S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1456–1462 (2017) УДК 517.968+517.544

DOI 10.17377/semi.2017.14.125 MSC 45A05+47A68

ОБРАТНАЯ И ПРЯМАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В СВЕРТКАХ НА ПОЛУПРЯМОЙ

А.Ф. ВОРОНИН

Abstract. In this paper we study the integral equation first kind of convolution on the semi-infinite interval. The next two tasks are:
1. Task is reconstruction of history. From the integral equation it is required to find two functions u(t) for t>0 and f(t) for 0<t<b for given values of the right side of the equation f(t) for t>b (u(t) — solution of integral equation).
2. The problem of inversion of the integral operator.
Uniqueness theorems are proved, necessary and sufficient conditions for solvability are found, explicit formulas for solutions are received.

Keywords: integral equation of the first kind, convolution, inverse problem on restoration history, the necessary and sufficient conditions for solvability, an explicit formula, uniqueness conditions.

Введение

В работе будет рассмотрено неоднородное интегральное уравнение первого рода в свертках на полубесконечном интервале:

$$\int_0^\infty k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0,\infty), \tag{0.1}$$

где

$$k \in L_1(R),\ f \in L_1(0,\infty). \tag{0.2}$$

Кроме того предполагается, что функции f, k кусочно-дифференцируемы и носитель ядра k содержится в интервале $(-\infty, b)$ для некоторого $b > 0$, другими словами,

$$k(t) = 0,\ t \in (b,\infty),\ k' \in L_1(-\infty,b),\ f' \in L_1((0,\infty)\setminus b), \tag{0.3}$$

Voronin, A.F., The inverse and direct problem for equation of the first kind of convolution on the half-line.

Поступила 10 октября 2017 г., опубликована 14 декабря 2017 г.

где

$$k(b-0) = c_0 \neq 0.$$

Решаются следующие две задачи:

задача (A_1)(задача реконструкции истории): из уравнения (0.1) требуется найти две функции $u \in L_1(0,\infty)$ и $f(t),\ t \in (0,b)$, по заданным значениям $f(t),\ t \in (b,\infty)$, при условиях (0.2)-(0.3).

задача (A_2)(задача обращения интегрального оператора): требуется найти решение $u \in L_1(0,\infty)$ уравнения первого рода (0.1) при условиях (0.2)-(0.3).

Таким образом, задачу (A_1) можно трактовать как задачу (A_2), в которой известна лишь часть информации о функции f (известна $f(t),\ t \in (b,\infty)$), и дополнительно требуется найти $f(t),\ t \in (0,b)$.

Цель работы – получить необходимые и достаточные (эффективно проверяемые) условия разрешимости и единственности решения задач (A_1) и (A_2), построить явные формулы для их решения.

Уравнение (0.1) имеет широкие приложения и является одним из наиболее востребованных интегральных уравнений. Рассматриваемые задачи (A_1) и (A_2) исследованы не были. Задачи (A_1) и (A_2) изучались в работе автора [1] в частном случае, когда $k(t) = 0,\ t < 0$. В этом случае уравнение (0.1) — уравнение Вольтерра 1-го рода в свертках. Необходимо отметить, что в общем случае исследование уравнения Вольтерра в свертках первого рода и уравнения полной свертки (уравнение (0.1)) различны. Автором было замечено, что наличие особенности у ядра $k(t)$ в точке $t = b$ (функция $k(t)$ терпит разрыв первого рода в точке $t = b$) позволяет применить единый подход к решению задач для уравнения Вольтерра в [1] и аналогичных задач ((A_1) и (A_2)) для уравнения (0.1) (в настоящей работе). В настоящей работе сохранена структура работы [1], чтобы подчеркнуть концептуальную связь этих двух работ.

Изучаемый случай (ограничение (0.3)) принципиально отличается от случаев, рассматриваемых в литературе (см., например, [2, гл. IV, § 17; 3, гл. 5.2]). Если вместо условия (0.3) выполнено следующее условие:

$$k' \in L_1(R \setminus 0),\ k(+0) - k(-0) \neq 0, \tag{$0.3)_1$}$$

то интегральное уравнение (0.1) (дифференцированием по t) сводится к уравнению Винера-Хопфа, и для решения задачи (A_2) применима хорошо развитая теория уравнения Винера-Хопфа [2-4]. Однако при выполнении условия $(0.3)_1$ задача (A_1) не возникает. Отметим также, что на данный момент теория решения уравнения (0.1) при достаточно общих условиях на ядро k, например, при условии (0.2), далека от завершения. Исследованию поддаются лишь частные случаи уравнения (0.1), в которых, как правило, удается дифференцированием по t (в каком либо смысле) свести исходное уравнение 1-го рода к уравнению 2-го рода [2, гл. IV, § 17; 3, гл. 5.2].

В пункте 1 настоящей работы сформулированы основные ее результаты, в п. 2 приведены доказательства этих результатов.

Будем обозначать через $\mathcal{F}g(p) \equiv \mathcal{F}\{g(t)\}(p)$ — образ Фурье функции $g \in L_1(R)$,

$$\mathcal{F}g(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{ipt}\,dt,\ p \in R.$$

Положим W_0 — алгебра Винера непрерывных функций, состоящая из образов Фурье вида $\mathcal{F}g$; W_{0+} (W_{0-}) — подалгебра в W_0, состоящая из функций вида $\mathcal{F}g$ таких, что $g(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$).

На алгебре W_0 определим дополнительные друг к другу проекторы P_0^+ и P_0^- по следующим формулам:

$$P_0^{\pm} \ : \ W_0 \ \to \ W_{0\pm}, \ P_0^{\pm}\mathcal{F}g(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} g(t)\theta(\pm t)\, dt, \ p \in R,$$

где θ — функция Хевисайда.

Отметим следующие свойства линейных операторов $P_0^{\pm}$:

$$P_0^+ + P_0^- = I, \ \mathcal{F}^{-1}\{P_0^{\pm}\mathcal{F}g(p)\}(t) = g(t)\theta(\pm t), \ t \in R,$$

где I — единичный оператор, $\mathcal{F}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье.

1. **Основные результаты**

Положим

$$\Lambda^-(p) := c_0 - e^{-ipb}\mathcal{F}k'(p), \ p = x + iy, \ x \in R, \ y \leq 0, \tag{1.1}$$

где

$$\mathcal{F}k'(p) = \int\limits_{-\infty}^{b} e^{ipt} k'(t)\, dt.$$

Из теоремы единственности для аналитических функций следует, что аналитическая в полуплоскости Im p<0 функция $\Lambda^-(p)$ может иметь лишь конечное число нулей в полуплоскости Im p ≤ 0 в виду того, что

$$\lim_{|x|\to\infty} \Lambda^-(x+iy) = c_0, \ y \leq 0; \ \lim_{y\to-\infty} \Lambda^-(x+iy) = c_0, \ x \in R,$$

где $c_0 \neq 0$.

Нули функции $\Lambda^-(p)$ в полуплоскости Im $p \leq 0$ будем обозначать через $p_j, \ j = 1, ..., J$, где J – общее число нулей (без учета их кратности), через n_j будем обозначать кратность p_j-го нуля ($j = 1, ..., J$).

Сформулируем основные результаты. Начнем с теоремы единственности для задач $(A_1), (A_2)$.

Теорема 1.1 *Если $J = 0$, то задачи (A_1) и (A_2) могут иметь не более одного решения.*

Перейдем теперь к формулировкам теорем существования. Положим

$$f_0(t) := f(t), \ t \in (0,b), \ f_0(t) := 0, \ t > b; \ f_+(t) := f(t+b), \ t \in (0,\infty);$$

$$\Lambda^-(p) \neq 0, \ \mathrm{Im}\, p = 0, \tag{1.2}$$

$$\widehat{h}(p) := \frac{\mathcal{F}f'_+(p)}{\Lambda^-(p)} \ \ (f'_+(t) = 0, \ t < 0).$$

По теореме Винера [2, с. 4] из (1.2) следует, что

$$h(t) := \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{h}(x)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \widehat{h}(x)\, dx \in L_1(R). \tag{1.3}$$

Положим

$$Q^+(p) := \sum_{j=1}^{J} \sum_{l=1}^{n_j} c_{lj}(p-p_j)^{-l}, \ p \in R \ \ (Q^+ = 0 \text{ при } J = 0),$$

$$h_{\pm}(t) := \theta(\pm t)h(t), \ q_-(t) := \mathcal{F}^{-1}\{\Lambda^-(p)Q^+(p)\}(t), \tag{1.4}$$

где c_{lj} – произвольные комплексные постоянные, $l = 1, ..., n_j, \ j = 1, ..., J$ ($c_{lj} = 0$ при $J = 0$).

Справедливы следующие две теоремы существования.

Теорема 2.1 *Пусть выполнено неравенство в (1.2). Тогда задача* (A_1) *разрешима. Общее решение задачи находится по следующим явным формулам:*

$$u(t) = \sum_{j=1}^{J} e^{-ip_j t} \sum_{l=1}^{n_j} \tilde{c}_{lj} t^{l-1} - h(t),\ t \in (0, \infty), \tag{1.5}$$

где

$$\tilde{c}_{lj} = \frac{c_{lj}}{(l-1)!}(-i)^l,\ l = 1, ..., n_j,\ j = 1, ..., J,$$

$$f_0'(t) = -c_0 h_-(t-b) + \int\limits_{-\infty}^{0} k'(t-s) h_-(s)\, ds - q_-(t-b),\ t \in (0, b), \tag{1.6}$$

$$f_0(t) := \int\limits_{0}^{t} f_0'(s)\, ds + \widetilde{c},\ t \in (0, b),\ \widetilde{c} = const. \tag{1.7}$$

Постоянная $\widetilde{c}$ *в (1.7) определяется из условия*

$$f_0(b-0) = f(b+0). \tag{1.8}$$

Теорема 3.1 *Пусть выполнено неравенство в (1.2). Тогда задача* (A_2) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$f(b-0) = f(b+0) \tag{1.9}$$

и существуют такие постоянные $c_{lj},\ l = 1, ..., n_j,\ j = 1, ..., J$, *в выражении для* Q^+ *(в (1.4)), что*

$$f'(t) = -c_0 h_-(t-b) + \int\limits_{-\infty}^{0} k'(t-s) h_-(s)\, ds - q_-(t-b),\ t \in (0, b). \tag{1.10}$$

Если условия существования (1.9)-(1.10) выполнены, то общее решение задачи выражается следующей явной формулой (в образах Фурье):

$$\mathcal{F}u(p) = Q^+(p) - P_0^+ \widehat{h}(p),\ p \in R, \tag{1.11}$$

где $u(t) = 0,\ t < 0$.

2. Доказательство теорем

Можно видеть, что теорема 1.1 вытекает из теорем 2.1 и 3.1 (что будет показано ниже). Прежде чем приступить к доказательству теорем 2.1 и 3.1 отметим, что правая часть равенства (1.11) является образом Фурье-Лапласа правой части равенства (1.5). Выражения для $f'(t),\ t \in (0, b)$, в равенствах (1.6) (здесь $f_0 = f$) и (1.10) совпадают. Причем, правая часть равенств в (1.6) и в (1.10) принадлежит $L_1(0, \infty)$ и равна нулю при $t > b$. В самом деле, из выражения для правой части равенства в (1.6) (или из выражения для правой части равенства в (1.10)) и соотношений

$$h_-(t) = q_-(t) = k'(t+b) = 0,\ t > 0,\ h_-, q_-, k' \in L_1(R),$$

которые выполняются по построению, вытекает, что $f_0' \in L_1(0, b),\ f_0'(t) = 0,\ t > b$ (или $f' \in L_1(0, b),\ f'(t) = 0,\ t > b$). Более того, доказательство теорем 2.1 и 3.1 формально совпадают и будут проведены по одной схеме. Для удобства начнем доказательства с теоремы 3.1.

Предположим, сначала, что решение задачи (A_2) существует. Положив

$$u_-(t) := \int\limits_{0}^{\infty} k(t-s) u(s)\, ds,\ t < 0,\ u_-(t) := 0,\ t > 0,\ f(t) := 0,\ t < 0,$$

запишем уравнение (0.1) для всех $t \in R$. Имеем

$$\int_0^\infty k(t-s)u(s)\,ds = f(t) + u_-(t),\ \ t \in R. \tag{2.1}$$

Тогда левая и правая части уравнения (2.1) из $L_1(R)$ по построению. Применив к уравнению (2.1) преобразование Фурье по $t \in R$, с учетом формулы для образа Фурье свертки, имеем

$$\mathcal{F}k(p)\mathcal{F}u(p) = \mathcal{F}f(p) + \mathcal{F}u_-(p),\ \ p \in R, \tag{2.2}$$

где

$$\mathcal{F}f(p) = \int_0^\infty e^{ipt} f(t)\,dt,\ \ \mathcal{F}k(p) = \int_{-\infty}^b e^{ipt} k(t)\,dt,$$

$$\mathcal{F}u(p) = \int_0^\infty e^{ipt} u(t)\,dt,\ \ \mathcal{F}u_-(p) = \int_{-\infty}^0 e^{ipt} u_-(t)\,dt.$$

С помощью формулы интегрирования по частям преобразуем вышестоящие интегралы. Имеем соответственно:

$$e^{-ipb}\mathcal{F}f(p) = -\frac{1}{ip}\Big(e^{-ipb}(\mathcal{F}f_0'(p) + f(0+0)) + \Delta + \mathcal{F}f_+'(p)\Big), \tag{2.3}$$

где

$\Delta = f(b+0) - f(b-0),\ \ f_0'(t) = 0,\ \ t > b;$

$$e^{-ipb}\mathcal{F}k(p) = \frac{1}{ip}e^{-ipb}\Big(e^{ipb}k(b-0) - \mathcal{F}k'(p)\Big) = \frac{1}{ip}\Lambda^-(p); \tag{2.4}$$

$$\mathcal{F}u_-(p) = \frac{1}{ip}(u_-(0-0) - \mathcal{F}u_-'(p)), \tag{2.5}$$

где

$$u_-'(t) = \int_0^\infty k'(t-s)u(s)\,ds,\ \ t < 0,\ \ u_-(0-0) = f(0+0).$$

Последние три равенства непосредственно следует из определения функции u_- и теоремы о дифференцируемости под знаком интеграла (т.к. $k, k' \in L_1(-\infty, b),\ u \in L_1(0,\infty)$).

Из (2.4) и неравенства в (1.2) вытекает, что $p\mathcal{F}k(p) \neq 0,\ p \in R$. Разделив левую и правую части равенства (2.2) на $\mathcal{F}k(p)$, с учетом (2.3)-(2.5), получим

$$\mathcal{F}u(p) = -\frac{1}{\Lambda^-(p)}\Big(e^{-ipb}\mathcal{F}f_0'(p) + \mathcal{F}f_+'(p) + \Delta + e^{-ipb}\mathcal{F}u_-'(p)\Big). \tag{2.6}$$

При $p \to \infty$ левая часть равенств (2.6) стремится к нулю, правая же часть также будет стремиться к нулю только при условии $\Delta = 0$. Следовательно, с необходимостью, условие (1.9) выполняется.

С учетом выражения для функции $\widehat{h}(x)$ из (1.2) (последняя принадлежит алгебре W_0 по построению) и равенства $\widehat{h}(x) = P_0^+\widehat{h}(x) + P_0^-\widehat{h}(x)$ перепишем (2.6) при $\Delta = 0$ в следующем виде:

$$\mathcal{F}u(p) + P_0^+\widehat{h}(p) = -\frac{1}{\Lambda^-(p)}e^{-ibp}(\mathcal{F}f_0'(p) + \mathcal{F}u_-'(p)) - P_0^-\widehat{h}(p). \tag{2.7}$$

Левая часть равенства (2.7) аналитически продолжается с прямой R в полуплоскость $p = x + iy,\ y > 0$ и регулярна там, непрерывна вплоть до границы и исчезает на бесконечности в этой полуплоскости. Правая часть равенства (2.7) аналитически продолжается с с прямой R в полуплоскость $p = x + iy,\ y < 0$ и регулярна там, за исключением, быть может, полюсов – нулей функции $\Lambda^-(p)$, непрерывна вплоть до границы и исчезает на бесконечности в этой полуплоскости (с выколотыми точками

$p_j,\ j=1,..,J$ – нулями функции $\Lambda^-(p)$). Тогда из (2.7) по теореме об аналитическом продолжении и обобщенной Лиувилля [4, с. 29] для Im $p=0$ получим, что левая и правая части уравнения (2.7) равны $Q^+(p)$, где рациональная функция Q^+ определена в (1.4). Другими словами, из (2.7) получили формулу (1.11) и следующее равенство:

$$-\frac{1}{\Lambda^-(p)}e^{-ibp}(\mathcal{F}f_0'(p)+\mathcal{F}u_-'(p))-P_0^-\widehat{h}(p)=Q^+(p). \tag{2.8}$$

Умножив левую и правую части равенства (2.8) на множитель $-\Lambda^-(p)e^{ibp}$ и применив к обеим частям вновь полученного равенства оператор P_0^+ имеем:

$$\mathcal{F}f_0'(p)+P_0^+\{\Lambda^-(p)e^{ibp}P_0^-\widehat{h}(p)\}=-P_0^+\{\Lambda^-(p)e^{ibp}Q^+(p)\},$$

т.к. $\mathcal{F}u_-'\in W_{0-},\ \mathcal{F}f_0'\in W_{0+}$ по построению. С учетом формулы (1.1), выражения для h_-, q_- в (1.4) и свойства проектора P_0^-, перепишем вышестоящее равенство в следующем виде:

$$\mathcal{F}f_0'(p)+c_0P_0^+\{e^{ibp}\mathcal{F}h_-(p)\}-P_0^+\{\mathcal{F}k'(p)\mathcal{F}h_-(p)\}=-P_0^+\{e^{ibp}\mathcal{F}q_-(p)\}. \tag{2.9}$$

Применим теперь к левой и правой частям равенства (2.9) обратное преобразование Фурье, с учетом следующих очевидных формул:

$$e^{ibp}\mathcal{F}h_-(p)=\mathcal{F}\{h_-(t-b)\}(p),\ \mathcal{F}k'(p)\mathcal{F}h_-(p)=\mathcal{F}\{\int\limits_{-\infty}^{0}k'(t-s)h_-(s)\,ds\}(p),$$

получим условие (1.10).

Докажем теорему 3.1 в другую сторону. Положим $\Delta:=0$ и определим функции u и f' по формулам (1.11) и (1.10) соответственно. Из (1.10) вытекает (2.9). Далее, поднимаясь по приведенному выше доказательству, начиная с (2.9), будем получать последовательно (2.8),(2.7),(2.6),(2.3) и (2.1),(0.1). Таким образом, функция $u(t)$, определенная из равенства (1.11) (с помощью обратного преобразования Фурье), будет решением уравнения (0.1). Теорема 3.1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.1. Теорема доказывается аналогично теореме 3.1. Приведем лишь схему доказательства. Предположим, сначала, что задача (A_1) имеет решение. Повторим доказательство теоремы 3.1 начиная с формулы (2.1) до слов "Докажем теорему 3.1 в другую сторону". В процессе доказательства получили формулы (1.10) и (1.11) и условие $\Delta=0$. Так как по определению $f_0(t)=f(t),\ t\in(0,b)$, то из (1.10) вытекает (1.6)–(1.7), а из условия $\Delta=0$ следует (1.8). Применив к обеим частям равенства (1.11) обратное преобразование Фурье, с учетом определения функций h и Q^+ в (1.3) и (1.4), получим (1.6). В одну сторону теорема 2.1 доказана. Доказательство теоремы 2.1 в другую сторону опустим, чтобы не повторяться.

Докажем теперь теорему единственности. Для этого в задачах (A_1) и (A_2) положим, соответственно, $f(t):=0,\ t>b$ и $f(t):=0,\ t>0$. Покажем в этом случае, что единственным решением задачи (A_1) и (A_2) будет лишь тривиальное решение. Из определений функции $\widehat{h}$ в (1.2) и функций Q^+,q_- при $J=0$ в (1.4) следует, что $h=Q^+=q_-=0$. Тогда из (1.5) (и из (1.11)) следует, что $u=0$, а из (1.6) следует, что $f_0'=0$. Из (1.7)–(1.8) получим $f_0(t)=0,\ t\in(0,b)$, т.к. $f(b+0)=0$. Теорема 1.1 доказана.

References

[1] Voronin A.F., *Recovery solutions of the Volterra equation of the first kind of convolution on the half with incomplete data*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9**, (2012), 464 –471. http://semr.math.nsc.ru MR3037865

[2] Krein M. G., *Integral equations on the half-line with a kernel depending on the difference of the arguments*, (Russian) Uspehi Mat. Nauk, **13**:5 (1958), 3–120. MR0102721

[3] S. Prossdorf, *Einige Klassen singularer Gleichungen*, Berlin, 1974. MR0499984
[4] F.D. Gahov, Yu.I. Cherskiy, *The equations of the convolution type*, (Russian) M.: Nauka, 1978. MR0527628

Anatoliy Fedorovich Voronin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: voronin@math.nsc.ru