S@MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1463–1471 (2017) УДК 517.958
DOI 10.17377/semi.2017.14.126 MSC 49J20, 76A05

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ В МОДЕЛИ ЖЕСТКО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ

М.А. АРТЕМОВ, А.В. СКОБАНЕВА

Abstract. In this paper, we consider the optimal control problem in a 3D flow model for incompressible rigid-viscoplastic media of the Bingham kind with homogeneous Dirichlet boundary conditions and a given cost functional. On the basis of methods of the theory of variational inequalities with pseudomonotone operators, a theorem on the solvability of the optimization problem in the class of weak steady solutions is proved.

Keywords: viscoplastic Bingham-type fluid, 3D flows, optimal control problem, variational inequalities.

1. Введение

Жестко-вязко-пластические среды типа Бингама [1, 2] характеризуются тем, что в них при малых напряжениях тензор скоростей деформаций равен **0** и в соответствующих областях среда движется как твердое тело до тех пор, пока некоторая функция напряжений не достигнет своего предела текучести; выше этого предела среда ведет себя уже как несжимаемая вязкая жидкость.

Модели бингамовских жидкостей достаточно универсальны и уже долгое время успешно применяются при описании потоков большого числа реальных вязкопластических сред, в том числе таких материалов, как цементы, бетон, суспензии, пасты, краски, гели, некоторые виды нефтей и масел.

Математическое изучение уравнений динамики сред Бингама началось в работах французских ученых Г. Дюво и Ж.-Л. Лионса. Полученные ими результаты подробно изложены в классической монографии [2].

Artemov, M.A., Skobaneva, A.V., On optimal control in a model of rigid-viscoplastic media with Dirichlet boundary conditions.

Поступила 22 августа 2017 г., опубликована 15 декабря 2017 г.

В настоящий момент исследования по данному направлению активно продолжаются; интерес к таким задачам стимулируется разнообразными приложениями как в математической гидродинамике, так в и ряде технологических процессов. Из последних опубликованных работ, связанных с вышеупомянутой моделью и ее обобщениями, можно отметить [3, 4, 5, 6, 7].

В предлагаемой статье ставится задача об оптимальном управлении трехмерным стационарным течением жестко-вязко-пластической среды типа Бингама в ограниченной области $\mathbb{R}^3$ при условии прилипания на границе области. Используя методы теории вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами, мы доказываем теорему о разрешимости задачи оптимизации в классе «слабых» решений.

Данная работа развивает результаты, полученные в [8] для случая нелинейно-вязких жидкостей. Отметим также статьи [9, 10, 11, 12], в которых рассматриваются близкие по постановке задачи оптимизации для моделей неньютоновских сред.

2. Формулировка задачи оптимального управления

Предположим, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Будем рассматривать задачу оптимизации стационарных трехмерных потоков несжимаемой жестко-вязко-пластической среды типа Бингама в области Ω:

$$\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - (\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})_j + \frac{\partial p}{\partial x_j} = f_j + u_j, \quad j \in \{1,2,3\}, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = \mu(|\boldsymbol{\mathcal{E}}|)\mathcal{E}_{ij} + g\frac{\mathcal{E}_{ij}}{|\boldsymbol{\mathcal{E}}|}, \text{ если } |\boldsymbol{\mathcal{E}}| \neq 0, \quad i,j \in \{1,2,3\}, \tag{3}$$

$$|\boldsymbol{\sigma}| \le g, \text{ если } |\boldsymbol{\mathcal{E}}| = 0, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}, \tag{6}$$

$$J(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \to \min. \tag{7}$$

В системе (1)–(7) используются обозначения: $\boldsymbol{v} = (v_1(\boldsymbol{x}), v_2(\boldsymbol{x}), v_3(\boldsymbol{x}))$ — скорость течения в точке $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ из области Ω, $p = p(\boldsymbol{x})$ — давление, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}))$ — девиатор тензора напряжений, $\boldsymbol{f} = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x}))$ — внешняя сила, действующая на среду, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}$ — вектор с компонентами

$$(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma})_j = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}, \quad j = 1,2,3,$$

$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})$ — тензор скоростей деформации,

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad i,j = 1,2,3,$$

$|\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2$ — второй инвариант тензора $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, определяемый по формуле

$$|\boldsymbol{\mathcal{E}}|^2 = \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\mathcal{E}} = \sum_{i,j=1}^{3} \mathcal{E}_{ij}^2,$$

$\mu(|\boldsymbol{\mathcal{E}}|) > 0$ — вязкость, $g = g(\boldsymbol{x}) > 0$ — порог текучести, разделяющий два типа поведения среды, $\boldsymbol{u} = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), u_3(\boldsymbol{x}))$ — набор управляющих параметров, $\boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$ — множество допустимых управлений, J — целевой функционал.

При рассмотрении задачи (1)–(7) мы считаем, что $\boldsymbol{f}$, μ, g, $\boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$, J — известны, а распределение скоростей $\boldsymbol{v}$ и управление $\boldsymbol{u}$ (вместе с ассоциированным с ними давлением p) являются неизвестными величинами.

Замечание 1. Данная задача может быть отнесена к так называемым *задачам со свободной границей*, т.е. таким задачам, в которых уравнения различны в различных частях рассматриваемой области. При этом неизвестная заранее свободная граница отделяет зону области Ω, где материал жесткий, от зоны, где материал проявляет жидкие свойства. Свободная граница участвует в постановке задачи неявно и может быть определена только после нахождения решений.

Замечание 2. Если положить $g \equiv 0$, то рассматриваемая реологическая модель сводится к модели нелинейно-вязкой жидкости [13]; если к тому же $\mu = \mathrm{const}$, то мы имеем дело с хорошо известной системой уравнений Навье–Стокса [14], описывающей динамику классической ньютоновской жидкости. При возрастании предела текучести g в потоке появляются области, где жидкость ведет себя подобно твердому телу, а при значительном увеличении g течение полностью блокируется.

3. Используемые функциональные пространства

Далее по тексту будут использоваться пространства Лебега $L_r(\Omega)$ и Соболева $W_q^m(\Omega)$, состоящие из функций, заданных в области Ω. Нормы в этих пространствах определяются обычным образом (см. [14, 15]). Когда речь идет о пространствах векторнозначных функций, будем использовать жирный шрифт: $\boldsymbol{L}_r(\Omega)$, $\boldsymbol{W}_q^m(\Omega)$ и т.д.

Пусть $\mathcal{D}(\Omega)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций. Замыкание множества $\mathcal{D}(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$ обозначим через $H_0^1(\Omega)$.

Из неравенства Пуанкаре [14]

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|\nabla v\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \quad C_1 = \mathrm{const},\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

следует, что в $H_0^1(\Omega)$ можно ввести норму

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}$$

и эта норма будет эквивалентна норме $\|\bullet\|_{W_2^1(\Omega)}$.

Введем также в рассмотрение пространство соленоидальных функций

$$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) : \ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \text{ в } \Omega\}$$

со скалярным произведением

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\boldsymbol{V}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{w})\, \boldsymbol{dx}$$

и нормой
$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}}^{1/2}.$$
Из неравенства Корна [2] для пространства $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$
$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} \le C_2 \|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \quad C_2 = \mathrm{const},\ \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega),$$
имеющего фундаментальное значение во многих задачах теории пластичности и вязко-упругости, вытекает, что введенная выше норма $\|\bullet\|_{\boldsymbol{V}}$ эквивалентна норме $\|\bullet\|_{\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)}$.

Через $\mathbb{M}_{\mathrm{sym}}^{3\times 3}$ обозначим пространство симметрических 3×3-матриц со скалярным произведением
$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})_{\mathbb{M}_{\mathrm{sym}}^{3\times 3}} = \boldsymbol{X} : \boldsymbol{Y} = \sum_{i,j=1}^{3} X_{ij} Y_{ij}$$
и евклидовой нормой
$$|\boldsymbol{X}| = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})_{\mathbb{M}_{\mathrm{sym}}^{3\times 3}}^{1/2}.$$
Как обычно, символы $\to$ и $\rightharpoonup$ обозначают соответственно сильную и слабую сходимость.

4. Основные предположения

Опишем теперь основные наши предположения относительно «данных» задачи (1)–(7). Далее считаем, что

(i) *множество допустимых управлений* $\boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}} \neq \varnothing$ *ограничено и секвенциально слабо замкнуто в* $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$;

(ii) *целевой функционал* $J\colon \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{L}_2(\Omega) \to \mathbb{R}$ *полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в* $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{L}_2(\Omega)$*, иными словами: для любой последовательности* $(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}_n)$ *такой, что* $(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}_n) \rightharpoonup (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ *в* $\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ *при* $n\to\infty$*, имеет место оценка*
$$J(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \le \liminf_{n\to\infty} J(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}_n);$$

(iii) *выполнено неравенство*
$$\big(\mu(|\boldsymbol{X}|)\boldsymbol{X} - \mu(|\boldsymbol{Y}|)\boldsymbol{Y}\big) : \big(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}\big) \ge 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{M}_{\mathrm{sym}}^{3\times 3};$$

(iv) *функция* μ *непрерывна, и существуют константы* μ_0 *и* μ_1 *такие, что*
$$0 < \mu_0 < \mu(s) < \mu_1, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}_+;$$

(v) *выполнено неравенство* $g(\boldsymbol{x}) > 0$ *для п.в.* $\boldsymbol{x} \in \Omega$ *и* $g \in L_2(\Omega)$;

(vi) *имеет место включение* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$.

Замечание 3. Для выполнения условия (iii) достаточно потребовать, чтобы функция μ была неубывающей на $\mathbb{R}_+$, например, $\mu(s) \equiv \arctan(s) + \mu_0$. В самом деле, с применением неравенства Коши–Буняковского–Шварца нетрудно получить, что
$$\begin{gathered}\big(\mu(|\boldsymbol{X}|)\boldsymbol{X} - \mu(|\boldsymbol{Y}|)\boldsymbol{Y}\big) : \big(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}\big)\\ = \mu(|\boldsymbol{X}|)|\boldsymbol{X}|^2 - \mu(|\boldsymbol{X}|)\boldsymbol{X} : \boldsymbol{Y} - \mu(|\boldsymbol{Y}|)\boldsymbol{X} : \boldsymbol{Y} + \mu(|\boldsymbol{Y}|)|\boldsymbol{Y}|^2\\ \ge \mu(|\boldsymbol{X}|)|\boldsymbol{X}|^2 - \mu(|\boldsymbol{X}|)|\boldsymbol{X}||\boldsymbol{Y}| - \mu(|\boldsymbol{Y}|)|\boldsymbol{X}||\boldsymbol{Y}| + \mu(|\boldsymbol{Y}|)|\boldsymbol{Y}|^2\\ = \big\{\mu(|\boldsymbol{X}|)|\boldsymbol{X}| - \mu(|\boldsymbol{Y}|)|\boldsymbol{Y}|\big\}(|\boldsymbol{X}| - |\boldsymbol{Y}|) \ge 0 \quad \forall\, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{M}_{\mathrm{sym}}^{3\times 3},\end{gathered}$$
если функция μ является неубывающей на $\mathbb{R}_+$.

Замечание 4. Типичным примером целевого функционала, удовлетворяющего условию (ii), служит функционал

$$J(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \lambda_1 \|\boldsymbol{v} - \widetilde{\boldsymbol{v}}\|^2_{\boldsymbol{V}} + \lambda_2 \|\boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)},$$

где $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ — заданные векторнозначные функции, λ_1 и λ_2 — неотрицательные параметры.

5. Вариационная формулировка задачи: допустимые пары и оптимальные решения

Введем теперь понятие допустимой пары «скорость-управление».

Пусть

$$\phi_g \colon \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}_+, \quad \phi_g(\boldsymbol{v}) = \int\limits_\Omega g|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|\, \boldsymbol{dx}.$$

Определение 1. Под *допустимой парой* задачи оптимизации (1)–(7) понимается пара векторнозначных функций $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$ такая, что

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{3} \int\limits_\Omega v_i \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx} + \int\limits_\Omega \mu(|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{dx} \\ + \phi_g(\boldsymbol{w}) - \phi_g(\boldsymbol{v}) \geq \int\limits_\Omega (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{dx} \end{aligned} \tag{8}$$

для любой пробной векторнозначной функции $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$.

Вариационное неравенство (8) определяет так называемые *слабые обобщенные решения* задачи. По поводу корректности данного определения отсылаем читателя к монографии [2].

Пусть $\boldsymbol{G}$ — множество всех допустимых пар задачи (1)–(7).

Определение 2. *Оптимальным решением* задачи (1)–(7) назовем пару вектор-функций $(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{u}_0) \in \boldsymbol{G}$, которая характеризуется равенством

$$J(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{u}_0) = \inf_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{G}} J(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}).$$

6. Теорема о разрешимости задачи оптимального управления

Основной результат работы формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *При выполнении приведенных выше условий* (i)–(vi) *задача* (1)–(7) *имеет хотя бы одно оптимальное решение* $(\widehat{\boldsymbol{v}}, \widehat{\boldsymbol{u}}) \in \boldsymbol{G}$ *и*

$$\int\limits_\Omega \mu(|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\widehat{\boldsymbol{v}})|)\, |\boldsymbol{\mathcal{E}}(\widehat{\boldsymbol{v}})|^2\, \boldsymbol{dx} + \int\limits_\Omega g|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\widehat{\boldsymbol{v}})|\, \boldsymbol{dx} = \int\limits_\Omega (\boldsymbol{f} + \widehat{\boldsymbol{u}}) \cdot \widehat{\boldsymbol{v}}\, \boldsymbol{dx}. \tag{9}$$

Доказательство данного результата базируется на теореме о разрешимости вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами и обобщенной теореме Вейерштрасса. Для удобства читателя приведем формулировки этих утверждений.

Лемма 1 (см. [16])**.** *Пусть* $\boldsymbol{E}$ *— рефлексивное B-пространство,* $\boldsymbol{E}'$ *— пространство, сопряженное к* $\boldsymbol{E}$*,* $\mathbf{A}\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ *— псевдомонотонный оператор, а* $\varphi\colon \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}$ *— выпуклая полунепрерывная снизу функция. Будем предполагать, что имеет место сходимость*

$$\frac{\langle \mathbf{A}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w}\rangle + \varphi(\boldsymbol{w})}{\|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{E}}} \to +\infty,$$

когда $\|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{E}} \to +\infty$.

Тогда для заданного элемента $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{E}'$ *существует решение* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}$ *вариационного неравенства*

$$\langle \mathbf{A}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{h}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}\rangle + \varphi(\boldsymbol{w}) - \varphi(\boldsymbol{v}) \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{E}.$$

Лемма 2 (обобщенная теорема Вейерштрасса [17])**.** *Пусть* $\boldsymbol{E}$ *— рефлексивное B-пространство,* $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{E}$ *— ограниченное и секвенциально слабо замкнутое множество. Предположим, что функционал* $\mathcal{J} : \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$ *полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в* $\boldsymbol{E}$*. Тогда существует элемент* $\boldsymbol{y}_0 \in \boldsymbol{Q}$ *такой, что*

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{y}_0) = \inf_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Q}} \mathcal{J}(\boldsymbol{y}).$$

Доказательство теоремы 1.

Шаг 1. Докажем сначала, что множество допустимых пар $\boldsymbol{G}$ непусто. Зафиксируем (временно) некоторый элемент $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$ и введем в рассмотрение два нелинейных оператора:

$$\mathbf{M}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}', \quad \langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle = \int\limits_{\Omega} \mu(|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{w})\, \boldsymbol{dx},$$

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{u}}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}', \quad \langle \mathbf{T}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle = -\sum_{i=1}^{3} \int\limits_{\Omega} v_i \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx} - \int\limits_{\Omega} (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{w}\, \boldsymbol{dx}.$$

С помощью этих операторов неравенство (8) можно переписать в виде:

$$\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}) + \mathbf{T}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}\rangle + \phi_g(\boldsymbol{w}) - \phi_g(\boldsymbol{v}) \geq 0 \quad \forall\, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}. \tag{10}$$

В силу условия (iii) оператор $\mathbf{M}$ обладает свойством монотонности. Кроме того, данный оператор семинепрерывен. Отсюда вытекает (см. [16]), что $\mathbf{M}$ является псевдомонотонным оператором.

Заметим также, что $\mathbf{T}_{\boldsymbol{u}}$ — усиленно непрерывный оператор, в чем несложно убедиться, принимая во внимание компактность вложения Соболева $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{L}_4(\Omega)$ (см. [15]). Поэтому $\mathbf{M} + \mathbf{T}_{\boldsymbol{u}}$ принадлежит классу псевдомонотонных операторов как сумма псевдомонотонного и усиленно непрерывного операторов (см. [16]).

Используя условие (iv) и равенство

$$\sum_{i=1}^{3} \int\limits_{\Omega} v_i \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}\, \boldsymbol{dx} = 0,$$

получаем, что

$$\frac{\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}) + \mathbf{T}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\rangle + \phi_g(\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}}} \to +\infty,$$

когда $\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}} \to +\infty$.

Применяя лемму 1, мы делаем вывод о том, что неравенство (10) имеет в пространстве $\boldsymbol{V}$ одно решение или несколько решений, одно из которых обозначим через $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}}$. Очевидно, что $(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{G}$.

Шаг 2. Покажем, что множество $\boldsymbol{G}$ ограничено в пространстве $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Возьмем произвольный элемент $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{G}$. В силу наших предположений множество $\boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$ ограничено в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ (см. условие (i)), поэтому нам необходимо оценить только норму скорости $\boldsymbol{v}$ в пространстве $\boldsymbol{V}$. Подставляя в (8) $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ и умножая полученное неравенство на -1, находим, что

$$\int\limits_\Omega \mu(|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|)\,|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|^2\,\boldsymbol{dx} + \int\limits_\Omega g|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|\,\boldsymbol{dx} \le \int\limits_\Omega (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{dx}, \tag{11}$$

Затем, полагая в (8) $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v}$, приходим к неравенству

$$\int\limits_\Omega \mu(|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|)\,|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|^2\,\boldsymbol{dx} + \int\limits_\Omega g|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|\,\boldsymbol{dx} \ge \int\limits_\Omega (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{dx}, \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует равенство

$$\int\limits_\Omega \mu(|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|)\,|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|^2\,\boldsymbol{dx} + \int\limits_\Omega g|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|\,\boldsymbol{dx} = \int\limits_\Omega (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{dx}, \tag{13}$$

откуда, принимая в расчет условие (iv), выводим неравенство

$$\mu_0\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{V}} \le C_\Omega\|\boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}}, \quad C_\Omega = \mathrm{const}.$$

Таким образом, мы получаем оценку нормы $\boldsymbol{v}$ в терминах $\Omega, \boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}, \boldsymbol{f}, \mu_0$:

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}} \le \frac{C_\Omega}{\mu_0} \sup_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}} \|\boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \le C(\Omega, \boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}, \boldsymbol{f}, \mu_0).$$

Тем самым доказана ограниченность $\boldsymbol{G}$.

Шаг 3. Покажем теперь, что множество $\boldsymbol{G}$ секвенциально слабо замкнуто в пространстве $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Возьмем произвольную последовательность $(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}_n) \in \boldsymbol{G}$ такую, что $(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}_n) \rightharpoonup (\boldsymbol{v}_*, \boldsymbol{u}_*)$ в $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{L}_2(\Omega)$ при $n \to \infty$, и проверим, что $(\boldsymbol{v}_*, \boldsymbol{u}_*) \in \boldsymbol{G}$.

Мы, очевидно, имеем слабую сходимость: $\boldsymbol{v}_n \rightharpoonup \boldsymbol{v}_*$ в $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{u}_n \rightharpoonup \boldsymbol{u}_*$ в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ и, более того, благодаря теореме о компактности вложения Соболева $\boldsymbol{W}^1_2(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{L}_4(\Omega)$ имеет место также сильная сходимость: $\boldsymbol{v}_n \to \boldsymbol{v}_*$ в $\boldsymbol{L}_4(\Omega)$ при $n \to \infty$.

Ввиду (i) получаем, что $\boldsymbol{u}_* \in \boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$. Далее, поскольку $(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{u}_n) \in \boldsymbol{G}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то выполнено неравенство:

$$\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}_n) + \mathbf{T}_{\boldsymbol{u}_n}(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}_n\rangle + \phi_g(\boldsymbol{w}) - \phi_g(\boldsymbol{v}_n) \ge 0 \quad \forall\, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V},\ n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Нам нужно выполнить предельный переход в (14), устремляя $n \to \infty$. Для этого заметим следующее.

Введем B-пространство $\boldsymbol{V}_g$, состоящее из элементов пространства $\boldsymbol{V}$, с нормой

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}_g} = \int\limits_\Omega g|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{v})|\,\boldsymbol{dx}.$$

Аксиомы нормы выполнены благодаря условию (v). К тому же справедливо соотношение

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}_g} \le \|g\|_{L_2(\Omega)}\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},$$

т. е. имеет место непрерывное вложение $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{V}_g$.

Отсюда делаем вывод о том, что $\boldsymbol{v}_n \rightharpoonup \boldsymbol{v}_*$ в $\boldsymbol{V}_g$ при $n \to \infty$ и

$$\|\boldsymbol{v}_*\|_{\boldsymbol{V}_g} \le \liminf_{n\to\infty} \|\boldsymbol{v}_n\|_{\boldsymbol{V}_g},$$

или, другими словами,

$$\phi_g(\boldsymbol{v}_*) \le \liminf_{n\to\infty} \phi_g(\boldsymbol{v}_n). \tag{15}$$

Далее, полагаем $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_*$ и осуществляем переход к нижнему пределу в (14); с учетом оценки (15) получаем

$$\liminf_{n\to\infty} \langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{v}_* - \boldsymbol{v}_n\rangle \ge 0,$$

откуда следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_*\rangle \le 0.$$

В силу псевдомонотонности оператора $\mathbf{M}$ приходим к неравенству:

$$\liminf_{n\to\infty} \langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{w}\rangle \ge \langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}_*), \boldsymbol{v}_* - \boldsymbol{w}\rangle \quad \forall\, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}. \tag{16}$$

Перепишем теперь неравенство (14) в более удобном для наших целей виде:

$$\phi_g(\boldsymbol{v}_n) - \phi_g(\boldsymbol{w}) \le -\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}_n) + \mathbf{T}_{\boldsymbol{u}_n}(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{w}\rangle \quad \forall\, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V},\ n \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом неравенстве к верхнему пределу (при $n \to \infty$), получим

$$\limsup_{n\to\infty} \{\phi_g(\boldsymbol{v}_n) - \phi_g(\boldsymbol{w})\} \le \limsup_{n\to\infty} \{-\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}_n) + \mathbf{T}_{\boldsymbol{u}_n}(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{w}\rangle\}.$$

Отсюда и из (15) и (16), выводим неравенства

$$\phi_g(\boldsymbol{v}_*) - \phi_g(\boldsymbol{w}) \le \liminf_{n\to\infty} \{\phi_g(\boldsymbol{v}_n) - \phi_g(\boldsymbol{w})\} \le \limsup_{n\to\infty} \{\phi_g(\boldsymbol{v}_n) - \phi_g(\boldsymbol{w})\}$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \{-\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}_n) + \mathbf{T}_{\boldsymbol{u}_n}(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{w}\rangle\} = -\liminf_{n\to\infty} \{\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}_n) + \mathbf{T}_{\boldsymbol{u}_n}(\boldsymbol{v}_n), \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{w}\rangle\}$$

$$\le -\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}_*) + \mathbf{T}_{\boldsymbol{u}_*}(\boldsymbol{v}_*), \boldsymbol{v}_* - \boldsymbol{w}\rangle \qquad \forall\, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}.$$

и, следовательно,

$$\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{v}_*) + \mathbf{T}_{\boldsymbol{u}_*}(\boldsymbol{v}_*), \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}_*\rangle + \phi_g(\boldsymbol{w}) - \phi_g(\boldsymbol{v}_*) \ge 0 \quad \forall\, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}.$$

Тем самым доказано, что $(\boldsymbol{v}_*, \boldsymbol{u}_*) \in \boldsymbol{G}$.

Шаг 4. С учетом вышеизложенного мы имеем возможность применить лемму 2 для обоснования разрешимости задачи (1)–(7), а равенство (9) получается аналогично (13).

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

□

References

[1] W. Prager, *Introduction to Mechanics of Continua*, Ginn and Co., New York, 1961.

[2] G. Duvaut, J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Berlin: Springer-Verlag, 1976. MR0521262

[3] J. Malek, M. Ruzicka, V. V. Shelukhin, *Hershel-Bulkley fluids: existence and regularity of steady flows*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **15**:12 (2005), 1845–1861. MR2189915

[4] A. E. Mamontov, *Existence of global solutions to multidimensional equations for Bingham fluids*, Mathematical Notes, **82**:3–4 (2007), 501–517. MR2375792

[5] A. V. Lapin, A. D. Romanenko, *Solving the problem of Bingham fluid flow in cylindrical pipeline*, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **59**:2 (2015), 67–70. MR3372217

[6] N. E. Khouja, N. Roquet, B. Cazacliu, *Analysis of a regularized Bingham model with pressure-dependent yield stress*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, **17**:4 (2015), 723–739. MR3412276

[7] V. V. Shelukhin, V. V. Neverov, *Thermodynamics of micropolar Bingham fluids*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, **236** (2016), 83–90. MR3554183

[8] E. S. Baranovskii, M. A. Artemov, *Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model*, International Journal of Differential Equations, **2016** (2016), Article ID 9428128. MR3520542

[9] D. Wachsmuth, T. Roubicek, *Optimal control of planar flow of incompressible non-Newtonian fluids*, Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendung, **29**:3 (2010), 351–376. MR2661517

[10] E. S. Baranovskii, *Solvability of the stationary optimal control problem for motion equations of second grade fluids*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9** (2012), 554–560. MR3037866

[11] E. S. Baranovskii, *Optimal control for steady flows of the Jeffreys fluids with slip boundary condition*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **8** (2014), 168–176. MR3379250

[12] E. S. Baranovskii, *An optimal boundary control problem for the motion equations of polymer solutions*, Siberian Advances in Mathematics, **24** (2014), 159–168. MR3184035

[13] V. G. Litvinov, *Motion of a nonlinear-viscous fluid*, M.: Nauka, 1982. MR0715430

[14] R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979. MR0603444

[15] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, New York: Acad. Press, 1975. MR0450957

[16] J. L. Lions, *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires*, Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969. MR0259693

[17] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, III: Variational Methods and Optimization*, New York: Springer, 1985. MR0768749

Mikhail Anatolievich Artemov
Voronezh State University,
Universitetskaya pl., 1,
394006, Voronezh, Russia
E-mail address: artemov_m_a@mail.ru

Anna Vadimovna Skobaneva
Voronezh State University,
Universitetskaya pl., 1,
394006, Voronezh, Russia
E-mail address: poais@list.ru