S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1413–1423 (2017) УДК 517.9
DOI 10.17377/semi.2017.14.120 MSC 60J27

О ГРУППОВЫХ СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЙ ПРОЦЕССОВ ЭПИДЕМИИ

А.В. МАСТИХИН

Abstract. We consider a time-homogeneous Markov process on discret set of states known as Weiss (simple) epidemic process. For exponential (double) generating function of the transition probabilities we consider system of first and second Kolmogorov equations. The system exact solution was obtained by using Lie group methods. We also discuss the opportunity of using the same method in the case of general epidemic process.

Keywords: Markov process, exponential (double) generating function, first and second Kolmogorov equation, Fourier method, simple epidemic, general epidemic, infinitesimal symmetry generator, Lie algebra.

1. Введение

Одной из целей исследования в теории вероятностей и случайных процессов является получение предельной теоремы. В математической теории эпидемий, раздела теории случайных процессов с дискретным числом состояний и непрерывным временем, эта задача может быть разрешима при условии получения точных решений для первого и второго уравнений Колмогорова на экспоненциальную (двойную) производящую функцию переходных вероятностей [1]. Для процессов взаимодействия двух типов частиц эти уравнения обычно имеют гиперболический тип. Наиболее известным процессам эпидемий Вейса и Бартлетта–Мак-Кендрика посвящена обширная литература ([5], [6], [7]). В [2] методом Фурье получено решение системы из первого и второго уравнений Колмогорова эпидемии Вейса. В данной статье уравнения, связанные с процессами эпидемии, рассматриваются с групповой точки зрения [3]. Для гиперболического уравнения с двумя неизвестными получена система из трех

Mastikhin, A.V., On group properties of epidemics equation.

Поступила 18 апреля 2017 г., опубликована 12 декабря 2017 г.

определяющих уравнений, отличная от системы, полученной в [3], для этого используется подход, разработанный в [4]. Делается групповая классификация первого и второго уравнений Колмогорова для процессов эпидемий Вейса и Бартлетта–Мак-Кендрика. На ее основе анализируется решение методом разделения переменных системы уравнений эпидеми Вейса и причины его неприменимости в случае эпидемии Бартлетта–Мак-Кендрика.

2. Процесс эпидемии Вейса

На множестве состояний $N^2 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2, \dots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями

$$P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}.$$

При $t \to 0+$ переходные вероятности имеют вид $(\rho, \mu > 0)$

$$\begin{aligned}
&P_{(\alpha_1,\alpha_2-1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \rho\alpha_1\alpha_2 t + o(t),\\
&P_{(\alpha_1-1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \mu\alpha_1 t + o(t),\\
&P_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1 - (\rho\alpha_1\alpha_2 + \mu\alpha_1)t + o(t),
\end{aligned}$$

здесь ρ и μ — коэффициенты интенсивности взаимодецствий.

Марковский процесс $\xi(t)$ интерпретируется [5, 6] как модель распространения инфекции в популяции с двумя типами особей (частиц). Частицы типа T_1 — переносчики инфекции; частицы типа T_2 — здоровые особи (восприимчивые к инфекции). Состояние процесса (α_1, α_2) означает наличие α_1 частиц типа T_1 и α_2 частиц типа T_2. Через случайное время τ_α^1, $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^1 < t\} = 1 - e^{-\rho\alpha_1\alpha_2 t}$, пара частиц типа T_1 и типа T_2 взаимодействует и превращается в частицу типа T_1. Процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1, \alpha_2 - 1)$.

Кроме того, через случайное время τ_α^2, $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^2 < t\} = 1 - e^{-\mu\alpha_1 t}$, частица типа T_1 умирает и процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 - 1, \alpha_2)$. Случайные величины $\tau_\alpha^1, \tau_\alpha^2$ независимы, в состоянии (α_1, α_2) процесс находится случайное время $\tau_\alpha = \min\{\tau_\alpha^1, \tau_\alpha^2\}$. Далее следует аналогичная эволюция процесса со схемой взаимодействий

$$T_1 + T_2 \to T_1,\ T_1 \to 0.$$

Рассмотрим производящую функцию переходных вероятностей

$$F_\alpha(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}, \quad |s_1| \leqslant 1,\ |s_2| \leqslant 1.$$

Для экспоненциальной (двойной) производящей функции переходных вероятностей

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!} F_\alpha(t; s_1, s_2)$$

первая и вторая системы дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t)$ записываются ([1]) в виде уравнений в частных производных

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}=\mu z_1z_2\Big(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z_1}-\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial z_1\partial z_2}\Big)+\rho z_1\Big(\mathcal{F}-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z_1}\Big), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}=\mu(s_1-s_1s_2)\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial s_1\partial s_1}+\rho(1-s_1)\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial s_1}, \tag{2}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0;z_1,z_2;s_1,s_2)=e^{z_1s_1+z_2s_2}$.

Применим к линейным уравнениям в частных производных второго порядка (1), (2) метод Фурье. Разделение переменных по t приводит к поиску решения в форме ряда

$$\mathcal{F}(t;z;s)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}A_\alpha\widetilde{C}_\alpha(z)C_\alpha(s)e^{-\lambda_\alpha t}. \tag{3}$$

Подставив (3) в уравнения (1) и (2), получаем уравнения для функций $\widetilde{C}_\alpha(z)$ и $C_\alpha(s)$:

$$\mu z_1z_2\left(\frac{\partial\widetilde{C}_\alpha}{\partial z_1}-\frac{\partial^2\widetilde{C}_\alpha}{\partial z_1\partial z_2}\right)+\rho z_1\left(\widetilde{C}_\alpha-\frac{\partial\widetilde{C}_\alpha}{\partial z_1}\right)+\lambda_\alpha\widetilde{C}_\alpha=0; \tag{4}$$

$$\mu(s_1-s_1s_2)\frac{\partial^2C_\alpha}{\partial s_1\partial s_2}+\rho(1-s_1)\frac{\partial C_\alpha}{\partial s_1}+\lambda_\alpha C_\alpha=0; \tag{5}$$

Уравнения (4), (5), а также еще некоторые стационарные уравнения Колмогорова, рассматриваемые при решении задач о финальных вероятностях марковских процессов ([1], [8]), могут быть сведены к одному типу уравнений, рассматриваемому ниже. Для удобства дальнейших вычислений рассмотрим сперва уравнение общего вида и получим для него упрощенный вид системы определяющих уравнений.

3. О виде определяющей системы для гиперболического уравнения от двух переменных.

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$u_{xy}+Au_x+Bu_y+Cu=0. \tag{6}$$

Здесь $A(x,y),B(x,y),C(x,y)$ — функции двух переменных. Для гиперболического уравнения с двумя переменными в [3] доказана классификационная теорема, позволяющая по коэффициентам уравнения определять размерность и вид ее алгебры Ли инфизитимальных операторов. В процессе доказательства была получена система, состоящая из четырех определяющих уравнений, содержащих коэффициенты исходного уравнения и его инварианты Лапласа (см.(4.2), (4.3) [3]). Если воспользоваться техникой получения симметрий [4], мы получим немного более простую систему, эквивалентную исходной. Ниже под симметрией уравнения понимается производящее сечение φ векторного поля инфинитезимальных операторов.

Лемма 1. *Симметрии уравнения (6) имеют вид*

$$\varphi = \alpha(x)p_1 + \beta(y)q_1 + \delta(x,y)u + \gamma, \tag{7}$$

где α, β, γ *удовлетворяют системе следующих уравнений*

(8) 1). $\delta_y - A_x\alpha = \big(A\beta\big)_y$;

2). $\delta_x - B_y\beta = \big(B\alpha\big)_x$;

3). $\delta_{xy} + A\delta_x + B\delta_y = \big(C\alpha\big)_x + \big(C\beta\big)_y$.

Доказательство. Будем рассматривать переменные

$$x, y, u, p_1 = u_x, q_1 = u_y, p_2 = u_{xx}, q_2 = u_{yy}$$

и операторы полного дифференцирования по переменным x и y, имеющее вид, например, $D_x = \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p_1\frac{\partial}{\partial u} + \dots$, а также композицию операторов полного дифференцирования, в общем виде $D_\sigma = D_{i_1} \circ \dots \circ D_{i_k}$, где мультииндекс $\sigma = i_1 \dots i_k,\ k = |\sigma|$.

Определяющее уравнение (см. [4], [3])

$$l_F(\varphi)|_{F=0} = \sum_\sigma \frac{\partial F}{\partial u_\sigma} D_\sigma\varphi = 0,$$

составленное для (6), имеет вид

$$D_{xy}\varphi + AD_x\varphi + BD_y\varphi + C\varphi = 0. \tag{9}$$

Здесь, вообще говоря, φ — функция, зависящая от x, y, u, p_1, q_1. При подстановке в определяющее уравнение, расщепляя его по независимым переменным и рассуждая как в ([4]), получаем уточнение ее вида

$$\varphi = \alpha(x)p_1 + \beta(y)q_1 + \delta(x,y)u + \gamma(x,y),$$

что согласуется с соответствующим видом инфинитезимальных операторов, полученном в классификационной теореме ([3]).

Подставим (7) в (9). Получаем:

$$\begin{gathered}
\delta_{xy} + \gamma_{x,y} + \delta_x q_1 + \alpha_x\big(-Ap_1 - Bq_1 - Cu\big) + \delta\big(-Ap_1 - Bq_1 - Cu\big) + p_1\delta_y + \\
+ \alpha\big[\big(-A_x + AB - C\big)p_1 + \big(-B_x + B^2\big)q_1 + \big(BC - C_x\big)u - Ap_2\big] + \\
+ \beta\big[\big(-A_y + A^2\big)p_1 + \big(AB - B_y - C\big)q_1 + \big(AC - C_y\big)u - Bq_2\big] + \\
+ \beta_y\big(-Ap_1 - Bq_1 - Cu\big) + \\
+ A\big(\alpha_x p_1 + \delta_x u + \gamma_x + \delta p_1 + \alpha p_2 + \beta\big(-Ap_1 - Bq_1 - Cu\big)\big) + \\
+ B\big(\beta_y q_1 + \delta_y u + \gamma_y + \delta q_1 + \beta q_2 + \alpha\big(-Ap_1 - Bq_1 - Cu\big)\big) + \\
+ C\big(\alpha p_1 + \beta q_1 + \delta u + \gamma\big) = 0.
\end{gathered}$$

Сокращая и приводя подобные члены по p_1, q_1 и u и приравнивая их к нулю получаем, соответственно, уравнения 1), 2), 3). Оставшиеся слагаемые дают уравнение на γ,

$$\gamma_{xy} + A\gamma_x + B\gamma_y + C\gamma = 0,$$

то есть γ может быть любым решением (6).

Заметим, что если добавить и вычесть $B_y\alpha$ в уравнении 1) и учесть, что $\alpha_y = 0$, то можно переписать его в виде (для инвариантов Лапласа $h = A_x + B - C$, и $k = B_y + AB - C$)

$$\big(-A\beta - B\alpha + \delta\big)_y = \big(A_x - B_y\big)\alpha = -(h-k)\,\alpha,$$

здесь равенство левой и правой части цепочки и есть первое из уравнений (4.2) из ([3]). Аналогично, из уравнения 2) получается второе уравнение (4.2). Если же из первых двух уравнений выразить (то есть двумя способами) δ_{xy} и подставить в уравнение 3), то получим два уравнения из семейства (4.3). □

4. Групповая классификация уравнений эпидемии Вейса.

Групповую классификацию достаточно провести для первых двух как более общих. Рассмотрим уравнение (4) в обозначениях теоремы 1 и вычислим группу Ли, допускаемую этим дифференциальным уравнением ($\lambda = \lambda_\alpha$).

$$u_{xy} + \Big(\frac{\rho}{\mu y} - 1\Big)u_x - \Big(\frac{\rho}{\mu y} + \frac{\lambda}{\mu x y}\Big)u = 0.$$

Теорема 1. *Группа Ли уравнения (4) обладает четырехмерным базисом из инфинитезимальных операторов*

$$X_1 = -(\lambda \ln x + \rho x)\frac{x}{\lambda + \rho x}\frac{\partial}{\partial x} + y\ln y\frac{\partial}{\partial y} + \big(y - \frac{\rho}{\mu}\big)\ln y u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_2 = \frac{x}{\lambda + \rho x}\frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = -y\ \frac{\partial}{\partial y} - yu\ \frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Доказательство. Третье уравнение системы (8) при заданных коэффициентах уравнения (4)

$$A = \frac{\rho}{\mu y} - 1,\ B = 0,\ C = \frac{\rho}{\mu y} + \frac{\lambda}{\mu x y}$$

после некоторого преобразования имеет вид

$$\frac{\lambda}{x(\lambda + \rho x)}\alpha + \alpha_x = \frac{1}{y}\beta - \beta_y = C_1,$$

так как по теореме 1 α и β зависят соответственно от x и y. Приравнивая к константе C_1 по отдельности каждую часть, получим

$$\alpha = C_1(\lambda \ln x + \rho x)\frac{x}{\lambda + \rho x} + C_2\frac{x}{\lambda + \rho x},\ \beta = -C_1 y \ln y + C_3 y.$$

Подставляя в первое уравнение системы (8) после упрощения получим

$$\delta = C_1\big(y - \frac{\rho}{\mu}\big)\ln y - C_3 y + C_2,$$

здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные константы. Выписывая по константам симметрии и соответстующие им инфинитезимальные операторы получаем утверждение теоремы.

□

Инфинитезимальные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 составляют базис четырехмерной алгебры Ли L_4 с таблицей умножения

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	X_2	$-X_3-\frac{\rho}{\mu}X_4$	0
X_2	$-X_2$	0	0	0
X_3	$X_3+\frac{\rho}{\mu}X_4$	0	0	0
X_4	0	0	0	0

Полагая $\lambda_\alpha = 0$ в полученных выше уравнениях (4) и (5) мы можем получить из них стационарные второе и первое уравнения Колмогорова для эпидемии Вейса, изучавшиеся в [1]. Пусть $\lambda = 0$. Тогда базисные операторы

$$X_1 = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\ln y\frac{\partial}{\partial y} + \big(y - \frac{\rho}{\mu}\big)\ln yu\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_2 = -\frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = -y\ \frac{\partial}{\partial y} - yu\ \frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = u\frac{\partial}{\partial u}$$

обладают той же таблицей умножения. Уравнение (4) принимает вид

$$u_{xy} + \Big(\frac{\rho}{\mu y} - 1\Big)u_x - \frac{\rho}{\mu y}u = 0$$

и замена $v = y^{\frac{\rho}{\mu}}e^{-y}u$ приводит его к виду ([8])

$$v_{xy} - \frac{\mu}{\rho y}v = 0. \tag{10}$$

Следствие 1. *Для уравнения (10) инфинитезимальные операторы, составляющие базис алгебры Ли имеют вид*

$$X_1 = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\ln y\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = -\frac{\partial}{\partial x}, X_3 = -y\ \frac{\partial}{\partial y},\ X_4 = u\frac{\partial}{\partial u}$$

с таблицей

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	X_2	$-X_3$	0
X_2	$-X_2$	0	0	0
X_3	X_3	0	0	0
X_4	0	0	0	0

Доказательство. Операторы также могут получены непосредственно из леммы. □

Рассмотрим уравнение (5). Запишем его в виде

$$u_{xy} + \frac{\rho}{\mu}\frac{(1-x)}{x(1-y)}u_x + \frac{\lambda}{\mu x(1-y)}u = 0. \tag{11}$$

Вычислим группу Ли, допускаемую этим дифференциальным уравнением.

Теорема 2. *Группа Ли уравнения (11) обладает двухмерным базисом из инфинитезимальных операторов*

$$X_1 = (1-y)\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Доказательство. Третье уравнение системы (8) при заданных коэффициентах уравнения (11)

$$A = \frac{\rho}{\mu}\frac{(1-x)}{x(1-y)},\ B = 0,\ C = \frac{\lambda}{\mu x(1-y)}$$

после некоторого преобразования имеет вид

$$\frac{1}{x}\ \alpha + \alpha_x = \frac{1}{1-y}\beta - \beta_y = C_1,$$

так как по теореме 1 α и β зависят соответственно от x и y. Приравнивая к константе C_1 по отдельности каждую часть, получим

$$\alpha = C_1 x\ln x + C_2 x,\ \beta = C_1(y-1)\ln(y-1) + C_3(y-1).$$

Подставляя в первое уравнение системы (8) после упрощения получим

$$(1-y)\delta_y = C_1\frac{\rho}{\mu}\ln x - C_2\frac{\rho}{\mu}\frac{1}{x} + C_1\frac{\rho}{\mu}\frac{1-x}{x},$$

откуда следует тривиальность $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, окончательно получаем

$$\alpha = 0,\ \beta = C_3(y-1),\ \delta = C_4.$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные константы. Выписывая по константам симметрии и соответстующие им инфинитезимальные операторы получаем утверждение теоремы. Инфинитезимальные операторы X_1, X_2 составляют базис двумерной алгебры Ли L_4 с нулевым умножением. □

5. Разделение переменных

В качестве приложения результатов предыдущего пункта приведем групповое обоснование полученного в [2] (и обобщенного в [9]) решения нестационарного уравнения эпидемии Вейса.

Согласно известному алгоритму [3] разделение переменных возможно, если существует такая инвариантная относительно уравнения подгруппа Ли и такое представление ее универсального инварианта $J = (J_1; J_2)$ в котором компонента $\overline{x} = J_1(x)$ зависит только от одной переменной и уравнение $\overline{y} = J_2(x, y)$ разрешено относительно $y = v(x, \overline{y})$. В этом случае вид инвариантного решения $y = v(x, \overline{u}(\overline{x}))$, где $\overline{x} = J_1(x)$. Рассмотрим уравнения (4), (5) и найденные инфинитезимальные операторы. Для них такие условия выполняются.

Следствие 2. *Решения в методе разделения переменных для системы уравнений (5) и (4) для уравнения Вейса имеют вид*

$$C_\alpha = \left(s_1 - \frac{\rho}{\mu\alpha+\rho}\right)^{\frac{\lambda}{\mu\alpha+\rho}}(1-s_2)^{\alpha_2}$$

и

$$\widetilde{C}_\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} e^{z_2 + \frac{\rho}{\rho+\alpha_2\mu}z_1}$$

соответственно.

Доказательство. Для (5) выберем $X_1 = (1-s_2)\frac{\partial}{\partial s_2}$, $X_1 = u\frac{\partial}{\partial u}$. Возьмем линейную комбинацию $\alpha X_1 + X_2$. Найдем универсальный инвариант как решение уравнения в частных производных $(\alpha X_1 + X_2)|_J = 0$, т.е.

$$\alpha\frac{ds_2}{1-s_2} = \frac{dC}{C}.$$

Получаем решение, которое, вместе с s_1, также удовлетворяющим уравнению, дают универсальный инвариант

$$J = (s_1; C(1-s_2)^{-\alpha}).$$

Подстановка $C = u(s_1)(1-s_2)^{\alpha}$ в уравнение (5) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u'(\rho(1-s_1) - \mu\alpha s_1) = -\lambda u,$$

λ_α — собственное число оператора $(\rho(1-s_1)-\mu\alpha s_1)\dfrac{\partial}{\partial s_1}$ с собственным вектором

$$u_\alpha = \Big(s_1 - \frac{\rho}{\mu\alpha+\rho}\Big)^{\frac{\lambda}{\mu\alpha+\rho}}.$$

Так как, по условий на скачки процесса $\xi(t)$, это многочлен, то $\dfrac{\lambda}{\mu\alpha+\rho} = \alpha_1 \in \mathbb{N}$ и $\lambda = \lambda_\alpha = \alpha_1(\mu\alpha+\rho)$, кроме того,$-\alpha = \alpha_2 \in \mathbb{N}$, в итоге,

$$C_\alpha = \Big(s_1 - \frac{\rho}{\mu\alpha+\rho}\Big)^{\frac{\lambda}{\mu\alpha+\rho}}(1-s_2)^{\alpha_2}.$$

Для первого уравнение Колмогорова для уравнения Вейса рассмотрим два его генератора $X_3 = -z_2\frac{\partial}{\partial z_2}, X_4 = \widetilde{C}\frac{\partial}{\partial \widetilde{C}}$. Возьмем их линейную комбинацию $-X_3+\alpha_2X_4$. Найдем универсальный инвариант как решение уравнения в частных производных $(-X_3+\alpha_2X_4)|_J = 0$, т.е.

$$\frac{dz_2}{z_2} = \frac{d\widetilde{C}}{\widetilde{C}(\alpha_2+z_2)}.$$

Получаем решение, которое, вместе с z_1, также удовлетворяющим уравнению, дают универсальный инвариант

$$J = (z_1; \widetilde{C}z_2^{-\alpha_2}e^{-z_2}).$$

Подстановка $\widetilde{C} = u(z_1)z_2^{\alpha_2}e^{z_2}$ в уравнение (4) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u'\Big(-\alpha + \frac{\rho}{\mu}\Big) = u\Big(\frac{\rho}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu z_1}\Big),$$

Получаем $u = e^{\frac{\rho}{\rho+\alpha_2\mu}z_1} z_1^{\frac{\lambda}{\rho+\alpha_2\mu}}$ и $\widetilde{C}_\alpha = z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}e^{z_2+\frac{\rho}{\rho+\alpha_2\mu}z_1}$. □

6. Точное решение в интегральной форме

Значения A_α определяются из сравнения начального условия с разложением для экспоненты [2]. Таким образом, искомый ряд (3) имеет вид

$$\mathcal{F}(t;z;s) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty}\Big(s_1 - \frac{\rho}{\mu\alpha_2+\rho}\Big)^{\alpha_1}(s_2-1)^{\alpha_2}\frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\frac{z_2^{\alpha_2}}{\alpha_2!}e^{z_1\frac{\rho}{\mu\alpha_2+\rho}+z_2}e^{-\lambda_\alpha t}, \tag{12}$$

здесь $\alpha = (\alpha_1\alpha_2)$.

Определим функцию $(x>0,\ y>0)$

$$H(x,y) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ux})J_0(2\sqrt{vy})\,{}_0F_2(1,1;-uv)\,dudv, \tag{13}$$

где $J_0(z)$ функция Бесселя нулевого порядка и ${}_0F_2(1,1;z)$ обобщенная гипергеометрическая функция,

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!k!},$$
$${}_0F_2(1,1;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^3}.$$

Теорема 3. [10] *Для процесса эпидемии Вейса производящая функция переходных вероятностей имеет вид ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$)*

$$F_\alpha(t; s_1, s_2) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \Big((s_1 e^{-(x+\mu)t})^{\alpha_1} (1 - e^{-y} + s_2 e^{-y})^{\alpha_2} + \int_0^\infty \Big(\frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} \varphi_1^{\alpha_1}(t; x, u; s_1) \varphi_2^{\alpha_2}(y, v; s_2) e^{(u-\mu)v} du \Big) dv \Big) H(x, y)\, dxdy, \tag{14}$$

где $\varphi_1(t; x, u; s_1)$, $\varphi_2(y, v; s_2)$ линейны по переменным s_1, s_2:

$$\varphi_1(t; x, u; s_1) = \mu(1 - e^{-(x+\mu)t})/u + s_1 e^{-(x+\mu)t},$$
$$\varphi_2(y, v; s_2) = 1 - e^{-y-v} + s_2 e^{-y-v}.$$

Из вида производящей функции в [10] получены предельная теорема и дальнейшие следствия.

7. Замечание об уравнении процесса общей эпидемии

В математической теории эпидемий базовыми примерами являются эпидемия Бартлетта-Мак-Кендрика ([7]), т.е. общая эпидемия и (простая) эпидемия Вейса. В общей эпидемии пара взаимодействующих частиц двух типов (инфицированная частица переносчик инфекции и частица, восприимчивая к инфекции), взаимодействуя, переходят в пару инфицированных частиц. Схема взаимодействий $T_1 + T_2 \to 2T_1$, $T_1 \to 0$. Так естественно определяемый процесс, тем не менее, оказывается достаточно сложным для исследования. Рассмотрим причины этого с точки зрения групповых свойств уравнений Колмогорова. Для двойной экспоненциальной производящей функции переходных вероятностей система из второго и первого уравнений Колмогорова имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda_1 \big(s_1^2 - s_1 s_2\big) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2 \big(1 - s_1\big) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda_1 z_1 z_2 \Big(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2} \Big) + \lambda_2 z_1 \Big(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} \Big), \tag{16}$$

Достаточно рассмотреть стационарные уравнения. Начнем со второго стационарного уравнения Колмогорова. Тогда из определения процессов в силу наличия поглощающих состояний возникают граничные условия. Для простой эпидемии они задаются на характеристиках, а для общей, — на характеристике и на нехарактеристической прямой. Получаем задачу Гурса. Подробнее рассмотрим само уравнение.

После приведения к характеристическим координатам при помощи замены $[x = z_1 + z_2,\ y = z_2]$ получаем

$$u_{xy} + \frac{\rho}{\mu y} u_x + \frac{\rho}{\mu y} u = 0,$$

уравнение, которое после замены $v = y^{\frac{\rho}{\mu}} u$ получает вид (10). Таким образом, для процессов эпидемии простой и общей эпидемии вторые уравнения Колмогорова на экспоненциальную производящую функцию совпадают. Отличаются граничные условия. Стационарное первое уравнение Колмогорова имеет канонический вид

$$u_{xy} + \rho \frac{1-x}{x(1-y)} u = 0 \tag{17}$$

Найдем алгебры Ли для обоих уравнений при помощи леммы.

Следствие 3. *Для уравнений (10) и (17) базис инфинитезимальных операторов имеет вид*

$$X_1 = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\ln y\frac{\partial}{\partial y}, X_2 = -\frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = -y\ \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\rho}{\mu y} yu\ \frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = u\frac{\partial}{\partial u}$$

для первого, и $X_1 = u\partial_u$ *для второго, то есть алгебры Ли соответственно четырехмерная* L_4 *и одномерная* L_1

Доказательство. Решая систему уравнений из леммы, приходим к требуемому утверждению. □

Метод функции Римана, применявшийся к решению задачи Гурса первого уравнения (см. [12])не дал результатов для общей эпидемии ввиду неинвариантности граничного условия ([11]). Отметим, что мы не приводим уравнения, появляющиеся в методе Фурье для общей эпидемии, поскольку они отличаются от рассмотренных одним слагаемым, как видно из сравнения (1) и (2) с (4) и (5), алгебры Ли имеют ту же структуру, что и в следствии. В методе разделения переменных, применяемом к системе уравнений препятствием является одномерность алгебры Ли для второго уравнения.

References

[1] A.V. Kalinkin, *Markov Branching processes with interaction*, Uspekhi Mat. Nauk, **57**:2 (2002), 23–84. MR1918194

[2] A.V. Kalinkin, *Final probabilities for a branching process with interaction of particles and an epidemic process*, Theory Probab. Appl., **43** (1998), 773–780. Zbl 0956.60093

[3] L.V. Ovsiannikov, *Group analysis of differential equations*, Academic press, 1982. MR0668703

[4] Edit. Vinogradov A.M. and Krasilschik I.S., *Symmetries and conservatings laws of partial differential equations*, M.: FactorialPress, 2005. (In Russian)

[5] G. Weiss, *On the spread of epidemics by carries*, Biometrics, **21**:2 (1965), 481–490.

[6] J. Gani, *Approaches to the modelling of AIDS*, Stochastic processes in epidemic theory, Lecture notes in biomathematics, **86**, Heidelberg: Springer, (1990), 145–154. Zbl 0709.92019

[7] M.S. Bartlett, *Some evolutionary stochastic processes*, J. of Royal Statistical Society. Series B (Methodological), **11** (1949), 211–229. MR0034976

[8] A.V. Mastikhin, *Final distribution for the Markov process of the Gani epidemics*, Math. Notes, **82**:6 (2004), 787–797.

[9] A.V. Mastikhin, *Final probabilities for Becker epidemic Markov process*, Theory Probab.Appl., **56**:3 (2012), 521–527. MR3136468

[10] A.V. Kalinkin, A.V. Mastikhin, *A limit theorem for a Weiss epidemic*, J. Appl. Prob. **52**:1 (2015), 247–257. MR3336859

[11] N.H. Ibragimov, *Tranformation groups applied to mathematical physics*, Riedel, Dortrecht, 1985. MR0785566

[12] A.V. Mastikhin, *Riemann function for some Kolmogorov equations*, Injenerny vestnik MGTU, Electronny jurnal. Priborostroenie, **12** (2014). (In Russian)

Anton Vyacheslavovich Mastikhin
Bauman Moscow State Technical University,
ul. Baumanskaya 2-ya, 5/1,
105005, Moscow, Russia
E-mail address: mastikhin@bmstu.ru