S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1424–1433 (2017) УДК 512.542

DOI 10.17377/semi.2014.14.121 MSC 20D06, 20D15

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ДВУХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ С ЦОКОЛЕМ $\Omega_8^+(2)$, $E_6(2)$ ИЛИ $E_7(2)$

В.И. ЗЕНКОВ

Abstract. Let G be a finite group with the socle $\Omega_8^+(2)$, $E_6(2)$ or $E_7(2)$. In this paper, it is given a description of all pairs (A, B) of nilpotent subgroups A and B of G such that $A \bigcap B^g \neq 1$ for any $g \in G$.

Keywords: finite group, nilpotent subgroup, intersection of subgroups.

Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Рассмотрим множество M всех пересечений вида $A \bigcap B^g$, где $g \in G$. Определим в этом множестве два подмножества. Подмножество $M_G(A, B)$ — множество всех минимальных по включению элементов из M и $m_G(A, B)$ — множество всех минимальных по порядку элементов из M. По определению $m_G(A, B) \subseteq M_G(A, B)$. Пусть $Min_G(A, B) = \langle M_G(A, B)\rangle$ и $min_G(A, B) = \langle m_G(A, B)\rangle$. Тогда $min_G(A, B) \leq Min_G(A, B)$. В некоторых случаях $m_G(A, B) \subset M_G(A, B)$ и $min_G(A, B) < Min_G(A, B)$. Рассмотрим, например, группу $G = \Sigma_4$, в которой $A \in Syl_2(G)$ и $C_4 \simeq B < A$. Тогда $M_G(A, B) = \{B, \langle t\rangle^f, \langle t\rangle^{f^2}\}$, где t — инволюция из B и f — элемент порядка три из G, а $m_G(A, B) = \{\langle t\rangle^f, \langle t\rangle^{f^2}\}$. Следовательно, $m_G(A, B) \subset M_G(A, B)$ и $min_G(A, B) = O_2(G) < A = Min_G(A, B)$. Отметим, что в простой неабелевой группе G для примарных подгрупп A и B согласно [1, теорема 1] имеем $min_G(A, B) = Min_G(A, B) = 1$.

Zenkov, V.I., On intersection of two nilpotent subgroups in finite group with socle $\Omega_8^+(2)$, $E_6(2)$ or $E_7(2)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 15-11-10025), теоремы 1-5, и Программы поддержки ведущих научных университетов России (соглашение 02.A03.21.0006 от 27.08.2013) (теорема 6).

Поступила 21 ноября 2017 г., опубликована 12 декабря 2017 г.

В указанном выше примере подгруппа A неабелева и $Min_G(A,B) \nleq O_2(G) = F(G)$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. В работе [2, теоремы 1 и 2] доказано, что в любой конечной группе G для абелевых подгрупп A и B имеем $Min_G(A,B) \leq F(G)$. Однако, уже в случае неабелевых примарных подгрупп A и B имеются примеры конечных неразрешимых групп G, в которых $Min_G(A,B) \nleq F(G)$, например $G = Aut(L_2(7))$. Выше уже отмечено, что такая группа не может быть простой, а в работе [3, теорема B(2б)] доказано, что в почти простой группе это возможно лишь для p-подгрупп A и B при $p=2$ или $p=3$. Полное описание с точностью до сопряженности всех пар (A,B) 3-подгрупп A и B конечной почти простой группы G с условием $min_G(A,B) \neq 1$ (а тем более $Min_G(A,B) \neq 1$) приведено в [4, теорема 2]. В работе [5, теорема 2] в группе G с цоколем $L_n(2)$ также с точностью до сопряженности приведено описание всех пар 2-подгрупп A и B с условием $min_G(A,B) \neq 1$. А в работе [6] в группе G с цоколем $L_2(q)$, где $q > 3$, с точностью до сопряженности приведено описание всех пар (A,B) нильпотентных подгрупп A, B с условием $min_G(A,B) \neq 1$. В настоящей работе приводится описание в группе G с цоколем $\Omega_8^+(2)$, $E_6(2)$ или $E_7(2)$, как и выше, с точностью до сопряженности, всех пар (A,B) нильпотентных подгрупп с условием $min_G(A,B) \neq 1$.

В теореме 1 приводится описание подгруппы $min_G(S,S)$ при условии $min_G(S,S) \neq 1$ для силовской 2-подгруппы S конечной группы G с цоколем $\Omega_8^+(2)$, на основе которой в теореме 2 дается описание всех пар (A,B) нильпотентных подгрупп в этой группе G с условием $min_G(A,B) \neq 1$.

В теореме 3 приводится описание подгруппы $min_G(S,S)$ для силовской 2-подгруппы S конечной группы G с цоколем $E_6(2)$, на основе которой в теореме 5 дается описание всех пар (A,B) нильпотентных подгрупп в этой группе с условием $min_G(A,B) \neq 1$.

В теореме 4 доказано, что для конечной группы G с цоколем $E_6(2)$ нильпотентные подгруппы A и B с условием $min_G(A,B) \neq 1$ являются 2-подгруппами.

В теореме 5 для конечной группы G с цоколем $E_6(2)$ приведено описание с точностью до сопряженности всех пар (A,B) нильпотентных подгрупп A и B с условием $min_G(A,B) \neq 1$.

В теореме 6 доказано, что в конечной группе с цоколем $E_7(2)$ для любых нильпотентных подгрупп A и B из G имеем $min_G(A,B) = 1$.

Приведем формулировки этих теорем.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа с цоколем $\Omega_8^+(2)$, S —силовская 2-подгруппа в G и P – параболическая подгруппа вида $2^{3+6} : L_3(2)$ из $Soc(G)$ такая, что $S \leq N_G(P)$. Если $min_G(S,S) \neq 1$, то $G \simeq \Omega_8^+(2) : 2$ и $min_G(S,S) = O_2(P)\langle\tau\rangle$, где τ — инволюция, индуцирующая графовый автоморфизм на $Soc(G)$.*

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, $Soc(G) = \Omega_8^+(2)$, S —силовская 2-подгруппа в G, A и B — нильпотентные подгруппы в G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $min_G(A,B) \neq 1$;

(2) с точностью до сопряженности $(A,B) = (A_1,B_1)$, где A_1 и B_1 — надгруппы в S подгруппы $min_G(S,S)$.

Теорема 3. *Пусть G — конечная группа с цоколем $E_6(2)$, S —силовская 2-подгруппа в G и P – параболическая подгруппа вида $2^{24}|\Omega_8^+(2)$ из $Soc(G)$ такая, что $S \leq N_G(P)$. Если $min_G(S,S) \neq 1$, то $G \simeq Aut(E_6(2))$, для $M =$*

$N_G(P)$ имеем $\overline{M} = M/O_2(M) \simeq \Omega_8^+(2) : 2$ и подгруппа $min_G(S,S)$ совпадает с полным прообразом в M подгруппы $min_{\overline{M}}(\overline{S},\overline{S})$, описанной в теореме 1.

Теорема 4. *Пусть G — конечная группа с цоколем $E_6(2)$, A и B — нильпотентные подгруппы из $E_6(2)$. Если $min_G(A,B) \neq 1$, то A и B — 2-подгруппы в G.*

Теорема 5. *Пусть G — конечная группа с цоколем $E_6(2)$, S —силовская 2-подгруппа в G, A и B — нильпотентные подгруппы в G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $min_G(A,B) \neq 1$;

(2) с точностью до сопряженности $(A,B) = (A_1,B_1)$, где A_1 и B_1 — надгруппы в S подгруппы $min_G(S,S)$, где подгруппа $min_G(S,S)$ описана в теореме 4.

Теорема 6. *Пусть G — конечная группа с цоколем $E_7(2)$, A и B — нильпотентные подгруппы в G. Тогда $min_G(A,B) = 1$*

1. Обозначения и предварительные сведения

Обозначения, в основном, общепринятые. Их можно найти в [7] или [8].

Лемма 2.1 [2, теорема 1]. *Пусть G — конечная группа, A и B — абелевы подгруппы из G. Тогда $\min_G(A,B) \leq \mathrm{Min}_G(A,B) \leq F(G)$.*

Лемма 2.2 [9, лемма 2.1]. *Пусть G — конечная группа, A — циклическая подгруппа из G, B — нильпотентная подгруппа из G. Тогда $\min_G(A,B) \leq \mathrm{Min}_G(A,B) \leq F(G)$.*

Лемма 2.3 [1, теорема 1]. *Пусть G — конечная простая неабелева группа, A и B — примарные подгруппы из G. Тогда $\mathrm{Min}_G(A,B) = \min_G(A,B) = 1$.*

Лемма 2.4 [6, теорема 2]. *Пусть G — конечная неразрешимая группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, A и B — нильпотентные подгруппы из G и $\min_G(A,B) \neq 1$. Тогда A и B — 2-подгруппы и либо $q = 9$, либо q — простое число Мерсенна.*

Лемма 2.5 [3, лемма 3.2]. *Пусть G — конечная группа, p — простое число и M — p-локальная подгруппа из G такая, что $M = N_G(O_p(M))$. Если в M найдутся две силовские p-подгруппы Q_1 и Q_2 такие, что $Q_1 \cap Q_2 = O_p(M)$, то в G найдутся две силовские p-подгруппы P_1 и P_2 такие, что $P_1 \cap P_2 = O_p(M)$, $P_1 \geq Q_1$ и $P_2 \geq Q_2$.*

Лемма 2.6 [10, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, G_1, A и B — подгруппы из G такие, что G_1 содержит A. Если $G_1 \trianglerighteq G_2$, и $G_2 \bigcap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, причем в факторгруппе $\bar{G}_1 = G_1/G_2$ имеем $\overline{A} \bigcap \overline{(G_1 \bigcap B^g)}^{\bar{g}_1} = \bar{1}$ для некоторого элемента $g_1 \in G_1$, то $A \bigcap B^{gg_2} = 1$ для любого элемента g_2 из смежного класса g_1G_2.*

2. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Так как по условию этой теоремы $min_G(S,S) \neq 1$, то из [3, теорема B(2б)] следует, что $G = Soc(G)\langle\tau\rangle$, где τ — инволюция, индуцирующая графовый автоморфизм на $Soc(G)$. Согласно [7, с. 85] τ переставляет параболические максимальные подгруппы P_1 и P_2 из $Soc(G)$, для которых $P_1 \simeq P_2 \simeq 2^6 : L_4(2)$ и $P = P_1 \bigcap P_2 \simeq 2^{3+6} : L_3(2)$, где $O_2(P)$ — специальная группа с центром порядка 8. Так как $C_G(\tau) \simeq C_2 \times Sp_6(2)$, а в $Sp_6(2)$ найдется пара силовских 2-подгрупп, пересекающихся по единице, то по лемме 2.5 можно считать, что $S \bigcap S^g = \langle\tau\rangle$ для некоторого g из G. Следовательно, $\langle\tau\rangle \leq min_G(S,S)$. К тому же, согласно [4, лемма 6] для корневых подгрупп X_{r_1} и X_{r_2} порядка два, лежащих в параболических подгруппах P_1 и P_2 соответственно, для подгруппы $U = S \bigcap Soc(G)$ имеем $U \bigcap U^n = X_{r_i}$ для некоторого $n \in Soc(G)$ и $< X_{r_i}^U >= O_p(P_i) \simeq E_{2^6}$. Так как $O_2(P) \simeq 2^{3+6}$ и τ нормализует $O_2(P)$, то τ нормализует $Z(O_2(P)) \simeq E_{2^3}$.

Отсюда следует, что $X_{r_i} \nleq Z(O_2(P))$, иначе $\langle X_{r_i}^U \rangle \leq Z(O_2(P)) \simeq E_{2^3}$. Рассмотрим подгруппу $X_{r_i}^{u\tau}$, где $u \in U$. Поскольку $O_2(P_i) \lhd U$ и $Z(O_2(P)) = O_2(P_1) \bigcap O_2(P_2) \lhd U$, то $(X_{r_i}^u)^\# \subset O_2(P_i) \backslash Z(O_2(P))$. Но тогда $X_{r_i}^{u\tau} \subset ((O_2(P_i^\tau))^\# \backslash Z(O_2(P))$. Таким образом, $(X_{r_i}^{u\tau})^\# \subset O_2(P_i) \setminus O_2(P_{\bar{i}})$, где $\{1,2\} = \{i,\bar{i}\}$. Следовательно, $C_S(X_{r_i}) = C_U(X_{r_i})$ для $i = 1,2$ и $X_{r_i}^\tau = (U \bigcap U^n)^\tau = S \bigcap S^{n\tau}$. Значит, $X_{r_i}^\tau = X_{r_{\bar{i}}} \leq min_G(S,S)$. Поэтому $\langle X_{r_i}^U \rangle = O_2(P_i) \leq min_G(S,S)$, откуда $O_2(P) = \langle O_2(P_1), O_2(P_2)\rangle \leq min_G(S,S)$ и $O_2(N_G(P)) = O_2(P)\langle\tau\rangle \leq min_G(S,S)$. Докажем, что $O_2(P)\langle\tau\rangle = min_G(S,S)$. Допустим, что $D = S \bigcap S^x \in m_G(S,S)$ $(x \in G)$ и $D \nleq O_2(P)\langle\tau\rangle = O_2(N_G(P)) = O_2(N)$ для $N = N_G(P)$. Так как $|D| = 2$ и $D \nleq O_2(N)$, то $O_2(N) \bigcap S^x = 1$. Положим $S_1 = N \bigcap S^x$. Тогда в факторгруппе $\overline{N} = N/O_2(N) \simeq L_3(2)$, имеем $\overline{S} \bigcap \overline{S_1} = \overline{1}$, поскольку $\overline{S}$ и $\overline{S_1}$ — 2-подгруппы из N. По лемме 2.6 имеем $S \bigcap S^t = 1$ для некоторого t из G. Противоречие с [3, теорема B(2б)]. Значит, $m_G(S,S) \leq O_2(P)\langle\tau\rangle$ и, таким образом, $m_G(S,S) = O_2(P)\langle\tau\rangle$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем, что из (1) следует (2). Так как по условию этой теоремы $min_G(A,B) \neq 1$, то согласно [11, теорема 2] подгруппы A и B являются 2-подгруппами. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что A и B лежат в S. Так как $min_G(A,B) \neq 1$, то, тем более $min_G(S,S) \neq 1$. Тогда из [3, теорема B(2б)] следует, что $G = Soc(G)\langle\tau\rangle$, где τ — инволюция, индуцирующая графовый автоморфизм на $Soc(G)$. Согласно [7, с. 85] можно выбрать τ так, чтобы $C_G(\tau) \simeq C_2 \times Sp_6(2)$. Тогда по лемме 2.5 можно считать, что $S \bigcap S^g = \langle\tau\rangle$ для некоторого g из G. Следовательно, $\langle\tau\rangle = S \bigcap S^g \geq A \bigcap B^g \neq 1$. Тогда $2 = |\tau| = |S \bigcap S^g| \geq |A \bigcap B^g| \geq 2$. Поэтому для любого $D \in m_G(A,B)$ имеем $|D| = 2$. Поэтому для любого $D_1 \in m_G(S,S)$ имеем $D_1 \in m_G(A,B)$. Следовательно, $min_G(S,S) \leq min_G(A,B) \leq A$. Аналогично $min_G(S,S) \leq min_G(B,A) \leq B$. Поэтому A и B являются надгруппами $min_G(S,S)$. Следовательно, импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказана.

Докажем, что из (2) следует (1).Для этого достаточно доказать, что $min_G\,(min_G(S,S), min_G(S,S)) \neq 1$. Предположим противное. Тогда $min_G(S,S) = O_2(N)$ для $N = O_2(N_G(P))$ и, следовательно, $O_2(N_G(P)) \bigcap (O_2(N_G(P))^x = 1$ для некоторого x из G. Кроме того, $S \bigcap S^n = O_2(N)$ для некоторого n из

N. Тогда согласно [3, лемма 3.1] для некоторой силовской подгруппы S_1 из $(N_G(P))^x$ имеем $S \bigcap S_1 \leq O_2(N) \bigcap (O_2(N))^x = 1$. Противоречие с [3, теорема В(2б)]. Следовательно, импликация (2) $\Rightarrow$ (1) доказана.

Теорема 2 доказана.

3. Доказательства теорем 3, 4 и 5

Доказательство теоремы 3. Согласно [7, с.191] имеем $|Out(E_6(2))| = 2$. Если $G = Soc(G) = E_6(2)$, то согласно [1, теорема 1] $min_G(S,S) = 1$, противоречие. Поэтому $G \simeq Aut(E_6(2))$.

Если в схеме Дынкина для $E_6(2)$ отбросить крайнюю правую (соответственно левую) вершину, то оставшаяся подсхема будет соответствовать параболической подгруппе P_1, (соответственно P_2) с $O_2(P_i) \simeq E_{2^{16}}$ для $i = 1, 2$ и фактором Леви $\overline{P_i} = P_i/O_2(P_i) \simeq \Omega^+_{10}(2)$. Инволюция τ из G, индуцирующая графовый автоморфизм на $Soc(G) = E_6(2)$ переводит P_1 в P_2. Согласно [7, с.191] имеем $P := P_1 \bigcap P_2$ — параболическая подгруппа с $|O_2(P)| = 2^{24}$ и фактором Леви $L \simeq \overline{P} = P/O_2(P) \simeq \Omega^+_8(2)$, допустимая относительно τ, причем $N_G(P)$ — максимальная подгруппа в G.

Если корни $r_1, ..., r_6$ в схеме Дынкина для $E_6(2)$ пронумерованы стандартным образом (см. [12, с. 5]), то согласно [4, лемма 5] для корневой подгруппы X_{r_i} и подгруппы $U = S \bigcap Soc(G)$ имеем $X_{r_i} = U \bigcap U^n$ для некоторого элемента n из G и по [4, лемма 6] $O_2(P_1) = \langle X^U_{r_1} \rangle$. Так как $P^\tau_1 = P_2$ и $X^\tau_{r_1} = X_{r_6}$, то $O_2(P_2) = \langle X^U_{r^6} \rangle$. Подгруппы X_{r_1} и X_{r_6} не лежат в $Z(O_2(P)) = O_2(P_1) \bigcap O_2(P_2)$. Следовательно, для любого элемента $g = u\tau$, где $u \in U$, имеем $X^g_{r_1} = X^{u\tau}_{r_1} = (X^u_{r_1})^\tau$, где $X^u_{r_1} \nleq Z(O_2(P))$, но $X^u_{r_1} \leq O_2(P_2)$. Но тогда $X^{u\tau}_{r_1} \nleq Z(O_2(P))$ и $X^{u\tau}_{r_1} \leq O_2(P_2)$. Значит, $[X_{r_1}, \langle u\tau \rangle] \neq 1$ для любого элемента $u \in U$. Отсюда $S \bigcap S^n \geq S \bigcap S^n \bigcap Soc(G) = U \bigcap U^n = X_{r_1}$. Если $S \bigcap S^n > X_{r_1}$, то в силу $|X_{r_1}| = 2$ и $X_{r_1} \trianglelefteq D = S \bigcap S^n$ имеем $[X_{r_1}, D] = 1$. Но любой элемент из D имеет вид $u\tau$, а выше уже показано, что $[X_{r_1}, \langle u\tau \rangle] \neq 1$ для любого $u \in U$. Следовательно, $S \bigcap S^n = X_{r_1} \in m_G(S,S)$. Значит, $O_2(P_1) = \langle X^U_{r_1} \rangle \leq min_G(S,S)$ и $O_2(P_2) = \langle X^U_{r_6} \rangle \leq min_G(S,S)$. Поэтому $O_2(P) = \langle O_2(P_1), O_2(P_2) \rangle \leq min_G(S,S)$. Так как $O_2(P) \trianglelefteq U$, то $Z(U) \leq O_2(P)$. Согласно [12, лемма (19.8)(III)] в $G \setminus Soc(G)$ имеется точно два класса инволюций с представителями τ и τz для $z \in Z(U)$, причем $C_{Soc(G)}(\tau) \simeq F_4(2)$, а централизатор $C_{Soc(G)}(\tau z)$ изоморфен централизатору центральной инволюции в $F_4(2)$. Так как по лемме 2.3 в $F_4(2)$ найдется пара силовских 2-подгрупп, пересекающихся по единице, то по лемме 2.5 имеем $S \bigcap S^x = \langle \tau \rangle$ для некоторого $x \in G$.

Рассмотрим группы $M = N_G(P) > S$ и $\overline{M} = M/O_2(M) \simeq \Omega^+_8(2) : 2$. По теореме 1 имеем $min_{\overline{M}}(\overline{S}, \overline{S}) = O_2(\overline{N})$ и $\tilde{N} = \overline{N}/O_2(\overline{N}) \simeq L_3(2)$. Так как $O_2(M) \leq Soc(G) \simeq E_6(2)$, то $O_2(M) \bigcap S^g = 1$ для некоторого g из G. Пусть T — полный прообраз в M подгруппы $min_{\overline{M}}(\overline{S}, \overline{S})$. Допустим, что для некоторого элемента $D = S \bigcap S^y \in m_G(S,S)$ ($\in G$) подгруппа D не лежит в T. Поскольку $\langle \tau \rangle \in m_G(S,S)$, то $|D| = 2$. Тогда $N = N_G(T)$ содержит S и D пересекается с $T = O_2(N)$ тривиально. Пусть $S_y = N \bigcap S^y$. Тогда в $\hat{N} = N/T \simeq L_3(2)$ по лемме 2.3 имеем $min_{\hat{N}}(\hat{S}, \hat{S}_g) = \hat{1}$. По лемме 2.6 имеем $S \bigcap S^x = 1$ для некоторого x из G, противоречие [6, теорема В(2б)]. Следовательно, $D \leq T$ и, таким образом, $\overline{min_G(S,S)} \leq min_{\overline{M}}(\overline{S}, \overline{S})$.

Докажем обратное включение. Так как $O_2(M)\bigcap S^g = 1$, то $1 = (O_2(M)\bigcap S^g)^m$ для любого элемента m из M. Выше в доказательстве теоремы 1 уже отмечалось, что для $\overline{D} \in min_{\overline{M}}(\overline{S}, \overline{S})$ имеем $|\overline{D}| = 2$, где $\overline{M} = m/O_2(M) \simeq \Omega_8^+(2) : 2$. Тогда $\overline{D} = \overline{S}\bigcap \overline{S}^{\overline{m}}$ для некоторого $\overline{m}$ из $\overline{M}$ и для полного прообраза D подгруппы $\overline{D}$ в M имеем $D = S\bigcap S^m$ для некоторого m из M. Так как $|\overline{D} = 2|$, то $|D| = 2|O_2(M)|$ и $D = O_2(M)\langle d\rangle$, где $d^2 \in O_2(M)$. Подгруппа $S_g = M\bigcap S^g$ лежит в некоторой силовской 2-подгруппе S^{m_1} из M $(m_1 \in M)$. Поэтому $S_g^{m_2} \leq (S^{m_1})^{m_2} = S^m$ для некоторого m_2 из M. Следовательно, $D = S\bigcap S^m = S\bigcap S^{m_1m_2} = S\bigcap (S^{m_1})^{m_2} \geq S\bigcap (S_g)^{m_2} = S\bigcap (M\bigcap S^g)^{m_2} = S\bigcap M\bigcap S^{gm_2} = S\bigcap S^{gm_2}$. Заметим, что $S\bigcap S^{gm_2} \neq 1$ по [6, теорема B(2б)]. С другой стороны, в силу $D \geq S\bigcap S^{gm_2}$ имеем $S\bigcap S^{gm_2} = D\bigcap S\bigcap S^{gm_2} = D\bigcap S^{gm_2} = (O_2(M)\langle d\rangle)\bigcap S^{gm_2}$. Так как $O_2(M)\bigcap S^{gm} = 1$ для любого m из M, то $|(O_2(M)\langle d\rangle)\bigcap S^{gm_2}| = 2$. Поскольку $S\bigcap S^{gm_2} = S\bigcap (M\bigcap S^g)^{m_2} = S\bigcap (S_g)^{m_2} = S\bigcap (S^{m_1})^{m_2} = S\bigcap S^m = D$, то $S\bigcap S^{gm_2} = D\bigcap S\bigcap S^{gm_2} = D\bigcap S^{gm_2} = D_1$. Следовательно, для любого $\overline{D} \in min_{\overline{M}}(\overline{S}, \overline{S})$ найдется $D_1 \in m_G(S, S)$ такое, что $\overline{D_1} = \overline{D}$. Поэтому $min_{\overline{M}}(\overline{S}, \overline{S}) \leq \overline{min_G(S, S)}$. Таким образом, $min_{\overline{M}}(\overline{S}, \overline{S}) = \overline{min_G(S, S)}$. По теореме 1 подгруппа $min_{\overline{M}}(\overline{S}, \overline{S})$ известна. Поэтому $min_G(S, S)$ является расширением подгруппы $O_2(M)$ с помощью подгруппы $min_{\overline{M}}(\overline{S}, \overline{S})$.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Выберем в группе G пару нильпотентных подгрупп A и B с условием $\min_G(A, B) \neq 1$, для которых число $|A||B|$ минимально.

Лемма 3.1 *В группе G справедливы следующие утверждения:*
(1) *хотя бы одна из подгрупп A или B неабелева;*
(2) *хотя бы одна из подгрупп A или B непримарна.*

Доказательство. Утверждение (1) леммы следует из леммы 2.1.

Допустим, что обе подгруппы A и B примарны. Тогда по [3, теорема B(2б)] имеем, что A и B — 2-подгруппы, а поскольку $Soc(G) \simeq E_6(2)$ — группа характеристики 2, то для $S_0 \in Syl_2(Soc(G))$ имеем $S_0\bigcap S_0^x = 1$ для некоторого $x \in G$. Поэтому условие $\min_G(A, B) \neq 1$ влечет, что ни A, ни B не лежат в $Soc(G)$. В этом случае, согласно [7, с.191], $G \simeq Aut(E_6(2)$ и G не контрпример к теореме. Утверждение (2) доказано. □

Будем считать подгруппу A неабелевой ввиду леммы 3.1.

Лемма 3.2 *Подгруппа A имеет неабелеву 3-подгруппу или неабелеву 2-подгруппу.*

Доказательство. Согласно [7, с.191] имеем $|Soc(G)| = 2^{36} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 73$ и $Soc(G)$ содержит подгруппу, изоморфную $L_3(2) \times L_3(2) \times L_3(2)$. Поэтому силовская 7-подгруппа из G абелева. Теперь из записи $|Soc(G)|$ следует, что неабелевой в A может быть только силовская 2-подгруппа или силовская 3-подгруппа. □

Лемма 3.3 *Силовская 3-подгруппа в A абелева.*

Доказательство. Допустим, что силовская 3-подгруппа в A неабелева. Пусть a — элемент порядка 3 из $Z(A)\bigcap A'$. Тогда $A\leq C(a)$ и, согласно [13, таблица 4.7.3A] для $C=C_{Soc(G)}(a)$ подгруппа $L=O^{2'}(C)$ одного из следующих трех видов:

(1)$SU_3(2)*SL_3(4)$ и $|C_C(L)|=3$;

(2)$L_6(2)$ и $|C_C(L)|=3$;

(3)$^2D_4(2)$ и $|C_C(L)|=3$.

Пусть выполнен случай (1). Тогда $F(L)\simeq 3^3$ и согласно [3, теорема В(2б)] имеем $F(L)\bigcap B^g=1$ для некоторого $g\in G$. Так как элемент a полупрост, то известно действие максимального тора группы $Soc(G)$, содержащего a, на слое $E(C)=E(L)$ (см.[13, таблица 4.7.3A]) и там же указано действие графового автоморфизма группы G на L. Из этих действий получаем $F(C_G(a))=F(C)=F(L)$. Значит, $C_G(a)$ вкладывается в расширение L с помощью подгруппы порядка 6, причем некоторый 3-элемент тора индуцирует на $E(L)$ диагональный автоморфизм. В любом случае, рассматривая в качестве G_1 подгруппу $C_G(a)$, а в качестве G_2 подгруппу $C_G(E(L))$, изоморфную $SU_3(2)$, имеем $\overline{G_1}=G_1/G_2\tilde{\to} Aut(L_3(4))$ и по [11, теоремf 2] получаем, что $min_{\overline{G}_1}(\overline{A},\overline{B}_1)=1$, где $B_1=G_1\bigcap B^g$. Кроме того, в группе $G_2\simeq SU_3(2)\simeq 3^{1+2}.Q_8$ с кватернионной силовской 2-подгруппой Q для 2-подгрупп $B_2=B^g\bigcap G_2$ и $A_1=A\bigcap G_2$ без ограничения общности можно считать, что $B_2\leq Q$ и $O_2(A_1)\leq Q$. Так как $\Omega(O_2(A))\simeq C_2$, то $Q\bigcap Q^x=1$ для некоторого $x\in O_3(G_2)$. Тогда $A_1\bigcap B_2^x\leq O_2(A_1)\leq Q$ в силу нильпотентности A_1 и того, что B_2 — 2-подгруппа, и $A_1\bigcap B_2^x\leq Q^x$ в силу того, что $B_2\leq Q$. Значит, $A_1\bigcap B_2^x\leq Q\bigcap Q^x=1$. Поэтому $min_{G_2}(A_1,B_2)=1$. Отсюда и из равенства $min_{\overline{G_1}}(\overline{A},\overline{B_1})=\overline{1}$ следует, что $A\bigcap B_1^{g_1g_2}\leq G_2$ для некоторого g_1 из G_1 и любого элемента g_2 из G_2. Поэтому $A\bigcap B_1^{g_1g_2}=A\bigcap B_1^{g_1g_2}\bigcap G_2=(A\bigcap G_2)\bigcap(B_1^g\bigcap G_2)^{g_2}=A_1\bigcap B_2^{g_2}$. Но при $g_2=x$ имеем $1=A_1\bigcap B_2^{g_2}=A\bigcap B_1^{g_1x}=A\bigcap(G_1\bigcap B^g)^{g_1x}=A\bigcap G_1\bigcap B^{gg_1x}=A\bigcap B^{gg_2x}$. Получили противоречие с предположением теоремы.

Итак, случай (1) не возникает.

Пусть выполняется случай (2) или случай (3). Тогда $C_{Soc(G)}(a)\simeq L_6(2)\times C_3$ или $C_{Soc(G)}(a)\simeq^2 D_4(2)\times C_3$ соответственно. В каждом из этих случаев получаем противоречие в силу того, что $a\in Z(P)\bigcap P'$. □

Лемма 3.4 *Группа G — не контрпример к теореме* 4.

Доказательство. Допустим, что G — контрпример к теореме 4. По лемме 3.3 неабелевыми могут быть только силовские 2-подгруппы из A. Согласно [7, с.191] имеем $G\simeq Aut(E_6(2)$.

Значит, $1\neq O_2(A)\bigcap Soc(G)A$. Поэтому $A\leq C_G(i)$ для некоторой инволюции $i\in Soc(G)$. Согласно [13, теорема 3.3.2] подгруппа $C_G(i)$ лежит в 2-локальной подгруппе K с $F^*(K)=O_2(K)$. Рассмотрим 2-замкнутую подгруппу $R=O_2(K)\cdot A$, в которой абелева подгруппа $O(A)$ действует точно на $O_2(K)$. По лемме 2.1 $O(A)\bigcap(O(A))^x=1$ для некоторого $x\in O_2(K)$.

Если $O_2(R)\bigcap B^g=1$ для некоторого $g\in G$, то в силу нечетности порядка $B=R\bigcap B^g$ без ограничения общности можно считать, что $B_1\leq O(A)=O(R)$. Поэтому $A\bigcap B_1^x\leq O(A)\bigcap(O(A))^x=1$. Но $A\bigcap B_1^x=A\bigcap(R\bigcap B^g)^x=A\bigcap B^{gx}=1$. Противоречие с условием теоремы.

Если $O_2(R)\bigcap B^g\neq 1$ для любого $g\in G$, то $O_2(R)\bigcap(O_2(B))^g\neq 1$ для любого $g\in G$. Пусть $m\in min_G(S,S)$. Тогда $m\leq O_2(R)$, иначе $m=S\bigcap S^x>$

$O_2(R)\bigcap O_2(B^y)\neq 1$. Но $|m|=2$. Противоречие. Поэтому $min_G(S,S)\leq O_2(R)$. Аналогично $O_2(B^t)\geq min_G(S,S)$ для некоторого $t\in G$. Так как по теореме 1 $min_G(S,S)>O_2(M)$, то $O_{2'}(B)=1$ в силу 2-скованности M в G. Значит, $O_2(A)\bigcap B^g\neq 1$ для любого $g\in G$ и, аналогично предыдущему, $O_2(A)\geq min_G(S,S)>O_2(P)$. Поэтому A — 2-подгруппа. Противоречие с леммой 3.1(1). □

Доказательство теоремы 5. (1) $\Rightarrow$ (2). Из теоремы 4 следует, что A и B — 2-подгруппы из G. Тогда, как показано в доказательстве теоремы 3, имеем $\langle\tau\rangle = S\bigcap S^g\in m_G(S,S)$, где τ — инволюция, индуцирующая графовый автоморфизм на $Soc(G)$. Поэтому $|D|=2$ для любого $D\in m_G(S,S)$ и $D=S\bigcap S^x\geq A\bigcap B^x\neq 1$. Следовательно, $2=|S\bigcap S^g|=|A\bigcap B^g|\neq 1$. Таким образом, $A\geq min_G(S,S)$. Аналогично, без ограничения общности можно считать, что $B\geq min_G(S,S)$. Тогда пара (A,B) есть одна из пар, указанных в теореме, и импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказана.

(2) $\Rightarrow$ (1). Тот факт, что $min_G(S,S)\neq 1$ для пары (S,S), доказан в [3, теорема B(2б)]. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что $min_G(A,B)\neq 1$ для пары $(A,B)=(min_G(S,S),min_G(S,S))$. Допустим, что $min_G(A,B)=1$. Так как для $N=N_G(min_G(S,S))$ и по теореме 3 имеем $\overline{N}=N/O_2(N\simeq L_3(2))$ и $N^x/O_2(N^x)\simeq L_3(2)$, то согласно [3, лемма 3.1] из $min_G(S,S)\bigcap(min_G(S,S))^x=1$ следует, что $min_G(S,S)=1$, противоречие. Поэтому $(min_G(A,B)\neq 1$ в случае $A=min_G(S,S)=B$. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) доказана.

Теорема 5 доказана.

4. Доказательство теоремы 6

Допустим, что теорема 6 неверна. Выберем в группе G пару подгрупп A и B, для которых $Min_G(A,B)\neq 1$ так, чтобы число $|A||B|$ было минимальным.

Лемма 4.1. *В группе G справедливы следующие утверждения:*
(1) *хотя бы одна из подгрупп A или B неабелева;*
(2) *обе подгруппы A и B нециклические.*

Доказательство. Утверждение (1) следует из леммы 2.1, а утверждение (2) из леммы 2.2. □

Из лемм 4.1(1) следует, что можно считать подгруппу A неабелевой, следовательно, A содержит неабелеву силовскую p-подгруппу, где p — простое число и p^3 делит $|A|$.

Лемма 4.2. *Пусть $O_p(A)$ — неабелева силовская подгруппа из A. Тогда $p\in\{2,3\}$.*

Доказательство. Согласно [7, с. 214] $|E_7(2)|=2^{63}\cdot 3^{11}\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 31\cdot 43\cdot 73\cdot 127$. По лемме 3.1 p^3 делит $|G|$. Значит, $p\in\{2,3,7\}$. Но G содержит подгруппу $L=L_3(2)\times L_6(2)>L_3(2)\times L_3(2)\times L_3(2)$. Значит, силовская 7-подгруппа в G абелева и, таким образом, $p\in\{2,3\}$. □

Лемма 4.3. *Пусть $O_p(A)$ — неабелева силовская подгруппа из A. Тогда $p=2$.*

Доказательство. По лемме 4.2 имеем $p \in \{2,3\}$. Допустим, что $p = 3$. Тогда согласно [13, таблица 4.7.3A] для элемента a порядка 3 из $Z(O_p(A)) \bigcap A'$ и для $C = C_G(a)$ имеем следующие возможности для подгруппы $O^{2'}(C)$:

(1) $D_6(2)$,
(2) $SU_3(2) * SU_6(2)$,
(3) $SU_7(2)$,
(4) $D_5^-(2) \times L_2(2)$,
(5) $E_6(2)$.

В случаях (1), (3), (4), (5) согласно [10, таблица 5, с.XVI] число $Z(O^{2'}(C))$ не делится на 3. С другой стороны, в каждом из этих случаев $C(O^{2'}(C))$ — циклическая группа, содержащая a. Значит, $a \notin C$. Противоречие с выбором a.

Рассмотрим случай (2). Тогда $L = O^{2'}(C) = L_1 * L_2$, где $L_1 \simeq SU_3(2)$, а $L_2 \simeq SU_6(2)$. В этом случае ввиду [13, таблица 4.7.3A] $C_C(L)$ — циклическая группа порядка не более 6 и $\langle a \rangle = Z(O^{2'}(C))$. Подгруппа A нормализует L_1 и L_2. Так как A неабелева, то A действует нетривиально на L_1 или L_2. Но если A действует нетривиально на $K \in \{L_1, L_2\}$, то $A/C_A(K) \hookrightarrow Aut(K)$. Если $K \simeq SU_6(2)$, то согласно [8, теорема 2] $min_{\overline{G_1}(\overline{A},\overline{B_1})} = \overline{1}$ для подгруппы A из $G_1 = AK$ и $B_1 = AK \bigcap B^g$, где $A > C_A(K) = A_1 \geq \langle a \rangle$ и $\overline{G_1} = G_1/A_1$, $A_1 \bigcap B^g = 1$. Тогда по лемме 2.6 $min_G(A,B) = 1$. Противоречие с выбором подгрупп A и B. Если $K \simeq SU_3(2)$, то $KA/A_1 \hookrightarrow PGU_3(2)$. Так как $|Z(L)| = 3$, то $\overline{A_1}$ — не 3-группа. Но инволюция из KA/A_1 инвертирует $O_3(KA/A_1)$. Следовательно, $|\overline{A_1}| \leq 6$ и тогда по лемме 2.2 $min_{KA/A_1}(\overline{A},\overline{B_1}) = \overline{1}$. По лемме 2.6 $min_G(A,B) = 1$. Противоречие. □

Лемма 4.4. *G — не контрпример к теореме.*

Доказательство. Из леммы 4.3 следует, что силовские подгруппы нечетного порядка абелевы. Так как по лемме 4.1 подгруппа A неабелева, то порядок $|A|$ четен. Тогда по теореме Бореля-Титса (см. [13, следствие 3.1.4]) A лежит в некоторой собственной параболической подгруппе P из G. Поэтому в подгруппе $T = O_2(P)A$ подгруппа $O(A)$ абелева и действует точно на $O_2(T)$. По лемме 2.1 $O(A) \bigcap (O(A))^t = 1$ для некоторого элемента t из T. Кроме того, по [6, теорема В(2б)] $O_2(T) \bigcap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Тогда для $B_1 = T \bigcap B^g$ порядок $|B_1|$ нечетен. Значит, без ограничения общности можно считать, что $B_1 \leq O(A)$. Рассмотрим подгруппу $D = A \bigcap B_1^t$. Она лежит в $O(A)$ ввиду нечетности $|D|$. Но $B_1 \leq O(A)$, поэтому $B_1^t \leq (O(A))^t$. Тогда $D \leq O(A) \bigcap (O(A))^t = 1$. Противоречие. □

Теорема 6 следует из леммы 4.4.

References

[1] Mazurov V.D., Zenkov V.I., *On Intersections of Sylow Subgroups in Finite Groups*, Algebra i Logika, **35**:4 (1996), 424–432. MR1444428

[2] Zenkov V.I., *Intersections of Abelian Groups in Finite Groups*, Mat. Zametki, **56**:2 (1994), 150–152.

[3] Zenkov V.I., *Intersection of Nilpotent Subgroups in Finite Groups*, Fund. and Appl. Math., **2**:1 (1996), 1–92. MR1788997

[4] Zenkov V.I., Nuzhin Y.N., *On Intersections of Pimary Subgroups of Odd Order in Finite Almost Simple Groups*, Fund. and Appl. Math., **9**:6 (2014), 115–123.

[5] Zenkov V.I., *On Intersections of Primary Subgroups in Group $Aut(L_n(2))$. I*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **21**:1 (2015), 105–111.

[6] Zenkov V.I., *On Intersections of Two Nilpotent Subgroups in Finite Groups with Socle $L_2(q)$*, Sib. Math. J., **57**:6 (2016), 1280–1290. MR3613999

[7] Conway J.H. [et. al], *Atlas of Finite Groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985. MR0827219

[8] Gorenstein D., *Finite Simple Groups. Introduction to its Classification*, Moscow, 1996.

[9] Jamali A.R., Viseh M., *On Nilpotent Subgroups Containing Non-Trivial Normal Subgroups*, J. Group Theory, **13**:4 (2010), 411–416. MR2653528

[10] Zenkov V.I., *On Intersections of Nilpotent Subgroups in Finite Symmetric and Alternative Groups*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **19**:3 (2013), 145–149.

[11] Zenkov V.I., *On Intersection of Two Nilpotent Subgroups in Small Finite Groups*, Sib. Electr. Math. Reports, **13** (2016), 1099–1115. MR3580051

[12] Aschbacher M., Seitz G.M., *Involutions in Chevalley Groups over Fields of Even Order*, Nagoya Math. J., **63** (1976), 1–91. MR0422401

[13] Gorenstein D., Lyons R., Solomon R., *The Classification of the Finite Simple Groups. Number 3*, Amer. Math. Soc. Providence, R. I. 1998. MR1490581

Viktor Ivanovich Zenkov
N.N.Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
S.Kovalevskoi street, 16,
Ekaterinburg, Russia
Yeltsin Ural Federal University,
Mira street, 19,
Ekaterinburg, Russia
E-mail address: V1I9Z52@mail.ru