

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 1472–1479 (2017)

DOI 10.17377/semi.2017.14.127

УДК 515.162.3

MSC 57M27

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ТАБУЛИРОВАННЫХ
УЗЛОВ В УТОЛЩЁННОЙ БУТЫЛКЕ КЛЕЙНА

Л.Р. НАБЕЕВА

ABSTRACT. The history of knot tabulation is long established, having begun over 130 years ago. In 2016 S. Matveev and the author generated a complete list of 33 knots in the thickened Klein bottle whose minimal diagrams have at most 3 crossings. By using the generalized Kauffman bracket polynomial in four variables it was established that the list contains at least 28 different knots. In the paper identifying all duplicates we prove that the list contains exactly 28 knots.

Keywords: knot (links) in the thickened Klein bottle, knot diagram, transformations diagrams.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с 90-х годов XX века активно развивается теория узлов в трёхмерных многообразиях, отличных от трёхмерной сферы. Например, в таких многообразиях, как проективное пространство [2], линзовые пространства [3], полный тор [4], утолщённый тор [5] и утолщённая бутылка Клейна [1].

В статье [1] были табулированы все существенные узлы в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков. Таблица содержит 33 узла. С помощью обобщения полинома Кауффмана на случай узлов в утолщённой бутылке Клейна было установлено, что список содержит не менее 28 различных узлов.

В данной работе доказано, что узлы 3_6 , 3_9 , 3_{20} являются дубликатами узлов 3_7 , 3_{21} , 3_{25} , соответственно, а узлы 3_{24} , 3_{26} являются дубликатами узла 3_{23}

НАБЕЕВА, Л.Р., IN EQUIVALENCE OF SAME KNOTS IN THE THICKENED KLEIN BOTTLE.

© 2017 НАБЕЕВА Л.Р.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-11-10291).

Поступила 5 декабря 2017 г., опубликована 15 декабря 2017 г.

(нумерация узлов взята из работы [1]). Таким образом, нами завершена классификация существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков.

Автор благодарит академика РАН С.В. Матвеева за постановку задачи и помощь в её решении, а так же Е.А. Фоминых и Ф.Г. Кораблёва за полезные обсуждения.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Утолщённой бутылкой Клейна называется ориентируемое косое произведение $K \times I$ бутылки Клейна K на отрезок I . Под *зацеплением* в $K \times I$ понимается конечный набор попарно не пересекающихся простых замкнутых кривых, лежащих внутри утолщённой бутылки Клейна. Зацепление, состоящее из одной компоненты, называется *узлом*. Два зацепления в $K \times I$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм многообразия $K \times I$ на себя, переводящий одно зацепление в другое. Собственное кольцо в $K \times I$ называется *несущественным*, если либо оно параллельно относительно края кольцу в $\partial(K \times I)$, либо его средняя окружность стягиваема в $K \times I$. В противном случае кольцо называется *существенным*. Зацепление в $K \times I$ называется *существенным*, если оно не является нетривиальной связной суммой зацепления в $K \times I$ и зацепления в S^3 , и дополнение к нему не содержит существенные кольца в $K \times I$.

Для изображения зацеплений в $K \times I$ удобно задавать их проекцией на бутылку Клейна K . При этом проекцию зацепления нужно выбирать так, чтобы выполнялись следующие условия: ни в какую точку бутылки Клейна не проектируется более двух различных точек зацепления; все перекрёстки двойные и трансверсальные и их конечное число.

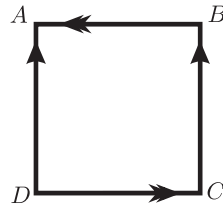


Рис. 1. Бутылка Клейна K представлена в виде квадрата $ABCD$ с отождествленными сторонами

Отметим, что в нашем случае общепринятый способ задания зацепления на поверхности бутылке Клейна с помощью размеченной проекции в перекрёстках (такую проекцию называют диаграммой зацепления) не работает, так как бутылка Клейна – неориентируемая поверхность. Чтобы устранить это препятствие, будем представлять бутылку Клейна K в виде квадрата $ABCD$. Для этого рассмотрим две кривые на бутылке Клейна: меридиан $\tilde{\mu}$ – простая замкнутая кривая, при разрезании по которой из бутылки Клейна получается кольцо и среднюю линию \tilde{m} листа Мёбиуса – это простая замкнутая кривая, при разрезании по которой из бутылки Клейна получается лист Мёбиуса. Разрежем бутылку Клейна K по $\tilde{\mu}$ и \tilde{m} , получим квадрат $ABCD$ с отождествлёнными сторонами (см. рис. 1, где стрелки показывают, какие точки и в каком порядке отождествляются). Стороны квадрата AB и DC будем называть

горизонтальными сторонами, а стороны AD и BC будем называть *вертикальными сторонами*. В дальнейшем, чтобы не загромождать рисунки, мы не будем помечать буквами вершины квадрата. Итак, проекция зацепления на квадрате $ABCD$ будет представлять собой набор таких собственных дуг или связный граф на квадрате, что при указанных отождествлениях сторон квадрата концы дуг склеиваются попарно, каждая его вершина имеет валентность 4 и правило «прямо – вперёд» определяет его полные обходы. *Диаграмма зацепления* – это проекция с указанием разрывов в перекрёстках на квадрате. Пример диаграммы узла показан на рисунке 2.

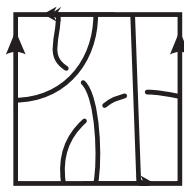


Рис. 2. Пример диаграммы узла на квадрате

Мы рассматриваем диаграммы зацеплений на квадрате в общем положении. Это означает, что все дуги являются гладкими, все перекрёстки двойные и трансверсальные, никакой перекрёсток не лежит на сторонах квадрата и никакая дуга диаграммы не касается сторон квадрата и не исходит из вершин квадрата.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИАГРАММ ЗАЦЕПЛЕНИЙ НА КВАДРАТЕ

Опишем преобразования диаграмм зацеплений на квадрате.

- (1) R_1 – удаление (появление) малой петли (первое преобразование Райдемайстера).
- (2) R_2 – удаление (появление) парного перекрёстка (второе преобразование Райдемайстера).
- (3) R_3 – перемещение некоторой третьей ветви над или под перекрёстком (третье преобразование Райдемайстера).
- (4) R_4 – перемещение тривиальной дуги диаграммы через вертикальные стороны квадрата.
- (5) R_5 – перемещение тривиальной дуги диаграммы через горизонтальные стороны квадрата.
- (6) R_6 – перемещение перекрёстка диаграммы через вертикальные стороны квадрата.
- (7) R_7 – перемещение перекрёстка диаграммы через горизонтальные стороны квадрата.
- (8) R_8 – перемещение тривиальной дуги диаграммы через вершины квадрата.

Пусть s – двухсторонняя простая замкнутая кривая на бутылке Клейна K . Разрежем поверхность K по кривой s , скрутим один из краев разреза на 360 градусов в одном из двух возможных направлений и склеим края разреза назад. Получим гомеоморфизм, называемый *скручиванием вдоль двухсторонней*

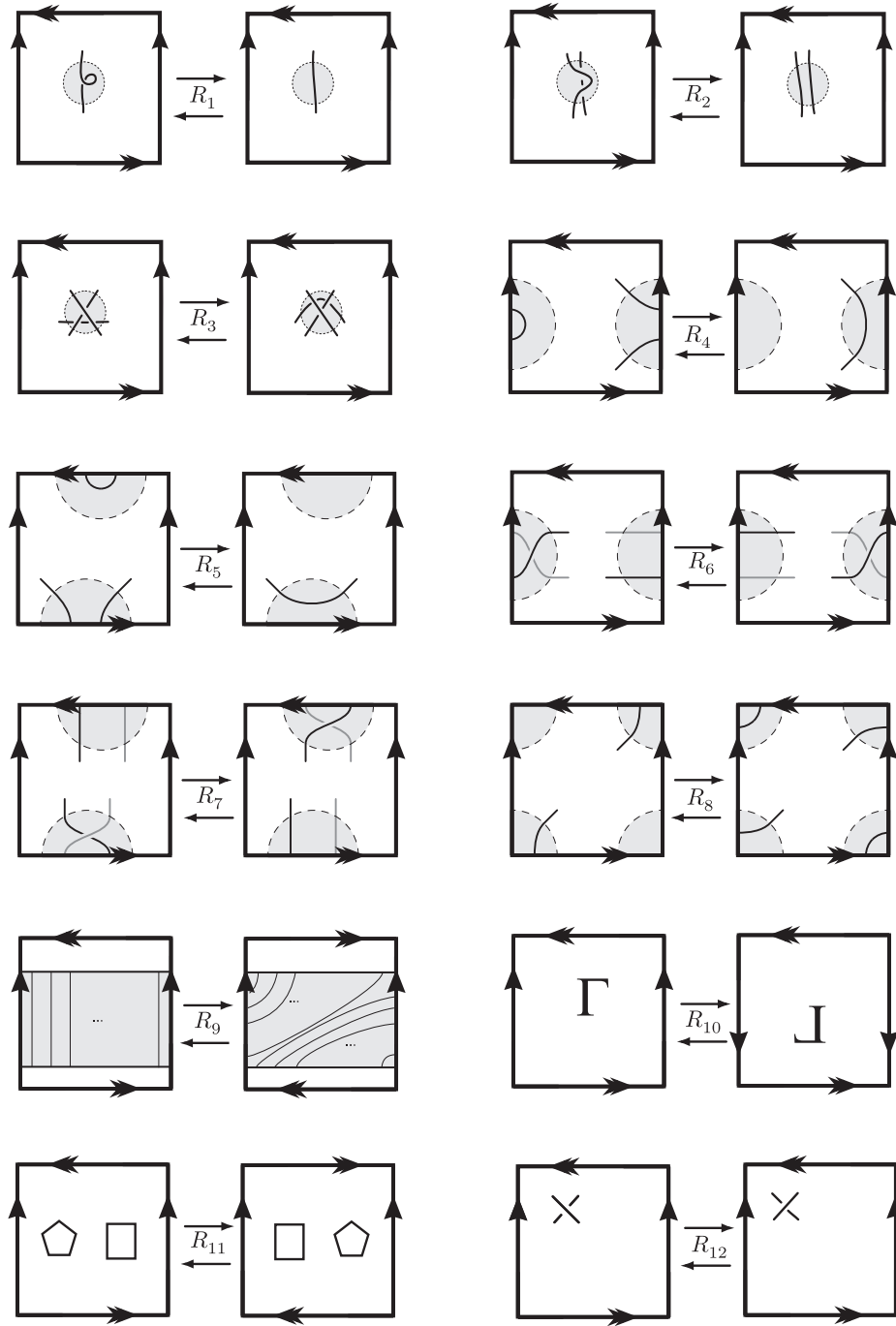


Рис. 3. Преобразования R_1 – R_{12} диаграмм зацеплений на квадрате

простой замкнутой кривой s . Это определение аналогично определению скручивания вдоль кривой в ориентируемой поверхности, см. например в книге [6].

- (9) R_9 — скручивание вдоль двухсторонней простой замкнутой кривой c ;
- (10) R_{10} — поворот квадрата на 180 градусов относительно центра квадрата;
- (11) R_{11} — зеркальное отображение квадрата относительно вертикальной или горизонтальной стороны квадрата;
- (12) R_{12} — смена всех типов перекрёстков на противоположные.

На рисунке 3 преобразование R_9 применили вдоль меридиана, а преобразование R_{11} применили относительно вертикальной стороны.

Теорема 1. *Если две диаграммы на квадрате можно соединить одним из 12 преобразований R_1 – R_{12} , то соответствующие им зацепления в утолщённой бутылке Клейна эквивалентны.*

Доказательство. Легко проверить, что преобразования R_1 – R_7 определяют изотопию зацеплений в утолщённой бутылке Клейна.

Преобразование R_8 на рисунке 3 состоит в перемещении тривиальной дуги диаграммы через вершины квадрата. С другой стороны, это преобразование эквивалентно перемещению этой же дуги через точку пересечения кривых $\tilde{\mu}$ и \tilde{m} на бутылке Клейна, см. рис. 4.



Рис. 4. Перемещение тривиальной дуги диаграммы через точку пересечения меридиана $\tilde{\mu}$ и средней линии \tilde{m} листа Мёбиуса

Преобразование R_9 определяет гомеоморфизм утолщённой бутылки Клейна на себя. Мы разрежем утолщённую бутылку Клейна по кольцу $c \times I$, скрутим один край разреза на 360 градусов в одном из двух возможных направлений и склеим края разреза назад.

Опишем гомеоморфизмы утолщённой бутылки Клейна на себя, соответствующие преобразованиям R_{10} – R_{12} . Для этого представим утолщённую бутылку Клейна в виде куба $[0; 1] \times [0; 1] \times [-1; 1]$ с отождествлёнными гранями, в котором квадрат $ABCD$ является произведением $[0; 1]$ на $[0; 1]$ и на $\{0\}$. Отождествление граней куба осуществляется по следующему правилу: две грани, содержащие стороны DA и CB , отождествляются по параллельному переносу, а две грани, содержащие стороны AB и CD , отождествляются по суперпозиции параллельного переноса и поворота на 180 градусов относительно центра грани. При этой склейке грани склеиваются с гранями, ребра с ребрами, а вершины с вершинами.

Тогда преобразование R_{10} — это гомеоморфизм куба на себя, который задаётся правилом: $(a, b, c) \rightarrow (1 - a, 1 - b, c)$.

Преобразование R_{11} — это гомеоморфизм куба на себя, который задаётся правилом: $(a, b, c) \rightarrow (a, 1 - b, c)$ или $(a, b, c) \rightarrow (1 - a, b, c)$.

Преобразование R_{12} — это гомеоморфизм куба на себя, который задаётся правилом: $(a, b, c) \rightarrow (a, b, -c)$. \square

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ТАБУЛИРОВАННЫХ УЗЛОВ В $K \tilde{\times} I$

В статье [1] были табулированы все существенные узлы в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков. Таблица содержит 33 узла. С помощью обобщения полинома Кауффмана на случай узлов в утолщённой бутылке Клейна было установлено, что список содержит не менее 28 различных узлов. В этом пункте будет доказано, что узлы с номерами $3_6, 3_9, 3_{20}$ являются дубликатами узлов с номерами $3_7, 3_{21}, 3_{25}$ соответственно, а узлы с номерами $3_{24}, 3_{26}$ являются дубликатами узла 3_{23} . Нумерация узлов взята из работы [1]. Диаграммы этих узлов изображены на рисунке 5. Под словами, что узел является дубликатом другого узла, подразумевается, что два узла эквивалентны между собой.

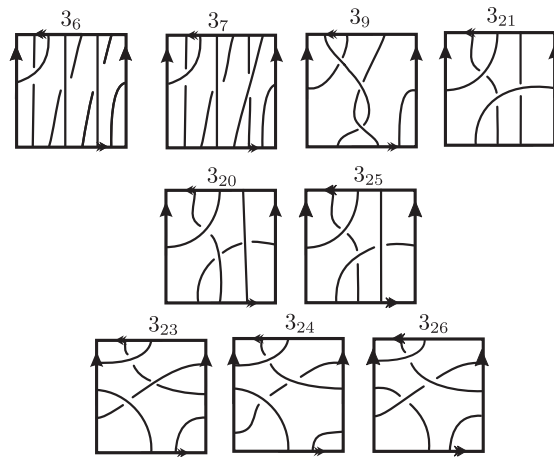


РИС. 5. Диаграммы узлов: $3_6, 3_7, 3_9, 3_{20}, 3_{21}, 3_{23}, 3_{24}, 3_{25}, 3_{26}$

Теорема 2. *В утолщённой бутылке Клейна узлы $3_6, 3_9, 3_{20}$ эквивалентны узлам $3_7, 3_{21}, 3_{25}$, соответственно, и узлы $3_{24}, 3_{26}$ эквивалентны узлу 3_{23} .*

Доказательство. Эквивалентность узлов будем доказывать, используя введенные в пункте 3 преобразования диаграмм узлов.

На рисунке 6 приведена последовательность преобразований, связывающая диаграмму узла 3_6 с диаграммой узла 3_7 . На рисунке 7 приведены последовательности преобразований, связывающие диаграмму узла 3_9 с диаграммой узла 3_{21} , диаграмму узла 3_{20} с диаграммой узла 3_{25} . На рисунке 8 приведена последовательность преобразований, связывающая диаграммы узлов $3_{23}, 3_{24}$ и 3_{26} . \square

Теорема 3. *Существуют ровно 28 различных существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков.*

Доказательство теоремы 3 является следствием теоремы 2 и теоремы из статьи [1].

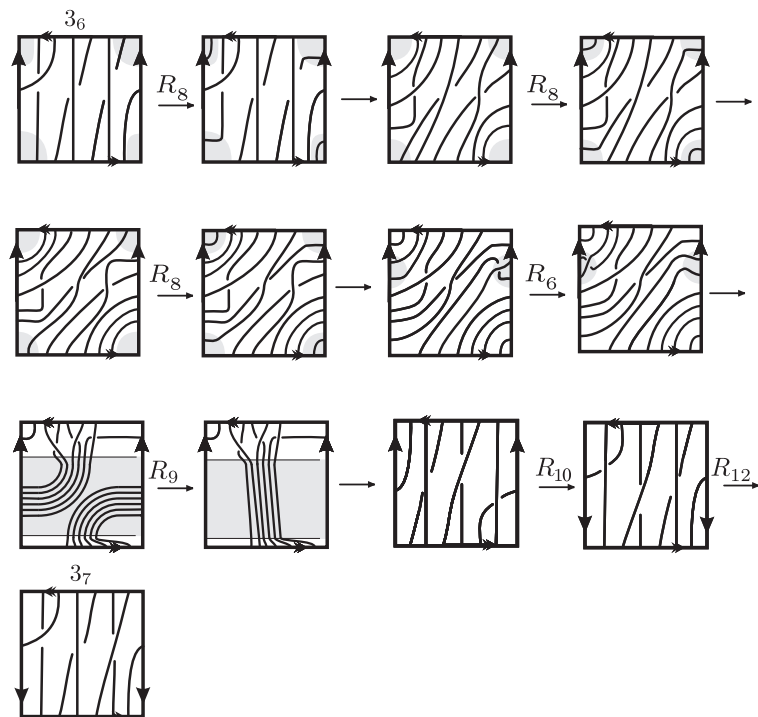


Рис. 6. Последовательность преобразований, связывающая диаграмму узла 3_6 с диаграммой узла 3_7

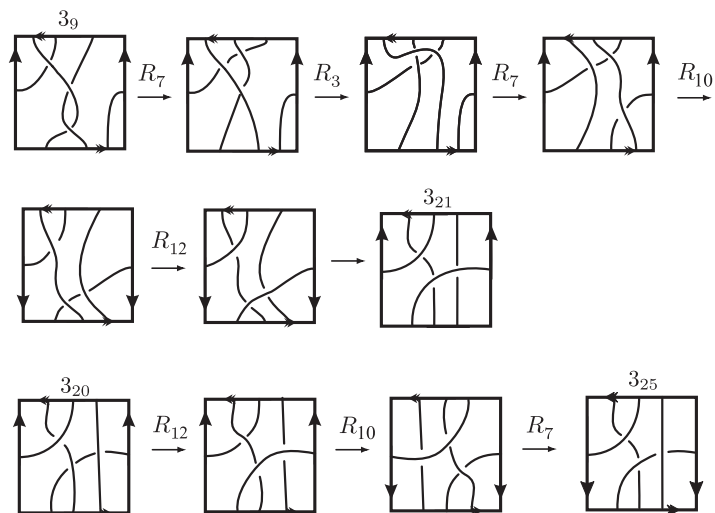


Рис. 7. Последовательность преобразований, связывающая диаграмму узла 3_9 с 3_{21} , и диаграмму узла 3_{20} с 3_{25}

REFERENCES

- [1] S.V. Matveev, L.R. Nabeeva, *Tabulating knots in the thickened Klein Bottle*, Siberian Mathematical Journal, **57**:3 (2016), 542–548. MR3548795

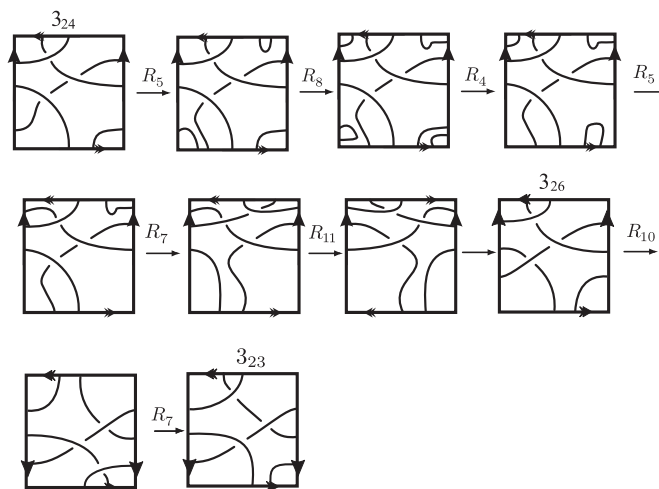


РИС. 8. Последовательность преобразований, связывающая диаграммы узлов 3_{23} с 3_{24} и с 3_{26}

- [2] J. Drobotukhina, *Classification of Links in RP^3 with at Most Six Crossings*, Advances in mathematics, **18** (1994), 87–121. MR1296890
- [3] A. Cattabriga, E. Manfredi, M. Mulazzani, *On knots and links in lens spaces*, Topology and its Applications, **160**:2 (2013), 430–442. MR3003342
- [4] B. Gabrovsek, M. Mroczkowski, *Knots in the solid torus up to 6 crossings*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **21**:11 (2012), 1250106–1250148. MR2969636
- [5] A.A. Akimova, S.V. Matveev, *Classification of genus 1 virtual knots having at most five classification crossings*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **23**:6 (2014), 1450031–1450050. MR3253963
- [6] S.V. Matveev, A.T. Fomenko, *Algorithmic and computer methods in three-dimensional topology*, M.: MGU, 1991. MR1162113

LILIYA RUSLANOVNA NABEEVA
 CHELYABINSK STATE UNIVERSITY,
 129 BRATIEV KASHIRINYKH ST.
 454001, CHELYABINSK, RUSSIA
 E-mail address: liya.nabeyeva@yandex.ru