S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1434–1439 (2017) УДК 515.124
DOI 10.17377/semi.2017.14.122 MSC 54E40, 54B20

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, СОХРАНЯЮЩИХ МЕТРИЧЕСКИЙ ПОРЯДОК

К.Г. КАМАЛУТДИНОВ

Abstract. We define mappings that preserve metric order and show that they determine the classification of metric spaces. It is proved that the cardinality of set of nontrivial isometries of hyperspace with Hausdorff metric over the metric space X depends only on the metric order of X. We also deduce some properties of mappings that preserve metric order of continua.

Keywords: metric, nontrivial isometry, hyperspace, continuum.

1. Введение

Гиперпространством над метрическим пространством (X, ρ) называется множество $\mathcal{C}(X)$ всех компактных подмножеств в X, наделенное метрикой Хаусдорфа $\rho(A, B) = \max\left\{\sup\limits_{a\in A}\rho(a, B), \sup\limits_{b\in B}\rho(A, b)\right\}$, либо обобщенной метрикой Помпейю $\sigma_\alpha(A, B) = \frac{1}{2^{1/\alpha}}\left(\left(\sup\limits_{a\in A}\rho(a, B)\right)^\alpha + \left(\sup\limits_{b\in B}\rho(A, b)\right)^\alpha\right)^{1/\alpha}$, где $\rho(x, Y) = \rho(Y, x) = \inf\limits_{y\in Y}\rho(x, y)$, $1 < \alpha < +\infty$.

Определение 1. *Изометрия $F\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ гиперпространства называется тривиальной, если существует такая изометрия $f\colon X \to X$ пространства X, что для любого $A \in \mathcal{C}(X)$ выполняется $F(A) = f(A)$.*

Kamalutdinov, K.G., On mappings that preserve metric order.

Работа поддержана РФФИ (гранты 16-01-00414, 16-31-00138).
Поступила 12 декабря 2016 г., опубликована 13 декабря 2017 г.

Каждая изометрия пространства X порождает некоторую тривиальную изометрию гиперпространства $\mathcal{C}(X)$. Вопрос о существовании нетривиальных изометрий гиперпространств над различными метрическими пространствами рассматривался рядом авторов.

Так, Грубер и Леттл в 1979 году [1, С. 170] доказали, что всякая изометрия в гиперпространстве с метрикой Хаусдорфа над евклидовым пространством тривиальна.

Позже Бандт в 1986 году [2, Теорема 4, С. 181] показал, в частности, что всякая изометрия в гиперпространстве с метрикой Хаусдорфа над выпуклой областью в евклидовом пространстве тривиальна.

В работе [3] Асеева В.В., Тетенова А.В. и Максимовой А.П. введена обобщенная метрика Помпейю и доказано [3, Теорема 3.3, С. 154], что для компактных подмножеств на числовой прямой всякая изометрия их гиперпространств в этой метрике тривиальна.

В данной работе вводится отношение эквивалентности метрических пространств, основанное на отображениях, сохраняющих метрический порядок, а также изучаются некоторые свойства таких отображений. Доказано, что мощность множества нетривиальных изометрий гиперпространства с метрикой Хаусдорфа над метрическим пространством X зависит только от метрического порядка пространства X. Доказано также, что в евклидовой метрике отрезки и дуги окружностей с угловой мерой, не большей π, имеют один метрический порядок, и что на плоскости нет других множеств, имеющих с ними один метрический порядок.

2. Отображения, сохраняющие метрический порядок и нетривиальные изометрии гиперпространств

Определение 2. *Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств такое, что для любой четверки точек $a, b, c, d \in X$ отношение $\rho_X(a,b) < \rho_X(c,d)$ (соотв. $\rho_X(a,b) \leq \rho_X(c,d)$) влечет отношение $\rho_Y(f(a), f(b)) < \rho_Y(f(c), f(d))$ (соотв. $\rho_Y(f(a), f(b)) \leq \rho_Y(f(c), f(d))$), будем называть отображением, сохраняющим строгий (соотв. нестрогий) метрический порядок.*

Определение 3. *Будем говорить, что отображение $f : X \to Y$ сохраняет метрический порядок, если оно одновременно сохраняет строгий и нестрогий метрический порядок.*

Для метрического пространства X обозначим $D_X = \{\rho_X(a,b) | \ a, b \in X\}$.

Очевидно, что если отображение f сохраняет нестрогий метрический порядок, то $\rho_X(a,b) = \rho_X(c,d))$ влечет $\rho_Y(f(a), f(b)) = \rho_Y(f(c), f(d))$ для любых $a, b, c, d \in X$. Это позволяет однозначно определить возрастающую функцию $f^*\colon D_X \to D_Y$ формулой $f^*(\rho_X(a,b)) = \rho_Y(f(a), f(b))$.

Если же f сохраняет строгий метрический порядок, то оно инъективно.

Для отображения f, сохраняющего метрический порядок, определенная выше функция f^* будет строго возрастающей, что означает равносильность соотношений $\rho_X(a,b) < \rho_X(c,d)$ и $\rho_Y(f(a), f(b)) < \rho_Y(f(c), f(d))$ для всех четверок $a, b, c, d \in X$. Поэтому, обратное отображение $f^{-1} : f(X) \to X$ также сохраняет метрический порядок, и можно ввести отношение эквивалентности метрических пространств следующим образом:

Определение 4. *Будем говорить, что метрические пространства X и Y имеют один метрический порядок, если существует биекция $f\colon X \to Y$, сохраняющая метрический порядок.*

Теорема 1. *Пусть X и Y — конечные метрические пространства. Тогда изометричность X и Y равносильна тому, что X и Y имеют один метрический порядок и $D_X = D_Y$.*

Доказательство. Заметим, что D_X и D_Y конечны.

Если $f: X \to Y$ — изометрия, то f сохраняет метрический порядок. При этом $f^*: D_X \to D_Y$ — тождественная биекция, поэтому $D_X = D_Y$.

С другой стороны, если $D_X = D_Y$, то единственной строго возрастающей функцией $f^*: D_X \to D_Y$ будет тождественная. Поэтому $f: X \to Y$, сохраняющее метрический порядок, будет изометрией. □

Аналогичное утверждение для бесконечных пространств не всегда верно. Заметим, что если X и Y — отрезок и дуга окружности, построенная на нем, то в евклидовой метрике $D_X = D_Y$, но X и Y не изометричны. При этом, как будет видно из Теоремы 6, они имеют один метрический порядок.

Теорема 2. *Если метрические пространства X и Y имеют один метрический порядок, то множества их изометрий равномощны.*

Доказательство. Пусть биекция $f\colon X \to Y$ сохраняет метрический порядок.

Каждой изометрии $\varphi\colon X \to X$ можно взаимно-однозначно поставить в соответствие отображение $\psi\colon Y \to Y$ по формуле $\psi = f \circ \varphi \circ f^{-1}$. Покажем, что ψ — тоже изометрия.

Возьмем любые две точки $a, b \in X$. Тогда $\rho_Y\left(f(a), f(b)\right) = f^*\left(\rho_X(a,b)\right) = f^*\left(\rho_X(\varphi(a),\varphi(b))\right) = \rho_Y\left(f(\varphi(a)), f(\varphi(b))\right) = \rho_Y\left(\psi(f(a)), \psi(f(b))\right)$ в силу того, что $f \circ \varphi = \psi \circ f$. □

Предложение 1. *Пусть X — метрическое пространство. Тогда $D_X = D_{\mathcal{C}(X)}$.*

Доказательство. $d_X(\{a\},\{b\}) = d_X(a,b)$ для любых точек $a, b \in X$, поэтому $D_X \subseteq D_{\mathcal{C}(X)}$. Кроме того, любые множества $A, B \in \mathcal{C}(X)$ компактны, поэтому

$$\rho_X(A,B) = \max\left\{\max_{a\in A}\min_{b\in B}\rho_X(a,b), \max_{b\in B}\min_{a\in A}\rho_X(a,b)\right\} \in D_X. \qquad \square$$

Теорема 3. *Если метрические пространства X и Y имеют один метрический порядок, то гиперпространства $\mathcal{C}(X)$ и $\mathcal{C}(Y)$, наделенные метрикой Хаусдорфа, также имеют один метрический порядок.*

Доказательство. Пусть биекция $f\colon X \to Y$ сохраняет метрический порядок. Определим $F\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ формулой $F(A) = f(A)$. Очевидно, что F — тоже биекция. Покажем, что F сохраняет метрический порядок.

Заметим, что $\inf f^*(R) = f^*(\inf R)$ и $\sup f^*(R) = f^*(\sup R)$ для любого непустого $R \subseteq D_X$ в силу того, что f^* строго возрастает. Поэтому, для любых $A, B \in \mathcal{C}(X)$ справедлива формула $\rho_Y\big(f(A), f(B)\big) = f^*\big(\rho_X(A,B)\big)$:

$$\rho_Y\big(f(A), f(B)\big) = \max\big\{\sup_{a\in A}\ \inf_{b\in B}\ \rho_Y\left(f(a), f(b)\right),\ \sup_{b\in B}\ \inf_{a\in A}\ \rho_Y\left(f(a), f(b)\right)\big\} =$$

$$= f^*\left(\max\big\{\sup_{a\in A}\ \rho_X(a,B),\ \sup_{b\in B}\ \rho_X(A,b)\big\}\right) = f^*\big(\rho_X(A,B)\big).$$

По Предложению 1 $D_X = D_{\mathcal{C}(X)}$ и $D_Y = D_{\mathcal{C}(Y)}$, поэтому для любых множеств $A, B, C, D \in \mathcal{C}(X)$, соотношение $\rho_X(A, B) < \rho_X(C, D)$ равносильно соотношению $f^*(\rho_X(A, B)) < f^*(\rho_X(C, D))$, которое, пользуясь формулой, доказанной выше, можно переписать как $\rho_Y(f(A), f(B)) < \rho_Y(f(C), f(D))$. То же самое верно и для нестрогих соотношений. Таким образом, F сохраняет метрический порядок. $\square$

Следствие 1. *Если метрические пространства X и Y имеют один метрический порядок, то множества нетривиальных изометрий гиперпространств $\mathcal{C}(X)$ и $\mathcal{C}(Y)$, наделенных метрикой Хаусдорфа, равномощны.*

Таким образом, мощность множества нетривиальных изометрий гиперпространства $\mathcal{C}(X)$ с метрикой Хаусдорфа над метрическим пространством X зависит только от его метрического порядка. Для гиперпространств, наделенных обобщенной метрикой Помпейю, такая закономерность не имеет места.

Рассмотрим всевозможные метрические пространства на трех разных точках x_1, x_2, x_3, обозначив $d_{ij} = \rho(x_i, x_j)$. В таких пространствах три ненулевых расстояния — d_{12}, d_{13} и d_{23}, — которые могут быть различными. Число 3 можно разложить в сумму натуральных чисел тремя различными способами: 3, $2+1$, $1+1+1$. Это означает, что мы имеем три случая:

а) все расстояния совпадают;

б) два расстояния совпадают, а третье отлично от них;

в) все расстояния различны.

Отсюда получаем следующие возможные упорядочивания расстояний в трехточечном метрическом пространстве, с точностью до перестановки точек:

1) $d_{12} = d_{13} = d_{23}$;
2) $d_{12} = d_{13} < d_{23}$;
3) $d_{12} = d_{13} > d_{23}$;
4) $d_{12} < d_{13} < d_{23}$.

Таким образом, всего есть 4 метрических порядка трехточечников. Число нетривиальных изометрий в гиперпространстве над четырехточечником равно разности числа всех изометрий гиперпространства и числа изометрий самого пространства:

1) $7! - 3! = 5034$;
2) $4 - 2 = 2$;
3) $72 - 2 = 70$;
4) $1 - 0 = 1$.

Аналогично, перебором всех возможных упорядочиваний расстояний на четырех разных точках x_1, x_2, x_3, x_4, было проверено, что существует всего 225 метрических порядков четырехточечников.

При этом, в отличие от трехточечников, среди них существуют как те, что допускают наличие нетривиальных изометрий в гиперпространстве — например $d_{12} < d_{13} < d_{14} < d_{23} < d_{24} < d_{34}$, так и те, что не допускают — например $d_{12} = d_{13} = d_{24} < d_{34} < d_{14} < d_{23}$.

3. Отображения, сохраняющие метрический порядок на континуумах

Теорема 4. *Пусть $f : X \to Y$ — отображение, сохраняющее нестрогий метрический порядок, и $f(X)$ имеет хотя бы одну предельную точку. Тогда f непрерывно.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. Найдется пара точек $a, b \in X$ таких, что $0 < \rho_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Тогда для любых $x, y \in X$ отношение $\rho_X(x, y) < \rho_X(a, b)$ влечет $\rho_Y(f(x), f(y)) \le \rho_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$. □

Теорема 5. *Пусть X — связное компактное метрическое пространство, $f : X \to Y$ — отображение, сохраняющее нестрогий метрический порядок. Тогда f либо инъективно, либо постоянно.*

Доказательство. Пусть $f(a) = f(b)$, $a \ne b$. В силу того, что X — континуум [4, С. 167], любую пару точек $c, d \in X$ можно соединить цепочкой $c = x_0, x_1, \dots, x_m = d$ такой, что $\rho_X(x_i, x_{i-1}) \le \rho_X(a, b)$, $i = 1, \dots, m$. Но тогда $f(x_i) = f(x_{i-1})$ для $i = 1, \dots, m$, значит f постоянно. □

Теорема 6. *Отображение $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ сохраняет метрический порядок в двух и только двух случаях:*
1. f — линейно;
2. $f(z) = g(e^{i\varphi z})$, где g линейно и $|\varphi| \le \pi$.

Доказательство. Покажем, что если f сохраняет метрический порядок, то выполняется условие 1 или 2.

Для $k \in \mathbb{N}$ обозначим $z_j = \dfrac{j}{2^k}$, $w_j = f(z_j)$, $A_k = \{z_0, z_1, \dots, z_{2^k}\}$, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Пусть $k > 1$. Рассмотрим образы точек z_0, z_1, z_2 и z_3.

Ясно, что $|w_0 - w_1| = |w_1 - w_2| = |w_2 - w_3|$. В силу $|w_0 - w_2| = |w_1 - w_3|$ будет выполняться равенство $|\angle(w_1, w_2, w_3)| = |\angle(w_0, w_1, w_2)|$, значит либо $w_3 - w_1 = w_2 - w_0$, либо w_0, w_1, w_2, w_3 лежат на некоторой окружности.

Теперь определим, где лежат образы остальных точек $z_j \in A_k$.

Заметим, что если $w_j - w_{j-2} = w_2 - w_0$ для всех $2 \le j \le m < 2^k$, то $w_{m+1} - w_{m-1} = w_2 - w_0$ в силу равенств $|w_{m+1} - w_m| = |w_1 - w_0|$, $|w_{m+1} - w_{m-1}| = |w_2 - w_0|$ и $|w_{m+1} - w_{m-2}| = |w_3 - w_0|$. Если же $w_0, \dots, w_m$ лежат на некоторой окружности γ, то и $w_{m+1} \in \gamma$.

Таким образом, по индукции получаем, что либо $w_{j+2} - w_j = w_2 - w_0$ для всех $0 \le j \le 2^k - 2$, либо $w_0, \dots, w_m$ лежат на некоторой окружности γ.

В первом случае получим, что $f(A_k) = \{w_0 + j(w_2 - w_0) :\ 0 \le j \le 2^{k-1}\} \cup \{w_1 + j(w_2 - w_0) :\ 0 \le j < 2^{k-1}\}$. Обозначим $\frac{|f(1)-f(0)|}{2^{k-1}}$-окрестность отрезка $[f(0), f(1)]$ через S_k. Ясно, что $f(A_k) \subset S_k$, т. к. $|w_1 - w_0| < |w_2 - w_0| = \frac{|f(1)-f(0)|}{2^{k-1}}$. При этом $A_k \subset A_{k+1}$ и $S_k \supset S_{k+1}$, поэтому $f(A) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_k = [f(0), f(1)]$. Но тогда $w_{j+1} - w_j = w_1 - w_0 = \frac{(f(1)-f(0))}{2^k}$ для всех $0 \le j < 2^k$. Значит $w_j = f(0) + (f(1) - f(0))z_j$ для всех $0 \le j \le 2^k$. Таким образом $f(z) = f(0) + (f(1) - f(0))z$ для всех $z \in A$.

Во втором же случае получим, что $f(A) \subset \gamma$. Пусть p — центр окружности γ. Тогда из того, что $|w_{j+1} - w_j| = |w_1 - w_0|$ для всех $0 \le j < 2^k$, получаем $w_j = p + (f(0) - p)e^{i\varphi z_j}$ для всех $0 \le j \le 2^k$, где $\varphi = \angle(f(0), p, f(1))$. Таким образом,

$f(z) = p + (f(0) - p)e^{i\varphi z}$ для всех $z \in A$. При этом $|\varphi| \le \pi$, т. к. в противном случае найдутся точки $c, d \in A \setminus \{0, 1\}$ такие, что $|f(c) - f(d)| > |f(0) - f(1)|$, в то время как $|c - d| < 1$.

По Теореме 4 функция f непрерывна на A. Поэтому, в силу того, что A плотно в $[0, 1]$, функция f может быть продолжена на $[0, 1]$ единственным образом. Получается, что если f сохраняет метрический порядок, то выполняется либо условие 1, либо условие 2.

С другой стороны, если выполнено условие 1, то функция f линейно отображает отрезок $[0, 1]$ на некоторый отрезок. Легко убедиться, что в этом случае f сохраняет метрический порядок.

Если же выполнено условие 2, то образом отрезка $[0, 1]$ будет дуга некоторой окружности с угловой мерой, не большей π. Пусть p — центр этой окружности. Тогда достаточно заметить, что если $|a - b| < |c - d|$ для $a, b, c, d \in [0, 1]$, то $|\angle(f(a), p, f(b))| < |\angle(f(c), p, f(d))|$, следовательно $|f(a)-f(b)| < |f(c)-f(d)|$. То же самое верно и для нестрогих соотношений. Значит f сохраняет метрический порядок. $\square$

Таким образом, в евклидовой метрике все отрезки и дуги окружностей с угловой мерой не больше π имеют один метрический порядок, и на плоскости нет других множеств, имеющих с ними один метрический порядок.

References

[1] P.M. Gruber, G. Lettl, *Isometries of the space of compact subsets of E^d*, Stud. Sci. Math. Hung., **14** (1979), 169–181. MR0645525

[2] Ch. Bandt, *On the metric structure of hyperspaces with Hausdorff metric*, Math. Nachr., **129** (1986), 175–183. MR0864632

[3] V.V. Aseev, A.V. Tetenov, A.P. Maksimova, *The Generalized Pompeiu Metric in the Isometry Problem for Hyperspaces*, Math. Notes, **78**:1–2 (2005), 149–155. MR2245035

[4] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, New York: Academic Press, 1968. MR0259835

Kirill Glebovich Kamalutdinov
Sobolev Institute of Mathematics
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia,
Novosibirsk State University,
Pirogova Str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: k.kamalutdinov@g.nsu.ru