. Если 2201, то $x_0 + x_1 = 180° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие; если 2211, то $x_1 = 90° \Rightarrow P \in T_3$; если 2224 или 2244, или 2444, то $x_0 = x_2 = x_3 = x_4 = 90° \Rightarrow x_1 = 180°$, противоречие; если 2411, то $x_0 = x_4 = 150°$, $x_1 = 60°$, $x_2 = x_3 = 90°$, что противоречит лемме 6.

B. Пусть $\delta(a) = 1, \delta(b) = 2$ (рис. 38). Вершине 3 могут отвечать метки 3322, 3344, 2433. Пусть вершине 3 отвечает метка 3322, случай 3344 симметричный. Вершине 2 могут отвечать метки 2230, 2231.

Пусть вершине 2 отвечает метка 2230. Тогда $x_0 + x_2 = 180°$, $x_0 = x_3$. Рассмотрим наборы меток вершин 1 и 0, приведенные в следующей таблице 5. Иногда требуется рассматривать метки вершины 4.

Пусть вершине 2 отвечает метка 2231. Тогда $x_1 + x_2 = 180°$, $x_1 = x_3$. Рассмотрим наборы меток вершин 1 и 0, приведенные в следующей таблице 6. Иногда требуется рассматривать метки вершины 4.

1	0	Заключения
110	-	$x_2 + x_3 = 180°$, $2x_1 + x_0 = 360°$
111	000	$x_0 = x_1 = x_3 = x_4 = 120°$, $x_2 = 60°$, противоречие с леммой 5(1)
111	001	$x_0 = x_1 = x_3 = x_4 = 120°$, $x_2 = 60°$, противоречие с леммой 5(1)
111	022	$x_2 = 180°$
111	024	$x_4 = 180°$
142	010	$x_1 = 180°$
142	011	$x_2 + x_3 = 180°$, $2x_1 + x_0 = 360°$
144	000	$x_0 = x_1 = x_3 = x_4 = 120°$, $x_2 = 60°$, противоречие с леммой 5(1)
144	001	если $420 \in \mathcal{M}(P)$, то $x_4 = 180°$; если $421 \in \mathcal{M}(P)$, то $x_1 = 180°$

Таблица 5

1	0	Заключения
100	010	если $421 \in \mathcal{M}(P)$, то $x_0 + x_1 = 180° \Rightarrow P \in T_{1a}$; если $441 \in \mathcal{M}(P)$, то $S \neq 0$ из леммы 6
100	011	$x_2 + x_3 = 180°$, $2x_1 + x_0 = 360°$
100	042	$x_1 = x_3 = 90° \Rightarrow P \in T_{1a}$
100	044	$x_0 = x_1 = x_3 = x_4 = 120°$, $x_2 = 60°$, противоречие с леммой 5(1)
101	-	$x_2 + x_3 = 180°$, $2x_1 + x_0 = 360°$
122	-	$x_2 = 180°$
124	-	$x_4 = 180°$

Таблица 6

Пусть вершине 3 отвечает метка 3324 (рис. 39). Так как P — типовая, то $x_2 + x_3 = 180°$ или $x_3 + x_4 = 180°$. Из метки 3324 следует, что эти два равенства выполняются одновременно. Здесь рассуждения такие же как и в случае метки 3322.

Если $\delta(a) = 2$, то по лемме 10 $P \in T_{1a}$, противоречие. Этим пункт 4.8 завершается, и завершается доказательство теоремы 4.

5. Пятиугольники δ-типа 11112

5.1. В этой главе исследуем пятиугольники с четырьмя одинаковыми сторонами, то есть δ-тип пятиугольника P $\delta(P) = 11112$. Понятно, что обсуждаемые утверждения не зависят от способа нумерации вершин. Всюду здесь мы придерживаемся нумерации, при которой первые четыре стороны имеют равные длины. Однако ясно, что для заданного пятиугольника таких нумераций имеется две. Одна из другой получается заменой $0 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$. Такую замену мы называем симметрией, а обе нумерации вершин — допустимыми. Одна из двух допустимых нумераций выбирается случайно.

Введем следующие множества выпуклых пятиугольников:

$T_{1a} = \{P | x_0 + x_1 = 180°\} \cup \{P | x_1 + x_2 = 180°\} \cup \{P | x_3 + x_4 = 180°\}$.

$T_2 = \{P | x_0 + x_2 = 180°\}$.

$T_3 = \{P | x_0 = x_2 = 90°\}$.

$T_4 = \{P | x_2 = 2x_0 = 120° \ \vee x_0 = 2x_2 = 120°$.

$T_6 = \{P | x_0 + 2x_3 = 360°, x_2 + 2x_1 = 360° \ \vee x_2 + 2x_4 = 360°, x_0 + 2x_1 = 360°\}$.

$T_7 = \{P | x_2 + 2x_3 = 360°, x_1 + 2x_0 = 360° \ \vee x_0 + 2x_4 = 360°, x_1 + 2x_2 = 360°\}$.

$T_8 = \{P | x_2 + 2x_3 = 360^\circ, x_1 + 2x_4 = 360^\circ \ \vee x_0 + 2x_4 = 360^\circ, x_1 + 2x_3 = 360^\circ\}$.

Определения множеств T_6, T_7 и T_8 в терминах меток, введенных в главе 2, можно переписать так:

$P \in T_6 \Leftrightarrow \{112, 330\} \subset \mathcal{M}(P)$ или $\{110, 442\} \subset \mathcal{M}(P)$;
$P \in T_7 \Leftrightarrow \{001, 332\} \subset \mathcal{M}(P)$ или $\{221, 440\} \subset \mathcal{M}(P)$;
$P \in T_8 \Leftrightarrow \{331, 440\} \subset \mathcal{M}(P)$ или $\{441, 332\} \subset \mathcal{M}(P)$.

Докажем, что справедлива

Теорема 5. *Если P — центральная, типовая плитка, и $\delta(P) = 11112$, то $P \in T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_6 \cup T_7 \cup T_8$, либо $x_0 + 2x_1 = 360^\circ$, либо $x_2 + 2x_1 = 360^\circ$.*

Так как P — типовая плитка, то согласно шестой строки таблицы 1, считаем, что $C_0 = C_1$, $x_2 + x_3 = 180^\circ$ или $C_2 = C_3$, $x_0 + x_4 = 180^\circ$. Если пятиугольник удовлетворяет первой паре соотношений, будем называть его 1-типовым, если пятиугольник удовлетворяет второй паре соотношений, будем называть его 2-типовым.

Необходимо доказать, что, если типовой пятиугольник $P \notin T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_6 \cup T_7 \cup T_8$, то верна одна из пар соотношений:

$$x_0 + 2x_1 = 360^\circ, x_0 + 2x_4 = 360^\circ \tag{1}$$

для 1-типового пятиугольника;

$$x_2 + 2x_3 = 360^\circ, x_2 + 2x_1 = 360^\circ \tag{2}$$

для 2-типового пятиугольника.

Далее, если в ходе рассуждений мы получаем одно из необходимых соотношений (1) или (2) для соответствующего типового пятиугольника P, то будем записывать $P \in T_{1b}$.

Всюду в этой главе символом P обозначается выпуклый типовой пятиугольник, для которого $\delta(P) = 11112$ и выбрана одна из двух допустимых нумераций вершин. Укажем несколько свойств таких пятиугольников. Так же как и в предыдущей главе приведем доказательства лишь некоторых из них.

Лемма 11. *Углы P удовлетворяют неравенствам:*

$$x_0 + 2x_1 + x_2 > 360^\circ, \qquad x_0 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 < 720^\circ.$$

Лемма 12. *Углы P обращают в ноль функцию*

$$S = \sin\frac{x_0}{2}\sin\frac{2x_4 + x_0 - 180^\circ}{2} - \sin\frac{x_2}{2}\sin\frac{2x_3 + x_2 - 180^\circ}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}(\sin x_4 - \sin x_3 + \sin(x_2 + x_3) - \sin(x_0 + x_4)).$$

Немедленным следствием леммы 11 является следующее утверждение.

Лемма 13. *Справедливы утверждения:*
1) $0112 \notin \mathcal{M}(P)$;
2) $\{330, 442\} \not\subset \mathcal{M}(P)$;
3) $\{332, 440\} \not\subset \mathcal{M}(P)$.

Лемма 14. *Если $\{002, 441\} \subset \mathcal{M}(P)$ или $\{220, 331\} \subset \mathcal{M}(P)$, то $P \in T_{1a}$.*

Доказательство. Из первого включения следует $x_2/2 = 180° - x_0$, $2x_4 = 360° - x_1$, $2x_3 + x_2 = 360° - x_1$. Подставим эти выражения в первое представление S из леммы **??**. После простейших преобразований S принимает вид

$$S = \sin\frac{x_0}{2}\cos\frac{x_0 - x_1}{2} - \sin x_0 \cos\frac{x_1}{2} = -\sin\frac{x_0}{2}\cos\frac{x_0 + x_1}{2}.$$

Поскольку $S = 0$, то $x_0 + x_1 = 180° \Rightarrow P \in T_{1a}$. Второе утверждение из первого получается заменой нумерации. Лемма доказана.

$\square$

Лемма 15. *Справедливы утверждения:*
1) $\{001, 442\} \nsubseteq \mathcal{M}(P)$;
2) $\{221, 330\} \nsubseteq \mathcal{M}(P)$.

Лемма 16. 1) *Если* $012 \in \mathcal{M}(P)$ *или* $034 \in \mathcal{M}(P)$, *или* $234 \in \mathcal{M}(P)$, *то* $P \in T_{1a}$.

2) *Если* $\{002, 112\} \subset \mathcal{M}(P)$ *или* $\{224, 334\} \subset \mathcal{M}(P)$, *или* $\{330, 440\} \subset \mathcal{M}(P)$, *то* $P \in T_{1a}$.

Доказательство. 1) Пусть l, m — оставшиеся символы. Тогда в первом случае сразу получаем $x_l + x_m = 180°$, где $\{l, m\} \in \{\{3, 4\}, \{1, 2\}, \{0, 1\}\} \Rightarrow P \in T_{1a}$.

2) Из условия следует, что $x_0 = x_1$ или $x_2 = x_3$, или $x_3 = x_4$. Тогда $ijk \in \mathcal{M}(P)$ — метки из случая (1) этой леммы. Лемма доказана.

$\square$

Лемма 17. 1) *Если* $134 \in \mathcal{M}(P)$, *то* $P \in T_2$.

2) *Если* $\{331, 441\} \subset \mathcal{M}(P)$, *то* $P \in T_2$.

Пусть существует мозаика, составленная из плиток, конгруэнтных пятиугольнику P. В силу теоремы 3 существует так называемая центральная плитка этой мозаики, которая обладает тем свойством, что три ее вершины имеют степень 3, а две оставшиеся имеют степень 4 или четыре вершины степени 3, а пятая степени ≤ 6. Всюду дальше символом P всегда обозначается выпуклый пятиугольник, удовлетворяющий условию $\delta(P) = 11112$ и являющийся центральной типовой плиткой некоторой мозаики.

В силу сказанного, а также учитывая, что имеет место "симметрия" $0 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$, для доказательства нашей теоремы достаточно рассмотреть пять случаев:

1. $v_3 = v_4 = 3$;
2. $v_0 = v_1 = v_2 = 3$;
3. $v_1 = v_2 = v_3 = 3$, $v_0 = v_4 = 4$;
4. $v_0 = v_2 = v_3 = 3$, $v_1 = v_4 = 4$;
5. $v_0 = v_1 = v_3 = 3$, $v_2 = v_4 = 4$.

Далее мы рассмотрим каждый из указанных выше пяти случаев. Но вначале еще несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 18. *Если* $v_3 = 3$ *или* $v_4 = 3$ *и плитки* P *и прилегающая к* P *по стороне* 34 *ориентированы одинаково, то* $P \in T_{1a} \cup T_2$.

Доказательство. Пусть, скажем, v_3=3. Тогда $34i \in \mathcal{M}(P)$ для некоторого $i = 0, 1, 2$. Если $i = 0, 2$, то $P \in T_{1a}$, лемма 16; если $i = 1$, то $P \in T_2$, лемма 17. Лемма доказана.

$\square$

Лемма 19. *Все возможные метки длины три можно разбить на две группы:* 000, 111, 222, 110, 001, 220, 002, 112, 221, 012 *— 10 меток, содержащих лишь символы* $0, 1, 2$*;* $33i$, $44i$, $i34$, $i = 0, 1, 2$, *— 9 меток, содержащих символы* 3 *или* 4.

Лемма 20. *Если* $x_0 = x_2$*, то* $P \in T_{1a} \cup T_2$.

Доказательство. Из условия следует, что $x_3 = x_4$. Пусть $v_3 = 3$. Поскольку из $34i \in \mathcal{M}$, $i = 0, 1, 2$, следует $P \in T_{1a}$ или $P \in T_2$, леммы 16, 17, то метки вершины 3, подлежащие рассмотрению, имеют вид: $33i$, $i = 0, 1, 2$.

Если $330 \in \mathcal{M}$, то $442 \in \mathcal{M}$, а это невозможно, лемма 15. Точно также устанавливается, что $332 \notin \mathcal{M}$. Если же $331 \in \mathcal{M}$, то $341 \in \mathcal{M}$.

Случай, когда $v_4 = 3$, получается из предыдущего заменой нумерации.

Пусть $v_3 = v_4 = 4$. Тогда $v_0 = v_1 = v_2 = 3$. Рассмотрим метки вершины 3. Каждая такая метка имеет вид $ijkl$, где все символы либо равны 3 или 4, либо $i, j \leq 2$, $k, l \geq 3$. В первом случае $x_3 = x_4 = 90°$, то $P \in T_{1a}$. Во втором случае — обязательно $i = j = 1$, иначе один из углов становится равным $180°$ (учесть равенство углов $x_3 = x_4, x_0 = x_2$).

Будем считать, что вершине 3 отвечает 1133. Точно так же можно считать, что вершине 4 отвечает метка 1144. Далее, так как $v_0 = 3$, то метки вершины 0 имеют длину 3. Метки длины три, согласованные с меткой 1144, имеют вид $0ij$, $i, j = 0, 1, 2$. Если метка содержит символ 1, то $012 \in \mathcal{M}$ и $P \in T_{1a}$; если метка не содержит 1, то $x_0 = x_2 = 120°$. Точно такие же рассуждения для вершины 1 позволяют считать, что $x_1 = 120°$. Таким образом, $x_0 = x_1 = x_2 = 120°$, а тогда $P \in T_{1a}$. Лемма доказана.

$\square$

Лемма 21. *Если* $x_0 = x_1$ *или* $x_2 = x_1$*, то* $P \in T_{1a}$ *или* $P \in T_i$ *для некоторого* $i = 2, \ldots, 8$.

Доказательство. Будем доказывать наше утверждение в предположении, что $x_0 = x_1$. Второе утверждение получается из первого перенумерацией вершин. В силу условия достаточно рассмотреть три случая: 1) $v_3 = v_4 = 3$, 2) $v_1 = v_3 = 3$, 3) $v_1 = v_4 = 3$.

1) Пусть $v_3 = v_4 = 3$. Поскольку из $34i \in \mathcal{M}$, $i = 0, 1, 2$, следует $P \in T_{1a}$ или $P \in T_2$, леммы 16, 17, то метки вершин 3 и 4, подлежащие рассмотрению, исчерпываются списком: $33i, 44j$, $i, j = 0, 1, 2$.

Включения $\{330, 442\} \subset \mathcal{M}$ и $\{330, 442\} \subset \mathcal{M}$ в силу леммы 15 невозможны. Если $\{330, 441\} \subset \mathcal{M}$, то $P \in T_2$; если $\{332, 442\} \subset \mathcal{M}$, то $P \in T_{1a}$, лемма 16. Этим исчерпан случай, когда $v_3 = v_4 = 3$.

2) Пусть $v_1 = v_3 = 3$. Если $112 \in \mathcal{M}$, то $012 \in \mathcal{M}$, а значит $P \in T_{1a}$. Теперь, учитывая лемму 19, можно считать, что меткой вершины 1 является одна из следующих $\mathtt{xx}1, 221, 331, 441$. Здесь и ниже $\mathtt{x}$ означает символ 0 или 1.

Для вершины 3 достаточно рассмотреть две метки $331, 332$ (учесть дополнительно, что $x_0 = x_1$).

Если $\{331, 1\mathtt{xx}\} \subset \mathcal{M}$, то $x_0 = x_1 = x_3 = 120°$. Так как P — типовая, то $x_2 + x_3 = 180°$ или $x_0 + x_4 = 180°$, тогда $x_2 = 60°$ или $x_4 = 60°$. В обоих случаях $P \in T_{1a}$.

Если $\{331, 441\} \subset \mathcal{M}, x_0 = x_1$, то $P \in T_{1a}$, лемма 16.

Если $\{331, 221\} \subset \mathcal{M}$, то, выражая все углы через угол x_3, получаем, что функция S из леммы 12 равна нулю только, когда $x_3 = 0°$.

Пусть 331 отвечает обеим вершинам 1 и 3. Мы помним, что по крайней мере еще одна вершина имеет степень три, то есть $v_4 = 3$, или $v_2 = 3$, или $v_0 = 3$. Случай $v_4 = 3$ рассмотрен в предыдущем пункте.

Пусть $v_2 = 3$. Только две метки вершины 2 согласованы с метками в вершинах 1 и 3: $221, 222$ (учесть $x_0 = x_1$). Метка 221 не возможна по лемме 15, так как также возможна метка 330. Пусть $222 \in \mathcal{M}$, тогда $x_2 = 120°$. Если P — 1-типовая, то $x_3 = 60°, x_1 = 240°$, противоречие. Если P — 2-типовая, то $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°, x_4 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие.

Если $v_0 = 3$, то метки вершины 0, согласованные с меткой 331 вершины 1, имеют вид $02i$, $i = 0, 1, 2$. Во всех трех случаях $P \in T_{1a}$ в силу $x_0 = x_1$ и лемм 16, 14.

Пусть теперь $332 \in \mathcal{M}$. Если дополнительно $1\mathtt{xx} \in \mathcal{M}$, то $P \in T_7$, определение T_7; если $331 \in \mathcal{M}$, то $x_1 = x_2 = x_0$, далее используем лемму 20; если $441 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_8$, определение T_8. Наконец, если $221 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°, x_4 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$. Этим случай $v_1 = v_3 = 3$ исчерпан.

3) Пусть $v_1 = v_4 = 3$. Этот случай исследуем по той же схеме. Достаточно рассмотреть две метки $441, 442$ вершины 4.

Пусть $441 \in \mathcal{M}$. Если дополнительно $1\mathtt{xx} \in \mathcal{M}$, то $x_0 = x_1 = x_3 = 120°$. Так как P — типовая, то $x_2 = 60°$ или $x_4 = 60°$. В обоих случаях $P \in T_{1a}$, противоречие. Если дополнительно $331 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_{1a}$, противоречие; если $221 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_7$.

Если вершинам 1 и 4 отвечает одна и та же метка 441, то вспоминаем, что по крайней мере еще одна вершина имеет степень три, то есть $v_3 = 3$, или $v_2 = 3$, или $v_0 = 3$. Случай $v_3 = 3$ рассмотрен выше.

Если $v_2 = 3$, то метки вершины 2, согласованные с меткой 441 вершины 1, имеют вид $02i$, $i = 0, 1, 2$. Тогда $P \in T_{1a}$ при $i = 0, 1$ и $P \in T_7$ при $i = 2$.

Если $v_0 = 3$, то метки вершины 0, согласованные с меткой 441 вершины 1, имеют вид $00i$, $i = 0, 1, 2$. Если 000 или 001, то $x_0 = x_1 = x_4 = 120°$ $x_2 + x_3 = 180°$, тогда получаем функцию $S = \sqrt{3} - \sin(x_3)$, которая не имеет корней. Пусть 002. Если P — 2-типовая, то $x_1 + x_4 = 180°, \Rightarrow x_4 = 180°$, противоречие. Если P — 1-типовая, то $x_0 = x_1 = x_2 = x_4 = 120°, x_3 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$.

Пусть $442 \in \mathcal{M}$. Если дополнительно $1\mathtt{xx} \in \mathcal{M}$, то $P \in T_6$. Пусть $331 \in \mathcal{M}$. Если P — 1-типовая, то $x_0 = x_1 = 102{,}86°$, $x_2 = 51{,}43°$, $x_3 = 128{,}57°$, $x_4 = 154{,}28°$; если P — 2-типовая, то $x_0 = x_1 = 72°$, $x_2 = x_3 = 144°$, $x_4 = 108°$; во всех случаях функция $S \neq 0$, противоречие.

Если $441 \in \mathcal{M}$, то $x_2 = x_1 = x_0$, далее используем лемму 20. Пусть $221 \in \mathcal{M}$. Если P — 1-типовая, то $x_0 = x_1 = x_2 = x_4 = 120°$, $x_3 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$; если P — 2-типовая, то $x_0 = x_1 = 72°$, $x_2 = x_3 = 144°$, $x_4 = 108°$; функция $S \neq 0$, противоречие. Лемма полностью доказана.

□

5.2. Случай $v_3 = v_4 = 3$. В этом пункте докажем, что при указанном условии $P \in T_i$, $i = 2, 6, 8$.

В силу леммы 18 можно считать, что P и плитка, прилегающая к ее стороне 34, ориентированы противоположно. Тогда в вершинах 3 и 4 возможны лишь следующие метки: $33i$, $44i$, $i = 0, 1, 2$. Рассмотрим всевозможные наборы из двух меток $\{33i, 44j\}$, $i, j = 0, 1, 2$.

Учитывая симметрию достаточно рассмотреть лишь шесть из них: $\{33i, 44i\} \subset \mathcal{M} \Rightarrow P \in T_{1a} \cup T_2$, $i = 0, 1, 2$, лемма 16; включения $\{330, 442\} \subset \mathcal{M}$ и $\{332, 440\} \subset \mathcal{M}$ невозможны в силу леммы 13; $\{331, 440\} \subset \mathcal{M} \Rightarrow P \in T_8$, определение T_8.

Удобно представлять все разобранные случаи в виде таблицы, где строки поименованы метками вершины 3, а столбцы — метками вершины 4 (см. таблица 7). На пересечении строк и столбцов указаны утверждения, из которых следуют рассматриваемые случаи: символ $L_{5.3}$ отсылает к лемме 13, символ T_{1a} — к лемме 16 или к определению T_{1a}, символ T_8 — к определению T_8.

В силу отмеченной симметрии заполнению подлежит лишь верхний треугольник таблицы 7. Буква A в клетке означает, что случай, требует дополнительного исследования.

	442	441	440
330	$L_{5.3}$	A	T_{1a}
331		T_{1a}	T_8
332			$L_{5.3}$

Таблица 7. $v_3 = v_4 = 3$

A. $\{330, 441\}$**.** Тогда $0122 \in \mathcal{M}$ и $012, 220, 221 \notin \mathcal{M}(P)$.

Если P — 1-типовая, то $x_0 = x_4$, $x_1 = 360° - 2x_4$, $x_2 = x_4/2$, $x_3 = 180° - x_4/2$, где $90° < x_4 < 180°$. Подставляя полученные выражения углов в функцию S из леммы 12, получаем $x_0 = x_4 = 160°$, $x_1 = 40°$, $x_2 = x_3 = 90°$, но тогда не выполняется неравенство из леммы 11.

Пусть P — 2-типовая плитка. Поскольку P — центральная плитка, то кроме вершин 3 и 4 по меньшей мере еще одна вершина имеет степень 3. Поочередно рассмотрим три случая: 1) $v_0 = 3$, 2) $v_2 = 3$, 3) $v_1 = 3$ и $v_0 = v_2 = 4$.

1) Пусть $v_0 = 3$. Для вершины 0 с учетом сказанного выше возможны лишь следующие метки: $000, 001, 002$. Если $002 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_{1a}$, леммы 16, 14, противоречие. Если $001 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = x_4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 180°$. Этот случай мы рассматривали в самом начале исследования пункта A для 1-типовой плитки. Если $000 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = x_3 = 120°$, $x_2 = x_4 - 60°$. Так как $x_0 + x_4 = 180°$, то $x_4 = 60° \Rightarrow x_2 = 0°$, противоречие.

2) Пусть $v_2 = 3$. Для вершины 2 возможны лишь следующие метки: 112, 234, 442. Если $234 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_{1a}$ по лемме 16; $442 \notin \mathcal{M}$ в силу леммы 13; если $112 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_6$ по определению T_6.

3) Пусть $v_1 = 3$ и $v_0 = v_2 = 4$. В вершине 1 возможны лишь следующие метки: $001, 110, 111, 112, 331, 441, 134$. Метки 001 и 112 уже рассмотрены выше. Если $134 \in \mathcal{M}$ или $331 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_2$ по лемме 17. Пусть $110 \in \mathcal{M}$. Так как $x_0 + x_4 = 180°$, то $x_0 = x_2 = 72°$, $x_1 = x_3 = 144°$, $x_4 = 108°$, но функция $S \neq 0$, противоречие. Пусть $111 \in \mathcal{M}$. Так как $x_0 + x_4 = 180°$, то $x_1 = 2x_0 = 120°$, тогда $P \in T_{1a}$, противоречие.

Пусть теперь вершине 1 соответствует метка 441. Вершине 0 в этом случае могут отвечать лишь следующие метки длины 4: $0000, 0001, 0002, 0012, 0022$. Если $0001 \in \mathcal{M}$ или $0012 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = x_2$ и можно применять лемму 20; если $0022 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_2$. Если $0000 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = 90° = x_4 \Rightarrow x_1 = 180°$, противоречие. Если $0002 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = 120°$, $x_2 = 0°$, противоречие. Этим утверждение пункта 5.2 доказано.

5.3. Случай $v_0 = v_1 = v_2 = 3$. В этом пункте докажем, что при указанном условии $P \in T_{1b}$ или $P \in T_i$, $i = 2, 6, 7$.

Если $P \notin T_{1a}$, то в вершинах 0 и 2 возможны лишь по семь меток: 000, 001, 110, 002, 220, 330, 440 — для вершины 0; 222, 221, 112, 220, 002, 442, 332 — для вершины 2. Мы расположили метки вершин так, что метки, получающиеся друг из друга симметрией $0 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$ стояли на одинаковых местах. Составим 7×7 таблицу, строки который помечены метками вершины 2, а столбцы — метками вершины 0 (см. таблица 8).

Если можно сделать какое-либо заключение о нашем P, из условия $\{u, v\} \subset \mathcal{M}(P)$, где u, v — метки вершин 2 и 0, то это кратко указывается на пересечении соответствующей строки и столбца. Это может быть указание на одно из предыдущих утверждений или на возможные метки для вершины 1. Если метка для вершины 1 только одна, то она явно указывается; и если по этой метке и меткам u, v можно что-то сказать о P, то такая ссылка ставится рядом с этой меткой. Если же таких меток несколько, то указывается число возможных меток. Отметим, что если в вершине 1 допустимы две метки, то это всегда метки 110 или 112; если таких меток три, то это — метки $110, 112, 111$; наконец, если их четыре, то это — $001, 110, 112, 221$. Если в таблице стоит $x_0 = x_2$, то необходимо применить лемму 20; если $x_0 = x_1$, то лемму 21; если $L_{5.3}$, то лемму 13; если $L_{5.5}$, то лемму 15. В силу отмеченной симметрии заполняется только верхний треугольник таблицы.

	000	001	110	002	220	330	440
222	$x_0 = x_2$	3 T_{1a}	2(A)	$x_0 = x_2$	$x_0 = x_2$	112 T_6	110 (E)
221		T_{1a}	4(B)	3 T_{1a}	$x_0 = x_1$	$L_{5.5}$	T_7
112			$x_0 = x_2$	T_{1a}	2(C)	T_6	001 (G)
220				$x_0 = x_2$	111(D)	112 T_6	110 T_{1a}
002					$x_0 = x_2$	112 T_6	110 (F)
442						$L_{5.3}$	$x_0 = x_2$
332							$L_{5.3}$

Таблица 8. $v_0 = v_1 = v_2 = 3$

Дальше рассматриваются те места таблицы, которые помечены символами $A - G$.

A. $(222, 110)$**.** Если дополнительно в $\mathcal{M}$ входит метка 112, то $x_0 = x_1 = x_2 = 120°$, тогда $P \in T_{1a}$, противоречие.

Пусть вершине 1 соответствует метка 110. Если P — 1-типовая, то $x_0 + 2x_1 = 360°$. Если P — 2-типовая, то $x_1 = -x_3 + 240°$, $x_2 = 120°$, $x_4 = -2x_3 + 300°$, $x_0 = 2x_3 - 120°$, где $60° < x_3 < 150°$. Но функция S не имеет решений при заданных углах.

B. $(221, 110)$ Если P — 1-типовая, то $x_0 + 2x_1 = 360°$. Если P — 2-типовая, то $x_1 = -2x_2 + 360°$, $x_3 = x_2$, $x_4 = -4x_2 + 540°$, $x_0 = 4x_2 - 360°$, где $90° < x_2 < 135°$. Но функция S не имеет решений при заданных углах.

C. $(112, 220)$**.** Если P — 2-типовая, то $P \in T_{1b}$. Пусть P — 1-типовая, то есть $x_2 + x_3 = 180°$. Если дополнительно в $\mathcal{M}$ входит метка 110, то $P \in T_{1a}$, лемма 16. Далее рассматривается случай, когда вершине 1 соответствует метка 112.

Пусть $v_3 = 3$. Если 330 — метка для вершины 3, то $P \in T_6$; если $332 \in \mathcal{M}$, то $x_3 = 180°$. Других меток для вершины 3 быть не может.

Пусть $v_4 = 3$. Можно считать, что вершине 4 отвечает метка 441. Тогда $x_0 = x_1 = x_2 = x_4 = 120°$, $x_3 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие.

Пусть $v_3 = v_4 = 4$. Для вершины 3 имеются лишь следующие семь меток: 2233, 0033, 0133, 0233, 1233, 0034, 2234.

Для каждой метки $u \in \{0033,\ 0133,\ 0233,\ 1233\}$ $x_0 = x_1 = x_2 = x_4 = 120°$, $x_3 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие. Если 0034 — метка, то $x_4 = 180°$, противоречие. Если 2234 — метка, то $x_0 = 154,29°$, $x_1 = 128,57°$, $x_2 = x_4 = 102,86°$, $x_4 = 77,14°$. Но функция $S \neq 0$, противоречие.

Пусть 2233 — метка. Рассмотрим метки вершины 4: 4410, 4411, 4412, 4433, 4443. Если 4410, то $x_4 = 0°$; если 4411, то $x_0 = 180°$; если 4433, то $P \in T_{1a}$; во всех случаях противоречие. Если 4412, то $x_0 = 163,64°$, $x_1 = 130,9°$, $x_2 = 98,18°$, $x_3 = 81,82°$, $x_4 = 65,45°$. Но функция $S \neq 0$, противоречие. Если 4443, то $x_0 = 138,46°$, $x_1 = 124,62°$, $x_2 = 110,77°$, $x_3 = 69,23°$, $x_4 = 96,92°$. Но функция $S \neq 0$, противоречие. Этим заканчивается пункт C.

D. $(220, 111, 220)$**.** Если P — 2-типовая, то $x_1 = 120°$, $x_2 = 240° - x_3$, $x_4 = 300° - 2x_3$, $x_0 = 2x_3 - 120°$, где $60° < x_3 < 150°$. Если P — 1-типовая, то $x_1 = 120°$, $x_2 = 60° + x_4/2$, $x_3 = 120° - x_4/2$, $x_0 = 240° - x_4$, где $90° < x_4 < 135°$. Но в обоих случаях функция S не имеет решений при заданных углах, противоречие.

E. $(222, 440, 110)$**.** Тогда $x_2 + x_3 = 180°$ и $x_2 = 120°$, $x_3 = 60°$, $x_4 = x_1$, $x_0 = 360° - 2x_1$, где $90° < x_1 < 180°$. Но функция S не имеет решений при заданных углах, противоречие.

F. $(002, 440, 110)$**.** Тогда $x_2 + x_3 = 180°$ и $x_0 = 360° - 2x_4$, $x_1 = x_4$, $x_2 = -360° + 4x_4$, $x_3 = 540° - 4x_4$, где $90° < x_1 < 135°$. Но функция S не имеет решений при заданных углах, противоречие.

G. $(112, 440, 001)$**.** Если P — 1-типовая, то $x_0 = x_1 = x_2 = x_4 = 120°$, $x_3 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие. Если P — 2-типовая, то $x_4 = 180°$, противоречие. Этим утверждение пункта 5.3 доказано.

5.4. Случай $v_1 = v_2 = v_3 = 3$**,** $v_0 = v_4 = 4$**.** В этом пункте докажем, что при указанном условии $P \in T_{1b}$ или $P \in T_i$, $i = 2, 6, 7, 8$.

Если $P \notin T_{1a} \cup T_2$, то возможны лишь следующие метки: 111, 001, 110, 112, 221, 331, 441 — для вершины 1; 330, 331, 332 — для вершины 3.

Составим 3×7−таблицу, строки который помечены метками вершины 3, а столбцы — метками вершины 1 (см. таблица 9). Если можно сделать какое-либо заключение о нашем P, из условия $\{u, v\} \subset \mathcal{M}(P)$, где u, v — метки вершин 3 и 1, то это кратко указывается на пересечении соответствующей строки и столбца. Все возможные метки для вершины 2 выписаны в соответствующей ячейке таблицы. Не выписывалась метка 134 и те метки вершины 2, которые состоят из последовательных символов. Единственное исключение — место (330, 441), где указанная там метка единственно возможная. Рядом с каждой такой меткой также кратко указывается причина, по которой P может быть отнесено к тому или иному типу. Если в таблице стоит $L_{5.4}$, то необходимо применить лемму 14. Если рассматриваемый случай уже встречался, то указывается ссылка на ранее рассмотренный случай. Таких ссылок четыре 2.A, 2.B, 2.C, 2.D. Требуют комментариев две из них: 2.C, 2.D; в обоих случаях необходима допустимая перенумерация. Случаи, в которых информации о P нет, помечены символами A — D. В остальном все обозначения такие же, как и в предыдущей таблице.

	111	001	110	112	221	331	441
330	221 $x_1 = x_2$	112 T_6 442 $L_{5.3}$	221 $L_{5.5}$ 112 $x_0 = x_2$ 442 $L_{5.3}$	T_6	$L_{5.5}$	$x_0 = x_1$	T_{1a}
331	002 2.D 220 $L_{5.4}$ 222 $x_1 = x_2$	221 T_{1a}	222 2.A 221 2.B 220 $L_{5.4}$ 002 2.C	222 $x_1 = x_2$ 221 (B) 220 $L_{5.4}$ 002 T_{1a}	(A)	220 $L_{5.4}$ 222 (C)	T_2
332	221 $x_1 = x_2$	T_7	221 2.B 112 T_{1b}	T_{1b}	112 (B) 332 (D)	$x_1 = x_2$	T_8

Таблица 9. $v_1 = v_2 = v_3 = 3$

A. $331, 221$**.** Тогда $x_0 + x_4 = 180°$. Вершине 4 может отвечать одна из меток: 0044, 4401, 4402, 4411, 4422, 4434, 4444. Если 4401 или 4411, то $x_0 = x_1$, далее лемма 21; если 4402 или 4422, то $x_0 = x_2 = x_3 \Rightarrow x_3 + x_4 = 180° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие.

Пусть 4412 — метка. Вершине 0 может отвечать одна из меток: 0001, 0011, 0021, 0111, 0112, 0122, 0033, 0034, 0133, 0233. Если 0001, 0111, 0112, то $x_0 = 102,86°$, $x_1 = 51,43°$, $x_2 = x_3 = 154,29°$, $x_4 = 77,14°$, противоречие с леммой 11. Если 0011, то $P \in T_{1a}$; если 0122 или 0133, то $x_0 = 0°$; если 0012, то $x_1 = 0°$; если 0033 или 0034, то $x_2 = 0°$; если 0122, то $x_1 = 216°$; во всех случаях получаем противоречие.

Пусть 4434 — метка. Вершине 0 может отвечать одна из меток: 0001, 0011, 0021, 0112, 0122, 0033, 0034, 0233. Если 0011, то $P \in T_{1a}$; если 0033, 0034, 0233, то $x_1 = 180°$; если 0001, то $x_1 = 0°$; если 0012 или 0122, то $x_0 = 180°$; во всех этих случаях получаем противоречие. Если 0112, то $x_0 = 112,5°$, $x_1 = 45°$, $x_2 = x_3 = 157,5°$, $x_4 = 67,5°$, противоречие с леммой 11.

Пусть 4444 — метка. Вершине 0 может отвечать одна из меток: 0001, 0011, 0021, 0033, 0034. Если 0001 или 0011, то $P \in T_{1a}$; если 0033 или 0034, то $x_1 = 180°$; если 0012, то $x_2 = 180°$; во всех этих случаях получаем противоречие.

Пусть 4400 — метка. Вершине 0 может отвечать одна из меток: 0011, 0111, 0112, 0133, 0144. Если 0011, то $P \in T_{1a}$. Если 0133, то $x_0 = 0°$, противоречие. Если 0112, то $x_0 = 3x_3 - 360°$, $x_1 = 360° - 2x_3$, $x_2 = x_3$, $x_4 = 540° - 3x_3$, противоречие с леммой 11. Если 0144, то $x_0 = x_4$ и $\{033, 122\} \subset \mathcal{M}$, противоречие с леммой 15.

B. $331, 112, 221$ **или** $332, 221, 112$**.** Тогда $x_0 + x_4 = 180°$, $x_1 = x_2 = x_3 = 120°$. Но функция $S \neq 0$ при данных значениях углов, противоречие.

C. $331, 222, 331$**.** Если P — 1-типовая, то $x_3 = 60°$, $x_1 = 240°$, противоречие. Если P — 2-типовая, то $x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_0 = 180° - x_4$. Но функция S не имеет решений при заданных углах, противоречие.

D. $221, 332, 332$**.** Если P — 1-типовая, то $x_3 = 180°$, противоречие. Если P — 2-типовая, то $x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_0 = 180° - x_4$. Но функция S не имеет решений при заданных углах, противоречие. Этим утверждение пункта 5.4 доказано.

5.5. Случай $v_0 = v_2 = v_3 = 3$**,** $v_1 = v_4 = 4$**.** В этом пункте докажем, что при указанном условии $P \in T_{1b}$ или $P \in T_i$, $i = 2, 6, 7, 8$.

Если $P \notin T_{1a}$, то как отмечалось в пункте 2 в вершинах 0 и 2 возможны лишь по семь меток: 000, 001, 110, 002, 220, 330, 440 — для вершины 0; 222, 221, 112, 220, 022, 442, 332 — для вершины 2. Составим такую же как и в пункте 2 $7 \times 7-$таблицу, строки который помечены метками вершины 2, а столбцы — метками вершины 0 (см. таблица 10). Понятно, что в этом случае сохраняются все утверждения про P, вытекающие из наличия лишь двух меток, что и указывается в таблице 10. Кроме того, в каждой клеточке таблицы, где невозможно сделать вывод о P по двум меткам вершин 0 и 2, перечисляются всевозможные метки вершины 3. Отметим, что в силу леммы 18 мы считаем, что плитка, примыкающая к P по стороне 34 ориентирована противоположно. Поэтому метки вершины 3 имеют вид $33i$, $i = 0, 1, 2$. Рядом с каждой такой меткой также кратко указывается причина, по которой P может быть отнесено к тому или иному типу. Иногда по имеющимся меткам можно отнести P к разным типам. Мы выбираем лишь один, исходя из довольно случайных обстоятельств. Если рассматриваемый случай уже встречался, то указывается ссылка на ранее рассмотренный случай. Таких ссылок три 2.A, 2.B, 3.A. Случаи, в которых информации о P нет, помечены символами A — H.

Заметим еще, что симметрии в этом случае нет и нам необходимо заполнить все 49 клеток таблицы. Все обозначения точно такие же, что и в таблицах 8, 9.

	000	001	110	002	220	330	440
222	$x_0 = x_2$	331(A)	331 2.A	$x_0 = x_2$	$x_0 = x_2$	331 $x_0 = x_1$	331 T_8
221	330 $L_{5.5}$ 331 (B) 332 3.A	T_{1a}	330 $L_{5.5}$ 331 2.B 332 3.A	330 $L_{5.5}$ 331 (C) 332 3.A	$x_0 = x_1$	$L_{5.5}$	T_7
112	330 T_6 332 T_{1b}	330 T_6 332 T_{1b}	$x_0 = x_2$	T_{1a}	330 T_6 332 T_{1b}	T_6	330 T_6 332 T_{1b}
220	$x_0 = x_2$	331 $L_{5.4}$	T_{1a}	$x_0 = x_2$	331 $L_{5.4}$	331 $L_{5.4}$	331 $L_{5.4}$
002	$x_0 = x_2$	$x_2 = x_1$	331 (D)	331 (E)	$x_0 = x_2$	331 $x_0 = x_2$	331 T_8
442	330 $L_{5.3}$	330 $L_{5.3}$	T_6	330 $L_{5.3}$	330 $L_{5.3}$	$L_{5.3}$	$x_0 = x_2$
332	332 (F)	T_7	332 (G)	332 T_{1a}	332 (H)	$x_0 = x_2$	$L_{5.3}$

Таблица 10. $v_0 = v_2 = v_3 = 3$

A. $001, 222, 331$**.** Тогда $x_2 = 120°, x_4 = 60°, x_0 = x_3$. Если P — 1-типовая, то $x_1 = 240°$, противоречие. Если P — 2-типовая, то $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_4 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие.

B. $000, 221, 331$**.** Тогда $x_0 + x_4 = 180°$. Вершине 4 может отвечать одна из меток: 4401, 4411, 4412, 4434, 4444. Если 4401 или 4411, или 4412 — метки, то $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_4 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$; если 4434 — метка, то $x_1 = 0°$; противоречие. Если 4444 — метка, то система полученных линейных уравнений на углы пятиугольника несовместна.

C. $(331, 221, 002)$**.** Тогда $x_0 + x_4 = 180°$ и $x_0 = 180° - x_3/2$, $x_1 = 360° - 2x_3$, $x_2 = x_3$, $x_4 = x_3/2$, где $90° < x_3 < 180°$. Но функция S не имеет решений при заданных углах, противоречие.

D. $110, 002, 331$**.** Если P — 1-типовая, то $x_0 = 154,29°$, $x_1 = 102,86°$, $x_2 = 51,43°$, $x_3 = 128,57°$, $x_4 = 102,86°$. Но $S \neq 0$ при заданных углах, противоречие. Если P — 2-типовая, то $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_4 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие.

E. $002, 002, 331$**.** Нетрудно вычислить, что 1244 — тоже метка. Однако в этой ситуации она не может соответствовать вершине 1. Имеется лишь пять различных меток длины 4, отвечающих вершине 1: 1110, 1111, 1112, 1134, 1144. Для метки 1134 выполняется равенство $x_0+x_1 = 180°$ и следовательно $P \in T_{1a}$, противоречие. Если имеет место метка 1144, то $x_0 = x_3$, и тогда $P \in T_7$.

Далее считаем, что для P выполняется $x_2 + x_3 = 180°$ либо $x_0 + x_4 = 180°$. Если имеет место метка 1110, то в первом случае $x_0 = 163,64°$, $x_1 = 65,45°$, $x_2 = 32,73°$, $x_3 = 147,27°$, $x_4 = 130,91°$; во втором случае $x_0 = 110,77°$, $x_1 = 83,08°$, $x_2 = 138,46°$, $x_3 = 138,46°$, $x_4 = 69,23°$. Если имеет место метка 1111, то в первом случае $x_0 = 157,5°$, $x_1 = 90°$, $x_2 = 45°$, $x_3 = 135°$, $x_4 = 112,5°$; во втором случае $x_0 = 112,5°$, $x_1 = 90°$, $x_2 = 135°$, $x_3 = 135°$, $x_4 = 67,5°$. Если имеет место метка 1112, то в первом случае $x_0 = 154,29°$, $x_1 = 102,86°$, $x_2 = 51,43°$, $x_3 = 128,57°$, $x_4 = 102,86°$; во втором случае $x_0 = 108°$, $x_1 = 72°$, $x_2 = 144°$, $x_3 = 144°$, $x_4 = 72°$. Во всех случаях $S \neq 0$, противоречие.

F. $000, 332, 332$**.** Считаем, что для P выполняется $x_2 + x_3 = 180°$ либо $x_0 + x_4 = 180°$. В первом случае $x_3 = 180°$, противоречие. Во втором случае $x_0 = 120°$, $x_1 = x_3$, $x_2 = 360° - 2x_3$, $x_4 = 60°$, где $x_3 > 90°$, но функция $S \neq 0$ при данных значениях углов, противоречие.

G. $110, 332, 332$**.** Как и в случае F для P может выполняться только $x_0+x_4 = 180°$. Тогда $x_0 = 360° - 2x_3$, $x_1 = x_3$, $x_2 = 360° - 2x_3$, $x_4 = 2x_3 - 180°$, где $x_3 > 90°$, но функция $S \neq 0$ при данных значениях углов, противоречие.

H. $220, 332, 332$**.** Считаем, что для P выполняется равенство $x_0 + x_4 = 180°$. Для вершины 4 имеется лишь пять меток:
$0144, 1144$, 1244, 3344, 3444. Для меток 0144 и 3344 — $x_3 + x_4 = 180°$, значит $P \in T_{1a}$. Для метки 1144 получаем $x_0 = x_2$, далее лемма 20. $1244 \in \mathcal{M}$, то $001 \in \mathcal{M}$, а тогда $P \in T_7$. Для оставшейся метки 3444 получаем углы $x_0 = 98,18°$, $x_1 = 114,55°$, $x_2 = 130,91°$, $x_3 = 114,55°$, $x_4 = 81,82°$, но функция $S \neq 0$ при данных значениях углов, противоречие. Этим утверждение пункта 5.5 доказано.

5.6. Случай $v_0 = v_1 = v_3 = 3$**,** $v_2 = v_4 = 4$**.** Если $P \notin T_{1a}$ или $P \notin T_2$, то как отмечалось в пункте 2 в вершинах 0 и 1 возможны лишь по семь меток: 000, 001, 110, 002, 220, 330, 440 — для вершины 0; 111, 001, 110, 112, 221, 331, 441 — для вершины 1. Составим такую же как и в пункте 4 7×7−таблицу, строки который помечены метками вершины 1, а столбцы — метками вершины 0. Все пояснения к таблице из пункта 4 сохраняют силу для новой таблицы 11.

Заметим, что симметрии здесь тоже нет, нам необходимо заполнить все 49 клеток таблицы. Все обозначения точно такие же, что и в таблице 10. Прочерк в клетке таблицы 11 означает, что соответствующие метки несогласованы. Случаи, в которых информации о P нет, помечены латинскими буквами A — N.

A. $002, 111, 330$**.** Если выполняется равенство, $x_0 + x_4 = 180°$, то $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_4 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие. Если $x_2 + x_3 = 180°$, то $x_0 = 144°$, $x_1 = 120°$, $x_2 = 72°$, $x_3 = 108°$, $x_4 = 96°$, но $S \neq 0$ при данных значениях углов, противоречие.

B. $002, 111, 331$**.** Если $x_0 + x_4 = 180°$, то $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_4 = 60°$. Если $x_2 + x_3 = 180°$, то $x_0 = 150°$, $x_1 = 120°$, $x_2 = 60°$, $x_3 = 120°$, $x_4 = 90°$. В обоих случаях $P \in T_{1a}$, противоречие.

	000	001	110	002	220	330	440
111	$x_0 = x_1$	$x_0 = x_1$	—	330 A 331 B 332 C	330 C 331 $L_{5.4}$ 332 C	—	—
001	$x_0 = x_1$	330 D 331 E 332 T_7	$x_0 = x_1$	—	—	—	330 T_{1a} 331 T_8 332 $L_{5.3}$
110	$x_0 = x_1$	$x_0 = x_1$	330 F 331 G 332 H	I	T_{1a}	—	T_{1b}
112	330 T_6 331 J 332 J	330 T_6 331 K 332 T_7	$x_0 = x_2$	T_{1a}	330 T_6 331 $L_{5.4}$ 332 T_{1b}	T_6	—
221	—	T_{1a}	330 $L_{5.5}$ 331 L 332 C	—	—	$L_{5.5}$	—
331	—	—	—	330 $x_0 = x_1$ 331 M 332 $x_2 = x_1$	$L_{5.4}$	—	—
441	330 N 331 T_2 332 T_8		—	$L_{5.4}$	—	—	—

Таблица 11. $v_0 = v_1 = v_3 = 3$

C. $002, 111, 332$ **или** $022, 111, 332$ **или** $122, 011, 332$ **или** $022, 111, 330$**.** Равенство $x_2 + x_3 = 180°$ не возможно. Если $x_0 + x_4 = 180°$, то $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_4 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие.

D. В этом случае вершинам 0 и 1 отвечает одна и та же метка 001, вершине 3 — метка 330, а вершине 4 может отвечать одна метка из 0144, 1144, 1244, 3444, 4444. Для меток $0144, 1244$ выполняется равенство $x_3 + x_4 = 180°$, значит $P \in T_{1a}$, противоречие.

Так как P — типовая, то $x_0 + x_4 = 180°$ или $x_2 + x_3 = 180°$. Для метки 3444 в первом случае $x_0 = 102,86°$, $x_1 = 154,29°$, $x_2 = 77,14°$, $x_3 = 128,57°$, $x_4 = 77,14°$, но $S \neq 0$; во втором случае $x_0 = 216°$, во всех случаях противоречие. Для метки 4444 в обоих случаях $x_1 = 180°$, противоречие. Для метки 1144 в первом случае $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_4 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$; во втором случае $x_0 = 180°$, противоречие.

E. Единственное отличие от предыдущего случая состоит в том, что вершине 3 отвечает метка 331. Вершине 4 может отвечать одна из перечисленных там меток. Для меток $1144, 1244$ имеем $x_1 = x_2$, далее все решает лемма 21.

Так как P — типовая, то $x_0 + x_4 = 180°$ или $x_2 + x_3 = 180°$. Для метки 4444 в обоих случаях $x_1 = 180°$, противоречие. Для метки 0144 в первом случае $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_4 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие; во втором случае $x_0 = 0°$, противоречие. Для метки 3444 во всех случаях $x_1 = 180°$, противоречие.

F. Здесь вершинам 0 и 1 отвечает метка 110, вершине 3 — метка 330. Считаем, что для P выполняется $x_0 + x_4 = 180°$ либо $x_2 + x_3 = 180°$. В первом случае $x_0 = 360° - 2x_4$, $x_1 = x_4/2$, $x_2 = 180° - x_4$, $x_3 = x_4/2$, где $x_4 > 90°$, но функция $S \neq 0$ при данных значениях углов. Во втором случае $x_4 = x_3 - 180°$, тогда $x_3 > 180°$ либо $x_4 < 0°$, противоречие.

G. Наборы меток в вершинах 0, 1 такие же, что и в предыдущем случае, вершине 3 отвечает метка 331. Вершине 4 отвечает одна из меток: 0044, 0144, 0244, 1244, 2244.

Пусть $0044 \in \mathcal{M}$. Вершине 2 отвечает одна из меток: 0002, 0012, 0022, 0122, 0222, 1222, 2222. Если $0022 \in \mathcal{M}$, то $P \in T_2$. Для меток вида $i122$ получаем $x_i = 0°$. Если одна из меток $0012, 0222$ входит в $\mathcal{M}$, то $x_0 = 51,43°$, $x_1 = 154,29°$, $x_2 = x_3 = 102,86°$, $x_4 = 128,57°$, но $S \neq 0$. Если $0002 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = 83,08°$, $x_1 = 138,46°$, $x_2 = x_3 = 110,77°$, $x_4 = 96,92°$, но $S \neq 0$. Если $2222 \in \mathcal{M}$, то $x_1 = 180°$. Во всех случаях получаем противоречие.

Если одна из меток $0144, 0244$ входит в $\mathcal{M}$, то $x_3 + x_4 = 180°$, значит $P \in T_{1a}$, противоречие. Если $2244 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = x_1$, далее остается применить лемму 21. Для метки 1244, если P — 2-типовая, то $x_2 = -40°$; если P — 1-типовая, то $x_4 = -25,71°$, во всех случаях противоречие.

H. Наборы меток в вершинах 0, 1 такие же, что и в предыдущем случае, вершине 3 отвечает метка 332. Если P — 2-типовая, то $x_1 = x_3 - 180°$, тогда $x_3 > 180°$ либо $x_1 < 0°$; если P — 1-типовая, то $x_3 = 180°$, противоречие.

I. $002, 011$.Если P — 1-типовая, то $x_4 = -x_3/4$, противоречие; если P — 2-типовая, то $x_0 = 360° - 2x_4$, $x_1 = x_4/2$, $x_2 = 360° - 2x_4$, $x_3 = -5x_4/2 + 540°$, противоречие с леммой 11.

J. $000, 112$. Если P — 2-типовая, то $P \in T_{1b}$.

Пусть P — 1-типовая. Если вершине 3 отвечает метка 331, то $x_0 = 120°$, $x_1 = 144°$, $x_2 = 72°$, $x_3 = 108°$, $x_4 = 96°$, но $S \neq 0$, противоречие; если вершине 3 отвечает метка 332, то $x_3 = 180°$, противоречие.

K. $001, 112, 331$. Если P — 2-типовая, то $P \in T_{1b}$. Если P — 1-типовая, то $x_0 = x_3 = x_4 = 108°$, $x_1 = 144°$, $x_2 = 72°$, но $S \neq 0$, противоречие.

L. $011, 122, 331$. Тогда $x_0 + x_4 = 180°$. Вершине 4 отвечает одна из меток: 0044, 0144, 0244, 1244, 2244.

Пусть 0044 — метка вершины 4. Вершине 2 отвечает одна из меток: 0012, 0112, 0122, 0233, 1122, 1222, 2233, 2234. Для меток вида $i122$ получаем $x_i = 0°$, противоречие; для меток вида $i011$ получаем $x_i = 0°$, противоречие, всего таких меток четыре. Если одна из меток $0012, 0233$ входит в $\mathcal{M}$, то $x_0 = 51,43°$, $x_1 = 154,29°$, $x_2 = x_3 = 102,86°$, $x_4 = 128,57°$, но $S \neq 0$, противоречие. Если $2233 \in \mathcal{M}$, то $x_1 = 180°$; если $2234 \in \mathcal{M}$, то $x_1 = 0°$, противоречие.

Для оставшихся меток, отвечающих вершине 4, $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 120°$, $x_4 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие.

M. Здесь вершине 0 отвечает метка 002, вершинам 1 и 3 отвечает одна и та же метка 331, вершине 4 отвечает одна из пяти меток: 0144, 1144, 1244, 3444, 4444. Так как P — типовая, то $x_0 + x_4 = 180°$ или $x_2 + x_3 = 180°$.

Если $0144 \in \mathcal{M}$ или $4444 \in \mathcal{M}$, то $x_0 + x_2$, лемма 20; если $1144 \in \mathcal{M}$, то $x_0 = x_1$, далее лемма 21. Пусть $3444 \in \mathcal{M}$, тогда, если $x_0 + x_4 = 180°$, то $x_0 + x_1 = 180° \Rightarrow P \in T_{1a}$; если $x_2 + x_3 = 180°$, то $x_0 = 147,27°$, $x_1 = 130,91°$, $x_2 = 65,45°$, $x_3 = 114,55°$, $x_4 = 81,82°$, но $S \neq 0$, во всех случаях противоречие.

Метка 1244 является следствием меток 002 и 331. Однако, эта метка не может соответствовать вершине 2, так как она не совместна с метками вершин 1 и 3. Исследуем метки вершины 2. Их всего четыре: 0122, 0222, 1222, 2222. Для метки $0122 \in \mathcal{M}$, если $x_0 + x_4 = 180°$, то $x_0 = 0°$; если $x_2 + x_3 = 180°$, то $x_0 = 154,29°$, $x_1 = x_4 = 102,86°$, $x_2 = 51,43°$, $x_3 = 128,57°$, но $S \neq 0$, во всех случаях противоречие. Для метки $0222 \in \mathcal{M}$, если $x_0 + x_4 = 180°$, то $x_1 = 216°$;

если $x_2+x_3 = 180°$, то $x_3+x_4 = 180° \Rightarrow P \in T_{1a}$, во всех случаях противоречие. Для метки $1222 \in \mathcal{M}$, если $x_0 + x_4 = 180°$, то $x_0 = 0°$; если $x_2 + x_3 = 180°$, то $x_3 + x_4 = 180° \Rightarrow P \in T_{1a}$, во всех случаях противоречие. Для метки $2222 \in \mathcal{M}$ $x_1 = 180°$, противоречие.

N. $000, 144, 330$**.** Если P — 2-типовая, то $x_1 = 240°$, противоречие; если P — 1-типовая, то $x_0 = x_1 = x_3 = x_4 = 120°$, $x_2 = 60° \Rightarrow P \in T_{1a}$, противоречие.

Этим пункт 5.6 исчерпан, который завершает доказательство теоремы 5, а, следовательно, и теоремы 2.

References

[1] O.G. Bagina *Tiling the plane with convex pentagons*, KemSU Bulletin, **4(48)** (2011), 63–73.

[2] O.G. Bagina *Convex pentagons which tile the plane (types: 11112, 11122)*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9** (2012), 478—530. MR3037862

[3] D. Schattschneider *Tiling the Plane with Congruent Pentagons*, Math. Magazine, **51** (1978), 29–44. MR0493766

[4] D. Schattschneider *A new pentagon tiler*, Mathematics Magazine, **58** (1985), 308.

Olga Georgievna Bagina
Kemerovo State University,
Krasnaya Street, 6,
650043, Kemerovo, Russia
E-mail address: ogbag@mail.ru