S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

*Том 14, стр. 1447–1455 (2017)* УДК 517.51

DOI 10.17377/semi.2017.14.124 MSC 30L99, 46E35

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КЛАССЫ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.С. РОМАНОВ

Abstract. On quasimetric measure spaces, classes of functions of Sobolev type are defined. In the model cases, analogues of the classical imbedding theorems are proved.

**Keywords:** quasimetric, Sobolev space, embedding theorem.

Уже третье десятилетие активно развивается анализ на метрических структурах. Наиболее интенсивно на метрических пространствах с мерой изучаются различные классы функций с обобщенной «гладкостью», являющиеся в некотором смысле обобщением пространств Соболева. В основе определений таких классов функций лежит возможность альтернативного описания пространств Соболева, не использующего линейную структуру евклидова пространства и допускающего описание в терминах метрики и меры. К настоящему времени получены метрические аналоги многих классических результатов, в том числе теоремы вложения, являющиеся непосредственным обобщением теорем вложения для пространств Соболева в областях евклидова пространства $R^n$.

В последнее время проявляется интерес к анализу на более общих структурах – на квазиметрических пространствах с мерой. Функцию «расстояния» называют квазиметрикой, если некоторые свойства метрики (симметричность, неравенство треугольника) либо не выполняются либо выполняются в несколько ослабленном виде.

В этой заметке мы рассмотрим модельные ситуации, в которых использование квазиметрики позволяет определить новые классы функций и получить содержательные результаты, в частности, теоремы вложения.

---

Romanov, A.S., Classes of Sobolev type on quasimetric spaces.



Работа поддержана РФФИ (проект № 17-01-00801).

*Поступила 7 декабря 2017 г., опубликована 14 декабря 2017 г.*

## I. Определения

Рассмотрим непустое множество $X$ и функцию $d : X \times X \to [0, \infty)$. Функцию $d$ называют расстоянием на $X$, если она удовлетворяет

1. аксиоме тождества: $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$.

Вполне очевидно, что из $d(x, y) = 0$ следует $d(y, x) = 0$.

Расстояние $d$ называют $(q_1, q_2)$-квазиметрикой на множестве $X$, если выполняется

2. обобщенное неравенство треугольника $d(x, y) \le q_1 d(x, z) + q_2 d(z, y)$.

Непосредственно из определения следует, что $q_1 \ge 1$ и $q_2 \ge 1$. Будем называть $(q_1, q_2)$-квазиметрическим пространством пару $(X, d)$, состоящую из множества $X$ и $(q_1, q_2)$-квазиметрики $d$ [1].

Будем называть $(q_1, q_2)$-квазиметрику $q_0$-симметрической, если для всех точек $x, y \in X$ выполняется неравенство

3. $d(x, y) \le q_0 d(y, x)$.

В этом случае мы будем называть $(X, d)$ $(q_0, q_1, q_2)$-квазиметрическим пространством .

Мы всегда будем предполагать, что имеем дело с $(q_1, q_2)$-квазиметрикой, но иногда, когда конкретные значения $q_1$ и $q_2$ не играют роли, мы будем в тексте использовать термин квазиметрика.

Предположим, что на множестве $X$ задана мера $\mu$. Теперь мы можем определить на $(q_1, q_2)$-квазиметрическом пространстве $(X, d)$ классы функций соболевского типа.

**Определение.** Измеримую функцию $g : X \to [0, \infty)$ назовем верхней допустимой функцией, а измеримую функцию $h : X \to [0, \infty)$ нижней допустимой функцией для измеримой функции $u : X \to R$, если существует такое множество $E$, что $\mu(E) = 0$ и для всех $x, y \in X \setminus E$ выполняются оценки

$$|u(x) - u(y)| \le \min\left(d(x, y), d(y, x)\right)\left(g(x) + g(y)\right),$$

$$|u(x) - u(y)| \le \max\left(d(x, y), d(y, x)\right)\left(h(x) + h(y)\right).$$

Вполне очевидно, что всякая верхняя допустимая функция является и нижней допустимой.

Для фиксированной функции $u$ множество всех верхних допустимых функций обозначим через $G(u)$, а множество всех нижних допустимых функций через $H(u)$.

**Определение.** Классы соболевского типа $s^1_p(X, d, \mu), S^1_p(X, d, \mu), v^1_p(X, d, \mu)$, $V^1_p(X, d, \mu)$ определим следующими условиями

$$s^1_p(X, d, \mu) = \{u \in L_1(\mu) \mid G(u) \cap L_p(\mu) \ne \emptyset\},$$

$$S^1_p(X, d, \mu) = \{u \in L_p(\mu) \mid u \in s^1_p(X, d, \mu)\},$$

$$v^1_p(X, d, \mu) = \{u \in L_1(\mu) \mid H(u) \cap L_p(\mu) \ne \emptyset\},$$

$$V^1_p(X, d, \mu) = \{u \in L_p(\mu) \mid u \in v^1_p(X, d, \mu)\}.$$

Вполне очевидно, что введенные классы функций являются векторными пространствами.

Соответствующие полунормы и нормы в этих пространствах определяются равенствами

$$||u \mid s_p^1|| = \inf_{g \in G(u)} ||g \mid L_p||, \quad ||u \mid S_p^1|| = ||u \mid L_p|| + ||u \mid s_p^1||,$$

$$||u \mid v_p^1|| = \inf_{h \in H(u)} ||h \mid L_p||, \quad ||u \mid V_p^1|| = ||u \mid L_p|| + ||u \mid v_p^1||.$$

Если $(q_1, q_2)$-квазиметрика является $q_0$-симметрической, то легко заметить, что пространства $S_p^1(X, d, \mu)$ и $V_p^1(X, d, \mu)$ совпадают как множества функций, а нормы их эквивалентны. В случае, когда $d$ является метрикой, такие пространства были введены П. Хайлашем [2] и активно изучались в последние десятилетия различными авторами.

В евклидовых областях $\Omega \subset R^n$ с достаточно регулярной границей (к примеру, липшицевой) пространство $S_p^1(\Omega, |*|, m_n)$, рассматриваемое относительно стандартной евклидовой метрики и меры Лебега, совпадает с классическим пространством Соболева $W_p^1(\Omega)$, а их нормы эквивалентны [2]. Это позволяет введенные нами классы функций называть пространствами соболевского типа.

**Лемма 1.1.** Пространства $S_p^1(X, d, \mu)$ и $V_p^1(X, d, \mu)$ являются банаховыми.

Доказательство этого факта является дословным повторением доказательства теоремы 3 работы [2], которое не изменяется при замени метрики на квазиметрику.

Если не предполагать никакой взаимосвязи между квазиметрикой и мерой, то сложно ожидать получения каких-то аналогов результатов, выполняющихся в евклидовом случае для пространств Соболева. Далее мы рассмотрим модельные ситуации, в которых удается получить интересующие нас теоремы вложения.

## II. Квазиметрики, являющиеся степенями метрики

Пусть $(X, \rho)$ – метрическое пространство с конечным диаметром, а $\mu$ – конечная регулярная борелевская мера с носителем в множестве $X$, удовлетворяющая условию удвоения

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_0 \mu(B(x, r)),$$

т.е. мера шара удвоенного радиуса оценивается через меру исходного шара. Это простое геометрическое условие обеспечивает для меры $\mu$ выполнение леммы Витали о покрытии, для локально суммируемых функций выполнение теоремы Лебега о дифференцировании интеграла, ограниченность максимального оператора Харди-Литтлвуда в пространствах $L_p(\mu)$ при $p > 1$. Из условия удвоения следует оценка

$$\mu(B(x, r)) \geq C r^{\lambda},$$

где $\lambda = \log_2 C_0$. Степень $\lambda$ называется показателем регулярности меры $\mu$ и в теоремах вложения играет роль "размерности" метрического пространства $(X, \rho)$ [3].

На метрических пространствах с мерой П. Хайлашем были определены классы функций соболевского типа $L_p^1(X, \rho, \mu)$ и $W_p^1(X, \rho, \mu)$ и получены теоремы вложения в пространства Лебега [2]. Позднее сам П. Хайлаш вместо $W_p^1(X, \rho, \mu)$ стал использовать обозначение $M_p^1(X, \rho, \mu)$ [4].

Рассмотрим при $\gamma > 0$ семейство функций расстояния $\rho_\gamma(x,y) = (\rho(x,y))^\gamma$. Если $0 < \gamma \le 1$, то функции $\rho_\gamma(x,y)$ вновь является метриками. Это позволяет ввести гельдеровы классы функций $L_p^\gamma$ и $M_p^\gamma$, заменяя оценку в исходном определении пространств $L_p^1, M_p^1$ на

$$|u(x) - u(y)| \le (\rho(x,y))^\gamma (g(x) + g(y)). \tag{1}$$

При этом легко заметить, что

$$M_p^\gamma(X,\rho,\mu) = M_p^1(X,\rho_\gamma,\mu),$$

т.е. гельдеровы классы относительно исходной метрики можно рассматривать как пространства с "единичной" гладкостью, но относительно гельдеровой метрики. Такие гельдеровы классы функций рассматривались в работах [5, 6], для них были получены метрические аналоги различных классических результатов, в том числе теоремы вложения в пространства Лебега.

Случай $\gamma > 1$ ранее не рассматривался, поскольку при таких показателях $\gamma$ функция $\rho_\gamma(x,y)$ не обязана быть метрикой, но она всегда является симметрической $(q,q)$-квазиметрикой, где $q = 2^{\gamma-1}$. Это означает, что при $\gamma > 1$ мы можем рассматривать пространства $S_p^1(X,\rho_\gamma,\mu)$. Отметим, что при $0 < \gamma \le 1$ в силу симметричности квазиметрики пространства $M_p^1(X,\rho_\gamma,\mu)$ и $S_p^1(X,\rho_\gamma,\mu)$ совпадают.

**Замечание.** В евклидовом случае условие Гельдера с показателем большим единицы не имеет особого смысла в силу вырожденности класса функций, удовлетворяющих такой оценке. В метрическом случае ситуация несколько иная – исходная метрика может быть такой, что при возведении в некоторую степень больше единицы она все еще остается метрикой. С другой стороны, появление квазиметрики при возведении в достаточно большую степень и возможность получения содержательных результатов для новых функциональных классов представляет самостоятельный интерес.

Нашей основной целью является получение различных теорем вложения для пространств $S_p^1(X,\rho_\gamma,\mu)$. Можно получить прямые доказательства соответствующих вложений, но мы попытаемся свести квазиметрический случай к метрическому и воспользоваться уже известными результатами. Для этого нам понадобится некоторая дополнительная информация.

Символом $u_E$ будем обозначать среднее значение функции $u$ на множестве $E$

$$u_E = \fint_E u\,d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E u\,d\mu.$$

Для шаров в метрическом пространстве $(X,\rho)$ будем использовать стандартное обозначение $B(x,r)$. При $\gamma > 0$ для интегрируемой функции $u$ положим

$$I_\gamma(u,r,x) = r^{-\gamma} \fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|\,d\mu.$$

Уточненную максимальную функцию порядка $\gamma$ определим равенством

$$u_\gamma^{\#}(x) = \sup_{r>0} I_\gamma(u,r,x).$$

Согласно работе [3] для всех точек Лебега локально суммируемой функции $u$ при $\gamma > 0$ выполняется неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq C(\rho(x, y))^{\gamma}(u_{\gamma}^{\#}(x) + u_{\gamma}^{\#}(y)). \tag{2}$$

**Лемма 2.1.** При $1 < p < \infty$ и $\gamma > 0$ для функции $u \in L_p(\mu)$ следующие условия эквивалентны:

1) $u \in S_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)$;

2) существует такая функция $h \in L_p(\mu)$, что для произвольных $x \in X$ и $r > 0$ выполняется неравенство Пуанкаре

$$\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| d\mu \leq r^{\gamma} \fint_{B(x,r)} h \, d\mu; \tag{3}$$

3) $u_{\gamma}^{\#} \in L_p(\mu)$.

Доказательство утверждения является почти дословным повторением доказательства теоремы 3.4 работы [3].

Шаги $1 \Rightarrow 2$ и $2 \Rightarrow 3$ являются следствием повторного интегрирования неравенства (1) по шару и ограниченности максимального оператора Харди-Литтлвуда в пространствах $L_p(\mu)$ при $p > 1$. Шаг $3 \Rightarrow 1$ является следствием неравенства (2).

Множество функций $\{h\}$, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре, является выпуклым и замкнутым в $L_p(\mu)$. В силу равномерной выпуклости пространства Лебега при $p > 1$ существует функция $h_0 \in \{h\}$, имеющая минимальную $L_p$-норму.

При этом

$$||h_0 \mid L_p(\mu)|| \sim ||u_{\gamma}^{\#} \mid L_p(\mu)|| \sim ||u \mid s_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)||.$$

**Теорема 2.2.** Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \gamma < \infty$, $0 < \beta < \gamma$. Тогда пространство $s_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)$ непрерывно вложено в пространство $s_q^1(X, \rho_\beta, \mu)$, где

1) $1 \leq q \leq q_0 = \frac{p\lambda}{\lambda - (\gamma-\beta)p}$ при $(\gamma - \beta)p < \lambda$;

2) $1 \leq q < \infty$ при $(\gamma - \beta)p = \lambda$;

3) $1 \leq q \leq \infty$ при $(\gamma - \beta)p > \lambda$.

*Доказательство.* 1) Напомним, что символом $\lambda$ обозначена "размерность" метрического пространства и выполняется оценка $\mu(B(x, r)) \geq Cr^{\lambda}$.

Согласно лемме 2.1 достаточно показать, что из принадлежности функции $u$ пространству $s_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)$ следует $u_{\beta}^{\#} \in L_{q_0}(\mu)$.

Если функция $u$ отлична от постоянной, то $u_{\beta}^{\#}$ всюду больше нуля, а из оценки

$$I_{\beta}(u, r, x) = r^{\gamma-\beta} I_{\gamma}(u, r, x) \leq r^{\gamma-\beta} u_{\gamma}^{\#}(x)$$

следует, что $u_{\beta}^{\#}$ почти всюду конечна.

Пусть $u_{\beta}^{\#}(x) = t < \infty$. Фиксируем такое значение $r$, что $t \leq 2I_{\beta}(u, r, x)$. Тогда

$$tr^{\beta-\gamma} \leq 2I_{\gamma}(u, r, x) \leq u_{\gamma}^{\#}(x). \tag{4}$$

С другой стороны, используя неравенства Пуанкаре и Гельдера и учитывая оценку меры шара через его радиус, получаем

$$t \le 2r^{-\beta} \fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| d\mu \le 2r^{\gamma-\beta} \fint_{B(x,r)} h_0 \, d\mu$$

$$\le 2r^{\gamma-\beta} \left(\mu(B(x,r))\right)^{-1/p} ||h_0 \mid L_p(\mu)|| \le C_1 r^{-\lambda/q_0} ||h_0 \mid L_p(\mu)||. \tag{5}$$

Отсюда следует, что $r^{-1} \ge C_2 \, t^{q_0/\lambda} ||h_0 \mid L_p(\mu)||^{-q_0/\lambda}$. Подставляя эту оценку в (4), получаем

$$\left(u_\beta^\#(x)\right)^{q_0/p} \le C_3 ||h_0 \mid L_p(\mu)||^{q_0/p-1} u_\gamma^\#(x)$$

или

$$\left(u_\beta^\#(x)\right)^{q_0} \le C_4 ||u \mid s_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)||^{q_0 - p} \left(u_\gamma^\#(x)\right)^p .$$

Это и завершает доказательство первого пункта.

2) Поскольку мера множества $X$ конечна, то пространство $s_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)$ непрерывно вложено в пространство $s_{p^*}^1(X, \rho_\gamma, \mu)$ при всех $p^* < p$. Поэтому пункт 2 является непосредственным следствием пункта 1.

3) Учитывая конечность диаметра множества $X$ и условие $\gamma - \beta - \lambda/p > 0$, воспользуемся промежуточной оценкой в неравенстве (5)

$$u_\beta^\#(x) \le 2r^{\gamma-\beta} \left(\mu(B(x,r))\right)^{-1/p} ||h_0 \mid L_p(\mu)|| C_1 r^{\gamma-\beta-\lambda/p} ||h_0 \mid L_p(\mu)||$$

$$\le C_0 ||u \mid s_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)||.$$

Следовательно $u_\beta^\# \in L_\infty(\mu)$. □

**Замечание.** В силу конечности диаметра и меры множества $X$ пространства $s_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)$ и $S_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)$ совпадают как множества функций и отличаются лишь нормировкой. Это следует из простой оценки: если функция $u \in s_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)$, то $u_\gamma^\# \in L_p(\mu)$, фиксируем такую точку $x_0 \in X$, что $|u(x_0)| < \infty$ и $u_\gamma^\#(x_0) < \infty$, тогда согласно неравенству (2) для произвольной точки $x \in X$

$$|u(x)| \le |u(x_0)| + (diam\, X)^\gamma \left(u_\gamma^\#(x) + u_\gamma^\#(x_0) X\right).$$

Поэтому $u \in L_p(\mu)$.

Чтобы получить теоремы вложения для функций из пространств $S_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)$ в пространства Лебега при $\gamma > 1$ воспользуемся теоремой 2.1 и известными результатами для пространств $L_p^1(X, \rho, \mu) = s_p^1(X, \rho_1, \mu)$ [2, 5]:

*Пусть* $1 < p < \infty$ *и функция* $u \in L_p^1(X, \rho, \mu)$.

1. *Если* $p < \lambda$, *то* $u \in L_q(\mu)$, *где* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}$. *При этом*

$$||u - u_X \mid L_q(\mu)|| \le C ||u \mid L_p^1||.$$

2. *Если* $p = \lambda$, *то* $u \in BMO(X, \rho, \mu)$.
3. *Если* $p > \lambda$, *то* $u \in L_\infty(\mu)$.

**Теорема 2.2.** Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma > 1$ и функция $u \in S_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)$, тогда выполняются следующие вложения:

1. если $\gamma p < \lambda$, то $u \in L_q(\mu)$, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{\lambda}$. При этом

$$||u - u_X \mid L_q(\mu)|| \le C ||u \mid s_p^1(X, \rho_\gamma, \mu)||;$$

2. Если $\gamma p = \lambda$, то $u \in BMO(X, \rho, \mu)$;
3. Если $\gamma p > \lambda$, то $u \in L_\infty(\mu)$.

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 2.1, результатами для пространств $L_p^1$ и цепочкой вложений

$$s_p^1(X, \rho_\gamma, \mu) \subset L_r^1(X, \rho, \mu) \subset L_q(\mu),$$

где $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\gamma - 1}{\lambda}$.

При этом для показателей суммируемости выполняются следующие соотношения: 1) если $\gamma p < \lambda$, то $r < \lambda$; 2) если $\gamma p = \lambda$, то $r = \lambda$; 3) если $\gamma p > \lambda$, то $r > \lambda$.

## III. Квазиметрики, порождаемые мерой

Относительно метрического пространства $(X, \rho)$ и меры $\mu$ будем предполагать выполнение условий предыдущего параграфа. Дополнительно предположим, что мера любой точки равна нулю. Для удобства будем считать произвольную точку замкнутым шаром нулевого радиуса, т.е. $\{x\} = \overline{B(x, 0)}$.

Отметим, что условие удвоения обычно формулируется для открытых шаров, но оно выполняется и для замкнутых шаров быть может с другой постоянной. Действительно, замкнутый шар $\overline{B(x, 2r)}$ является подмножеством открытого шара $B(x, 4r)$, поэтому

$$\mu(\overline{B(x, 2r)}) \le \mu(B(x, 4r)) \le C_0^2 \mu(B(x, r)) \le C_0^2 \mu(\overline{B(x, r)}).$$

Очевидно, что $C_0^2$ – это грубая оценка, которая выполняется всегда, но, к примеру, в случае непрерывной зависимости меры шара от радиуса постоянные в условиях удвоения для открытых и замкнутых шаров будут одинаковы.

Постоянную в условии удвоения для замкнутых шаров будем обозначать символом $C_\rho$, т.е.

$$\mu(\overline{B(x, 2r)}) \le C_\rho \, \mu(\overline{B(x, r)}).$$

Рассмотрим функцию $\eta : X \times X \to [0, \infty)$, полагая

$$\eta(x, y) = \mu(\overline{B(x, \rho(x, y))}).$$

**Свойство 1.** Функция $\eta$ является функцией расстояния.

*Доказательство.* Если $x = y$, то $\rho(x, y) = 0$ и $\eta(x, y) = \mu(\overline{B(x, 0)}) = \mu(\{x\}) = 0$.

Пусть $\eta(x, y) = 0$. Предположение, что $x \ne y$ приводит к противоречию, т.к. в этом случае $\rho(x, y) = r > 0$ и по следствию из условия удвоения $\eta(x, y) = \mu(\overline{B(x, r)}) > 0$.

□

**Свойство 2.** Функция расстояния $\eta$ является $C_\rho$-симметрической.

Это свойство является следствием включения $\overline{B(x, \rho(x, y))} \subset \overline{B(y, 2\rho(y, x))}$ и очевидной оценки

$$\eta(x, y) = \mu(\overline{B(x, \rho(x, y))}) \le \mu(\overline{B(y, 2\rho(y, x))}) \le C_\rho \mu(\overline{B(y, \rho(y, x))}) = C_\rho \eta(y, x).$$

**Свойство 3.** Функция расстояния $\eta$ является $(q_1, q_2)$-квазиметрикой, где $q_1 \le C_\rho, q_2 \le C_\rho^3$.

*Доказательство.* Поскольку $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$, то всегда выполняется хотя бы одно из неравенств: *a)* $\rho(x,z) \ge \frac{1}{2}\rho(x,y)$; *b)* $\rho(z,y) \ge \frac{1}{2}\rho(x,y)$.

a) Если $\rho(x,z) \ge \frac{1}{2}\rho(x,y)$, то для любого $t \in \overline{B(x,\rho(x,y))}$ имеем $\rho(x,t) \le \rho(x,y) \le 2\rho(x,z)$. Следовательно $t \in \overline{B(x,2\rho(x,z))}$.

b) Если $\rho(z,y) \ge \frac{1}{2}\rho(x,y)$, то для любого $t \in \overline{B(x,\rho(x,y))}$ имеем

$$\rho(z,t) \le \rho(z,x) + \rho(x,t) \le \rho(z,y) + \rho(y,x) + \rho(x,t) \le \rho(z,y) + 2\rho(x,y) \le 5\rho(z,y).$$

Следовательно $t \in \overline{B(z,5\rho(z,y))}$.

Таким образом

$$\overline{B(x,\rho(x,y))} \subset \overline{B(x,2\rho(x,z))} \cup \overline{B(x,5\rho(z,y))}.$$

В результате получаем

$$\eta(x,y) = \mu(\overline{B(x,\rho(x,y))}) \le \mu(\overline{B(x,2\rho(x,z))}) + \mu(\overline{B(x,5\rho(z,y))})$$

$$\le C_\rho \mu(\overline{B(x,\rho(x,z))}) + C_\rho^3 \mu(\overline{B(x,\rho(z,y))}) = C_\rho \eta(x,z) + C_\rho^3 \eta(z,y).$$

Это означает, что функция $\eta$ является $(q_1,q_2)$-квазиметрикой.

$\square$

При всех $0 < \gamma < \infty$ функция $(\eta(x,y))^\gamma$ будет $\tilde{q}_0$-симметрической $(\tilde{q}_1,\tilde{q}_2)$-квазиметрикой, и мы можем определить соответствующие классы соболевского типа.

В данном случае нам будет удобнее ввести обозначение отличное от использованного в предыдущем параграфе. Положим

$$\eta_\alpha(x,y) = (\eta(x,y))^{1/\alpha}.$$

В этой заметке мы ограничимся рассмотрением специального случая, когда $\alpha = \lambda$ ($\lambda$ – "размерность" метрического пространства).

Оказывается, что пространства соболевского типа $s_p^1(X,\eta_\lambda,\mu)$ и $S_p^1(X,\eta_\lambda,\mu)$ совпадают соответственно с пространствами $L_{p,\lambda}(X,\rho,\mu)$ и $W_{p,\lambda}(X,\rho,\mu)$, рассматривавшимися в работах [7, 8].

Это позволяет для пространств $s_p^1(X,\eta_\lambda,\mu)$ получить (как следствие работ [7, 8]) теоремы вложения, формулировки которых вполне аналогичны соответствующим утверждениям предыдущего параграфа.

**Теорема 3.1.** Пусть $1 < p < \infty, \lambda < \alpha < \infty$ и $\frac{1}{p} > \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha}$. Тогда пространство $s_p^1(X,\eta_\lambda,\mu)$ непрерывно вложено в пространство $s_q^1(X,\eta_\alpha,\mu)$, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\lambda}$.

**Теорема 3.2.** Пусть $1 < p < \infty$ и функция $u \in s_p^1(X,\eta_\lambda,\mu)$.

1. Если $p < \lambda$, то $u \in L_q(\mu)$, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}$. При этом

$$||u - u_X \mid L_q(\mu)|| \le C||u \mid s_p^1(X,\eta_\lambda,\mu)||.$$

2. Если $p = \lambda$, то $u \in BMO(X,\rho,\mu)$.
3. Если $p > \lambda$, то

$$||u - u_X \mid L_\infty(\mu)|| \le C||u \mid s_p^1(X,\eta_\lambda,\mu)||.$$

## References


[1] A.V. Arutyunov, A.V. Greshnov, *Theory of* $(q_1, q_2)$*-quasimetric spaces and coincidence points*, Doklady Mathematics, **94**:1 (2016), 434–437. MR3561341

[2] P. Hajlasz, *Sobolev spaces on an arbitrary metric space*, Potential Anal., **5**:4 (1996), 403–415. MR1401074

[3] P. Hajlasz, J. Kinnunen, *Hölder quasicontinuity of Sobolev functions*, Rev. Mat. Iberoamericana, **14**:3 (1998), 601–622. MR1681586

[4] P. Hajlasz, P. Koskela, *Sobolev met Poincare*, Memoirs AMS, **145** (2000), no. 688. MR1683160

[5] A.S. Romanov, *Embedding theorems for generalized Sobolev spaces*, Siberian Math. Journal, **40**:4 (1999), 787–792. MR1721684

[6] A.S. Romanov, *Traces of functions of generalized Sobolev classes*, Siberian Math. Journal, **48**:4 (2007), 678–693. MR2355379

[7] A.S. Romanov, *Embedding Theorems for a Certain Function Class of Sobolev Type on Metric Spaces*, Siberian Math. Journal, **45**:2 (2004), 376–387. MR2061423

[8] A.S. Romanov, *On Embeddings for Classes of Functions with Generalized Smoothness on Metric Spaces*, Siberian Math. Journal, **45**:4 (2004), 722–729. Zbl 1085.46025



Romanov Alexandr Sergeevich,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
*E-mail address*: asrom@math.nsc.ru