S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1480–1491 (2017) УДК 510.67:512.57
DOI 10.17377/semi.2017.14.128 MSC 03C20, 03C35, 03C60

ОБОГАЩЕНИЯ КАТЕГОРИЧНЫХ АНТИАДДИТИВНЫХ ХОРНОВЫХ ТЕОРИЙ ДО АДДИТИВНЫХ

Е.А. ПАЛЮТИН

Abstract. The main result of the paper is a characterization of definable permutation groups in categorical Horn theories. This characterization implies the theorem that there exist categorical Horn theories which can not be expanded till categorical additive Horn theories.

Keywords: categorical Horn theory, antiadditive theory, additive theory, expansion of theory.

Категоричные теории всегда были центральной темой исследований в теории моделей. Хорновы теории, класс моделей которых замкнут относительно фильтрованных произведений, играют особую роль, потому что их структуры обладают наиболее важными свойствами, присущими структурам, наиболее интенсивно изучаемым в алгебре и теории моделей. Сочетание хорновости и категоричности даёт достаточно широкий и интересный класс структур. Частным случаем хорновых теорий являются квазимногообразия. Известные до сих пор примеры давали уверенность в том, что любое категоричное квазимногообразие обогащается до аддитивной хорновой теории. Однако, в работе строится пример категоричного квазимногообразия, которое нельзя обогатить до аддитивной хорновой теории (Теорема 10), что является главным результатом работы.

Palyutin, E.A., Expansions of categorical antiadditive Horn theories till additive ones.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00531-а), Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект 0830/ГФ4).

Поступила 16 ноября 2017 г., опубликована 27 декабря 2017 г.

1. Терминология, обозначения и предварительные результаты

Все исторические сведения и понятия можно найти в статьях [2] и [3]. Однако для удобства читателя основные термины мы напомним.

Хорнова теория — это теория, класс моделей которой замкнут относительно фильтрованных произведений.

В дальнейшем под хорновой теорией будем понимать полную хорнову теорию, имеющую бесконечные модели.

Теория T называется категоричной в мощности λ, если все ее модели мощности λ изоморфны.

Категоричные хорновы теории делятся на 2 класса: антиаддитивные и аддитивные. Антиаддитивными называются теории, в которых нельзя примитивно проинтерпретировать бесконечную группу.

Структуры с одинаковым носителем называются определимо эквивалентными, если классы определимых множеств у них совпадают. Теории двух определимо эквивалентных структур называются определимо эквивалентными.

Примитивная формула — это формула вида

$\exists x_i \cdots \exists x_i \Theta$, где Θ — конъюнкция атомных формул.

Множество, определимое в структуре примитивной формулой, называется примитивным.

Для эквивалентности α через $dom\alpha$ обозначаем множество $\{a \mid \alpha(a,a)\}$.

Если в теории T для эквивалентности α имеется предложение $\forall x \alpha(x,x)$, то α называется тотальной эквивалентностью.

Примитивной эквивалентностью называется эквивалентность, являющаяся примитивным множеством.

Отношение $\alpha \preccurlyeq \beta$ на эквивалентностях означает, что α-классы содержатся в β-классах и выполнено $\forall x(\beta(x,x) \to \alpha(x,x))$.

Примитивно минимальное множество это примитивное множество, все собственные примитивные подмножества которого не более чем одноэлементные. Примитивно минимальная эквивалентность — это примитивная эквивалентность, у которой все классы — примитивно минимальные множества.

Будем писать $\alpha \prec \beta$, если выполняется отношение $\alpha \preccurlyeq \beta$ с условием $\beta \neq \alpha$

Пара $\langle X, \alpha \rangle$, где X — примитивное множество, α — примитивная эквивалентность и выполнено $X \subseteq dom\alpha$ называется обобщенным примитивным множеством (о.п. множеством).

Обобщенно примитивное множество $\langle X, \alpha \rangle$ называется примитивно минимальным, если множество X/α не имеет неодноэлементных непустых обобщенно примитивных подмножеств.

Запись $\alpha \sqsubset \beta$ на эквивалентностях означает, что выполнено $\alpha \prec \beta$ и для любого $a \in dom\beta$ обобщенно примитивное множество $\langle \beta a, \alpha \rangle$ является примитивно минимальным.

Если для примитивных эквивалентностей α, β выполнено $\beta \preccurlyeq \alpha$, то пару $\langle \alpha, \beta \rangle$ будем называть обобщенной примитивной эквивалентностью.

Будем говорить, что формула $\Phi(x,y,z,w)$ определяет в теории T терм Мальцева, если выполнено

$$T \vdash \forall x \forall y (\Phi(x,y,x,y) \wedge \Phi(y,x,x,y)).$$

В категоричных хорновых теориях терм Мальцева $\Phi(x,y,z,w)$ определяет аффинное сложение $w = x + y - z$

Обобщенное примитивное множество $\langle X, \alpha \rangle$ называется аффинным, если на множестве X/α примитивно определим терм Мальцева.

Обобщенная примитивная эквивалентность $\langle \alpha, \beta \rangle$ называется аффинной, если существует примитивная формула, определяющая терм Мальцева на каждом обобщенном примитивном множестве вида $\beta a/\alpha$.

Теория T^* является обогащением теории T с помощью функциональных символов, определяющих в теории T^* операции, которые определяются в теории T примитивными формулами.

Мощность множества формул языка L обозначается через $|L|$.

Теория T_1 примитивно обогащается до теории T_2, если $T_1 \subseteq T_2$ и все новые предикаты и функциональные символы выражаются через старые с помощью примитивных формул.

В дальнейшем во всей статье, если не оговорено противное, мы будем считать, что все рассматриваемые категоричные хорновы теории обладают следующим свойством:

(α) если некоторая примитивная формула без параметров определяет в моделях теории операцию, то в языке данной теории имеется функциональный символ, определяющий ту же операцию.

В самом деле, обогащая язык теории функциональными символами и добавляя хорновы предложения для выполнения свойства (α) мы получим хорнову теорию, модели которой будут определимо эквивалентными моделям исходной теории.

2. Общие факты о категоричных хорновых теориях

В данном параграфе мы приведем факты о категоричных хорновых теориях, доказанные в других статьях.

Все используемые в этом параграфе свойства будут относиться к категоричной хорновой теории T языка L.

Лемма 1. *Под любой тотальной примитивной ненулевой эквивалентностью существует тотальная примитивно минимальная эквивалентность.*

Доказательство. Это предложение 2 статьи [3]. □

Из этой леммы сразу вытекает

Лемма 2. *Если в языке L имеется символ константы, то существует примитивная формула $\Phi_0(x)$ языка L без параметров, определяющая в каждой T-модели сильно минимальное множество.*

Доказательство следующей леммы практически не отличается от доказательства предыдущей леммы.

Лемма 3. *Для любых тотальных примитивных эквивалентностей $\beta \prec \alpha$ существует примитивная эквивалентность γ со свойствами: $\gamma \preccurlyeq \alpha$ и $\beta \sqsubset \gamma$.*

Из этой леммы, в частности, вытекает

Лемма 4. *Пусть α — тотальная примитивная эквивалентность, не являющаяся единичной, т.е. имеющая более одного класса. Тогда существует примитивная эквивалентность β, для которой выполнено $\alpha \sqsubset \beta$.*

Лемма 5. *Если теория T аддитивна, то любая обобщенная примитивно минимальная эквивалентность является аффинной.*

Доказательство. Это следует из того, что обобщенно примитивно минимальные множества примитивно связаны.

В статье [3] доказана следующая характеризационная теорема.

Теорема 1. *Для того, чтобы хорнова теория T была категоричной, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) T полна;

2) T примитивно нормальна;

3) существует конечная цепь тотальных примитивных эквивалентностей $\theta_1 \sqsubset \cdots \sqsubset \theta_n$, где θ_1 — тотальная примитивно минимальная эквивалентность, θ_n — единичная эквивалентность. и справедливо условие:

(*) существуют примитивные формулы $\Phi_i(x, y, z), 2 \leqslant i \leqslant n$, такие что для каждой T-модели M и любого $a \in M$ формула $\Phi_i(x, y, a)$ определяет взаимно однозначное соответствие между множеством $\theta_{(i-1)}$-классов

$$\{\theta_{(i-1)}b | b \in M, \theta_{(i-1)}b \subseteq \theta_i a\}$$

и множеством $\theta_1(M, a)$.

Ясно, что при условии (*) примитивная минимальность эквивалентности θ_1 равносильно примитивной минимальности обобщенной примитивной эквивалентности $\theta_n/\theta_{(n-1)}$. Поэтому условие (*) равносильно условию

(**) существуют примитивные формулы $\Phi_i(x, y, z), 2 \leqslant i \leqslant n$, такие что для каждой T-модели M и любого $a \in M$ формула $\Phi_i(x, y, a)$ определяет взаимно однозначное соответствие между множеством $\theta_{(i-1)}$-классов

$$\{\theta_{(i-1)}b | b \in M, \theta_{(i-1)}b \subseteq \theta_i a\}$$

и множеством $M/\theta_{(n-1)}$.

В статье [3] имеется также замечание, которое с учетом равносильности условий (*) и (**) мы сформулируем так:

Замечание 1. *В теореме 1 условие 1) можно ослабить до следующего:*

(a) теория T полна относительно примитивных предложений;

(b) для любой примитивной формулы $\Psi(x; \mathbf{y})$ в T содержится одно из следующих двух предложений:

$\forall x_1 \forall x_2 \forall \mathbf{y}((\Psi(x_1; \mathbf{y}) \wedge \Psi(x_2; \mathbf{y})) \to \theta_{(n-1)}(x_1, x_2))$,

$\forall x_1 \forall \mathbf{y}(\exists x_2 \Psi(x_2; \mathbf{y}) \to (\exists x_3 \Psi(x_3; \mathbf{y}) \wedge \theta_{(n-1)}(x_1, x_3)))$.

Таким образом, получается следующая

Теорема 2. *Для того, чтобы хорнова теория T была категоричной, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) выполняются условия (a) и (b) из замечания 1;

2) T примитивно нормальна;

3) существует конечная цепь тотальных примитивных эквивалентностей $\theta_1 \sqsubset \cdots \sqsubset \theta_n$, где θ_1 — тотальная примитивно минимальная эквивалентность, θ_n — единичная эквивалентность. и справедливо условие:

(**) существуют примитивные формулы $\Phi_i(x,y,z), 2 \leqslant i \leqslant n$, такие что для каждой T_2-модели M и любого $a \in M$ формула $\Phi_i(x,y,a)$ определяет взаимно однозначное соответствие между множеством $\theta_{(i-1)}$-классов

$$\{\theta_{(i-1)}b | b \in M, \theta_{(i-1)}b \subseteq \theta_i a\}$$

и множеством $M/\theta_{(n-1)}$.

В статье [3] доказана также следующая теорема.

Теорема 3. *Следующие условия для категоричной хорновой теории T равносильны:*

1) T почти сильно минимальна;

2) T_+ примитивно минимально связна;

3) T^* является категоричным квазимногообразием.

3. Ограничения категоричных хорновых теорий

Пусть T — категоричная хорнова теория языка L. Пусть $\Phi(x)$ — формула языка L без параметров с одной свободной переменной x. Для T-модели A через $A \restriction \Phi$ будем обозначать структуру, язык которой содержит предикатные символы $P_{\Psi(\mathbf{x})}$ местности n, где $\Psi(\mathbf{x})$ — примитивная формула языка L без параметров, n — длина кортежа $\mathbf{x}$. Функциональными символами будут n-местные символы $f_{\Theta(\mathbf{x};y)}$, где $\Theta(\mathbf{x};y)$ — формула языка L, n — длина кортежа $\mathbf{x}$. При этом предполагается, что формула $\Theta(\mathbf{x};y)$ определяет в T-моделях A на множестве $\Phi(A)$ n-местную операцию.

Носителем структуры $A \restriction \Phi$ будет множество $\Phi(A)$. Предикатные символы $P_{\Psi(\mathbf{x})}$ интерпретируются как предикаты

$$(\Psi(A) \cap (\Phi(A))^n).$$

Функциональные символы $f_{\Theta(\mathbf{x};y)}$ интерпретируются как определимые на множестве $\Phi(A)$ операции с помощью формулы $\Theta(\mathbf{x};y)$.

Структуру $A \restriction \Phi$ будем называть ограничением структуры A на формулу Φ.

Из полноты теории T следует, что теории структур $A \restriction \Phi$ у различных T-моделей совпадают. Эту теорию будем обозначать через $T \restriction \Phi$ и называть ограничением теории T на формулу Φ.

Теорема 4. *Пусть T — категоричная хорнова теория языка L, $\Phi(x)$ — примитивная формула языка L.*

(1) Теория $T \restriction \Phi$ будет категоричной хорновой теорией.

(2) Если теория T аддитивна и формула $\Phi(x)$ определяет бесконечное множество , то теория $T \restriction \Phi$ также аддитивна.

Доказательство. (1) Это вытекает из характеризации категоричных хорновых теорий из статьи [3].

(2). Это следует из того, что в категоричных хорновых теориях все более чем одноэлементные обобщенно примитивные множества примитивно связаны. Поэтому, если в каком-то обобщенно примитивно множестве примитивно интерпретируется бесконечная группа, то и в любом другом таком множестве также примитивно интерпретируется бесконечная группа. □

Определение 1. Структура A называется структурой Урбаника, если выполняется следующее условие.

(a) если для некоторой конъюнкции атомарных формул $P(x_1, \dots x_n)$ и некоторых $a_1, \dots, a_n \in A$ выполнено $A \models P(a_1, \dots, a_n)$, то существует подмножество $s \subset \{1, \dots, n\}$ со следующим свойством: для любых $b_i \in A$, $i \in s$, существуют единственные $b_i \in A$, $i \in (\{1, \dots, n\} \setminus s)$, для которых выполнено $A \models P(b_1, \dots, b_n)$.

Определение 2. Пусть G — некоторая группа, C — некоторое множество. Языком L_G^C назовем язык, состоящий из одноместных функциональных символов g, где $g \in G$, и символов констант c, где $c \in C$. Полигоном P_G над группой G называется структура A языка L_G^C для некоторого множества C, в которой операции $g \in G$, определяют перестановки множества A, причем произведение элементов группы G будет интерпретироваться композицией сомножителей данного произведения. Элемент полигона A, интерпретирующий константу $c \in C$, будем называть константой полигона A и иногда отождествлять его с этой константой. Аналогичное отождествление будем делать между элементами группы и их интерпретациями в структуре A.

Полигон P_G будем называть точным, если разным константам будут соответствовать разные элементы, а разным элементам группы G — разные перестановки.

Определение 3. Точный полигон A над группой G называется полигоном Урбаника, если он является структурой Урбаника.

Предложение 1. *Для того, чтобы полигон A над группой G был полигоном Урбаника необходимо и достаточно, чтобы для любого неединичного элемента $g \in G$ операция $g(x)$ на A имела не более одной неподвижной точки.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что для некоторого неединичного элемента $g \in G$ операция $g(x)$ на A имеет более одной неподвижной точки. Рассмотрим формулу $(g(x_1) = x_1 \wedge g(x_2) = x_2)$. Так как операция $g(x)$ на A не является тождественной, то эта формула не удовлетворяет условию (a) из определения структуры Урбаника. Достаточность доказана в статье [5]. □

Предложение 2. *Пусть A — структура, теория $Th(A)$ которой сильно минимальна и хорнова. Тогда A является структурой Урбаника.*

Доказательство. Заметим вначале, что из сильной минимальности и хорновости вытекает, что собственное непустое примитивное подмножество структуры A одноэлементно. Проверим условие (a) из определения структуры Урбаника. Рассмотрим некоторую конъюнкцию атомарных формул $P(x_1, \dots x_n)$ и некоторые $a_1, \dots, a_n \in A$ для которых выполнено $A \models P(a_1, \dots, a_n)$ и пусть для подмножества $s \subset \{1, \dots, n\}$ выполняется следующее свойство: для любых $b_i \in A$, $i \in s$, существуют $b_i \in A$, $i \in (\{1, \dots, n\} \setminus s)$, для которых выполнено $A \models P(b_1, \dots, b_n)$. Пусть при этом множество s имеет максимальную мощность. Из максимальности подмножества s и примитивной нормальности структуры A следует условие (a). □

В статье Урбаника [7] дано полное описание структур Урбаника. Из этого описания следует такая теорема.

Теорема 5. *Если A — структура Урбаника и $|A| \geqslant 3$, то A является константным обогащением либо полигона Урбаника над некоторой группой, либо аффинного пространства над некоторым телом.*

Поэтому в силу теоремы 4 мы получаем следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть T — категоричная антиаддитивная хорнова теория языка L, $\Phi(x)$ — формула языка L, определяющая в T-моделях сильно минимальное множество. Тогда теория $T \upharpoonright \Phi$ будет теорией полигона Урбаника над некоторой группой G.*

4. Антиаддитивные категоричные хорновы теории

Определение 4. Категоричная хорнова теория называется антиаддитивной, если в ней формульно не интерпретируется никакая бесконечная группа.

Из теорем 5 и 6 статьи [3] вытекает

Теорема 6. *Если T — категоричная антиаддитивная хорнова теория, то T^* является категоричным квазимногообразием.*

В статье [5] дано описание категоричных квазимногообразий путем выписывания систем аксиом для них. Из этого описания видно, что антиаддитивные квазимногообразия задаются группой аксиом (A), выражающих, что моделями этих аксиом будут декартовы степени точных полигонов над группами. В доказательстве категоричности квазимногообразий типа (A) показано, что примитивная формула

$$\Phi_0(x) = \exists y g_1(y) = x$$

определяет сильно минимальное множество. Таким образом, из предыдущей теоремы мы получаем

Предложение 3. *Если T — категоричная антиаддитивная хорнова теория, то существует примитивная формула $\Phi_0(x)$, определяющая в T-моделях сильно минимальное множество.*

Теорема 7. *Следующие условия для категоричной хорновой теории T равносильны:*

1) Теория T является антиаддитивной.

2) Для некоторой примитивно минимальной формулы $\Phi(x)$ и некоторой T-модели A структура $A \upharpoonright \Phi$ определимо эквивалентна полигону над группой.

3) существует примитивная формула $\Phi_0(x)$, определяющая в T-моделях сильно минимальное множество и для любой примитивно минимальной формулы $\Phi(x)$ и любой T-модели A структура $A \upharpoonright \Phi$ определимо эквивалентна полигону над группой.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 3). Это прямое следствие леммы 6 и предложения 3.

3) $\Rightarrow$ 2). Вытекает из леммы 6.

2) $\Rightarrow$ 1). Следует из теоремы 4(2). □

5. Группы подстановок в категоричных хорновых теориях

Пусть в этом параграфе T — категоричная хорнова теория, A — ее модель, G — группа всех примитивно определимых в структуре A подстановок носителя A.

Определение 5. Примитивная эквивалентность α называется примитивно минимально связной, если для любых α-эквивалентных элементов $a, b \in A$ существуют примитивно минимальные тотальные эквивалентности $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и элементы $a_1, \dots, a_n$, для которых выполняются условия: $a = a_1$ и

$$A \models (\alpha_1(a_1, a_2) \wedge \cdots \wedge \alpha_n(a_n, b)).$$

Будем говорить, что одноместная операция f сохраняет α-классы, если для любого a выполнено $\alpha(a, g(a))$.

Лемма 7. *Пусть α — максимальная (по включению) тотальная примитивно минимально связная примитивная эквивалентность. Тогда любая примитивная подстановка gсохраняет α-эквивалентность.*

Доказательство. Предположим, что примитивная подстановка g н удовлетворяет условиям леммы. Это означает, что существуют некоторые α-классы X и Y, для которых выполнено: $(g(X) \cap Y) \neq \varnothing$ и $g(X) \nsubseteq Y$. Так как α-классы примитивно минимально связаны, то найдется такая примитивно минимальная тотальная эквивалентность β, что $(\alpha \cup \beta) \neq \alpha$. Это противоречит максимальности эквивалентности α. □

Лемма 8. *Пусть α — максимальная (по включению) тотальная примитивно связная примитивная эквивалентность. Пусть G_1 — подгруппа группы G, H — подгруппа группы G_1, состоящая из всех элементов группы G_1, сохраняющих α-классы. Тогда подгруппа H будет нормальной подгруппой группы G_1.*

Доказательство. Пусть $h \in H$, $g \in (G_1 \setminus H)$ и $a \in A$. Рассмотрим элемент $g^{-1}(h(g(a)))$. По лемме 7 подстановка g^{-1} сохраняет эквивалентность α, поэтому элементы $g^{-1}(h(g(a)))$ и a будут α-эквивалентны. Таким образом, мы имеем $ghg^{-1} \in H$. □

6. Фактор-теории

Пусть в этом параграфе T — категоричная аддитивная хорнова теория языка L, A — ее модель.

Пусть α — максимальная по включению примитивная эквивалентность, классы которой являются примитивно минимально связанными множествами.

В силу леммы 7 выполняется следующее условие:
(Δ) любая примитивная подстановка структуры A определяет подстановку на множестве A/α.

По лемме 3 существует цепь тотальных эквивалентностей $\theta_1 \sqsubset \cdots \sqsubset \theta_n$, где θ_1 — тотальная примитивно минимальная эквивалентность, θ_n — единичная эквивалентность, а также число $k \in \{1, \dots, n\}$, для которого $\theta_k = \alpha$.

Язык L/α будет содержать двухместные предикаты $\theta_{(k+1)}, \dots, \theta_n$, предикаты $\Phi_i(x,y,z), (k+1) \leqslant i \leqslant n$, предикат $\sigma(x_1,x_2,x_3,y)$, а также множество F одноместных функциональных символов языка L, определяющих в структуре A подстановки множества A.

Определим структуру A/α языка L/α следующим образом. Носителем структуры A/α будет фактор-множество A/α, т.е. элементами этой структуры будут α-классы. По лемме 5 обобщенное примитивно минимальное множество $A/\theta_{(n-1)}$ будет аффинным. Пусть предикат $\sigma(x_1,x_2,x_3,y)$ задает на множестве $A/\alpha/\theta_{(n-1)}$ в структуре A/α это аффинное сложение. По указанному выше свойству (Δ) одноместных функциональных символов языка L, определяю в структуре A подстановки множества A/α. Эти подстановки будут интерпретацией в структуре A/α соответствующих функциональных символов. В силу включений $\alpha \subseteq \theta_{(k+1)}, \dots, \alpha \subseteq \theta_n$, интерпретации символов $\theta_{(k+1)}, \dots, \theta_n$ и символов $\Phi_i(x,y,z), (k+1) \leqslant i \leqslant n$ индуцируют интерпретации этих символов в структуре A/α.

Рассмотрим хорнову теорию T_α языка L/α, в качестве аксиом которой берем следующие хорновы предложения:

(1) операции из множества F определяют подстановки;

(2) двухместные предикаты $\theta_{(k+1)}, \dots, \theta_n$ определяют эквивалентности;

(3) для любой T/α-модели M и любого $a \in M$ формулы $\Phi_i(x,y,a), (k+1) \leqslant i \leqslant n$ взаимно однозначное соответствие между множеством $\theta_{(i-1)}$-классов

$$\{\theta_{(i-1)}b | b \in M, \theta_{(i-1)}b \subseteq \theta_i a\}$$

и множеством $M/\theta_{(n-1)}$;

(4) для любой T/α-модели M предикат $\sigma(x_1,x_2,x_3,y)$ определяет аффинное сложение на обобщенно примитивном множестве $M/\theta_{(n-1)}$.

Ясно, что при соответствующем структуре A определении на множестве A/α символов языка L/α мы получаем T_α-модель, которую будем обозначать также через A/α.

В качестве теории T/α берем теорию, аксиомы которой будут аксиомы (1), (2), (3) и следующее множество аксиом:

(4) хорновы предложения языка L/α, истинные на структуре A/α.

Ясно, что аксиомы (1), (2) и (3) выводятся из предложений (4), но мы их выписали отдельно для удобства ссылок.

Теорию T/α будем называть фактор-теорией теории T по эквивалентности α.

Теорема 8. *Теория T/α является категоричной аддитивной хорновой теорией.*

Доказательство.

Для доказательства категоричности теории T/α воспользуемся теоремой 2. По этой теореме нужно показать для теории T/α выполнение свойств 1)-3) данной теоремы. Это следует из аксиом (4) и того, что данные свойства выполняются в структуре A/α и записываются с помощью хорновых предложений. Аддитивность теории T/α получается из того, что предикат $\sigma(x_1,x_2,x_3,y)$ задает на множестве $A/\alpha/\theta_{(n-1)}$ в структуре A/α аффинное сложение, а необходимые свойства аффинного сложения записываются хорновыми предложениями. □

Заметим также, что из доказательства теоремы 3 из статьи [3] видно, что в качестве цепи $\theta_1 \sqsubset \cdots \sqsubset \theta_n$ можно взять любую такую цепь, где θ_1 — тотальная примитивно минимальная эквивалентность, θ_n — единичная эквивалентность.

7. Примитивно аффинные группы

Определение 6. Полигон P над группой G называется примитивно аффинным, если он обогащается до структуры A, теория которой является категоричным аддитивным квазимногообразием.

Определение 7. Группа G называется примитивно аффинной, если над ней существует точный примитивно аффинный полигон.

Из описания категоричных квазимногообразий следует

Предложение 4. *Примитивно аффинные группы представляют собой декартову степень линейных подстановок векторного пространства.*

8. Полуаффинные группы

Определение 8. Полигон P над группой G называется *полуаффинным* , если он обогащается до структуры A, являющейся моделью некоторого категоричной аддитивной хорновой теории.

Определение 9. Группа G называется полуаффинной, если над ней существует точный полуаффинный полигон.

Приведем простой пример полуаффинной группы. Полуаффинной будет группа G подстановок некоторого векторного пространства V над телом K, определенных термами вида $\alpha x + c$, где $\alpha \in K$, а c принадлежит некоторому фиксированному подпространству $V_0 \subseteq V$. Это следует из того, что обычные аксиомы векторного пространства с выделенными элементами задают категоричную аддитивную хорнову теорию.

Определение 10. Индукцией по натуральному числу n определим понятие примитивно n-аффинной группой G.

1) Примитивно 1-аффинная группа - это примитивно аффинная группа;

2) если примитивно аффинная группа H является нормальной подгруппой группы G и группа G/H — примитивно $(n-1)$-аффинная группа, то G — примитивно n-аффинная группа.

Теорема 9. *Полуаффинные группы представляют собой примитивно n-аффинную группу для некоторого натурального числа n.*

Доказательство. Индукция по минимальному рангу структуры A, являющейся моделью некоторого категоричной аддитивной хорновой теории и являющейся обогащением полуаффинного полигона над группой G. Если этот ранг равен 1, т.е. теория структуры A является сильно минимальной, то утверждение вытекает из теоремы 3.

Пусть α — максимальная (по включению) тотальная примитивно минимально связная примитивная эквивалентность на структуре A. Если α — единичная эквивалентность то по теореме 3 теория $(Th(A))^*$ будет категоричным квазимногообразием, следовательно, группа G будет примитивно 1-аффинной группой.

Пусть H — подгруппа группы G, состоящая из всех элементов g группы G, для которых операция $g(x)$ сохраняет α-классы, т.е. $A \models \forall x \alpha(g(x), x)$. По лемме 8 H — нормальная подгруппа группы G.

По теореме 8 теория T/α является категоричной аддитивной хорновой теорией.

По лемме 1 эквивалентность α не является нулевой, поэтому теория T/α имеет меньший ранг, чем теория T. Для каждого $g \in G$ определим операцию $\tilde{g}$ на множестве A/α следующим образом:

$$\tilde{g}(\alpha a) = \alpha g(a).$$

Все такого вида перестановки множества A/α будут образовывать группу, изоморфную группе G/H. По индукционному предположению группа G/H будет примитивно n-аффинной группой для некоторого натурального числа n. □

Из предыдущей теоремы сразу вытекает

Следствие 1. *Если группа G является полуаффинной и простой, то она является примитивно аффинной.*

Предложение 5. *Существует простая группа, не являющаяся примитивно аффинной.*

Доказательство. В качестве такой группы можно взять периодическую группу Новикова-Адяна [8, с. 39]. Ясно, что она не удовлетворяет условиям предложения 4.

Из следствия 1 и предложения 5 получаем следующую теорему.

Теорема 10. *Существует категоричное квазимногообразие, которое нельзя обогатить до аддитивной хорновой теории.*

Доказательство. Пусть G — произвольная простая группа, не являющаяся примитивно аффинной группой. Ясно что любой точный полигон над G определяет категоричное квазимногообразие. По следствию 1 это квазимногообразие нельзя обогатить до аддитивной хорновой теории. □

References

[1] *E.A. Palyutin,* Additive theories, in: Proceedings of Logic Colloquium'98 (Lectures Notes in Logic, v. 13), ASL, Massachusetts, 2000, p. 352–356.

[2] E.A. Palyutin, *Categorical Horn classes. 1*, Algebra and Logic, **19**:5 (1980), 377–400. MR0623786

[3] E.A. Palyutin,*Categorical Horn classes. 2*, Algebra and Logic, **49**:6 (2010), 526–538. MR2829608

[4] Yu.L. Ershov, E.A. Palyutin, *Mathematical Logic*, M.:Fizmatlit, 2011 (in Russian).

[5] E.A. Palyutin, *The description of categorical quasivarieties*, Algebra and Logic, **14**:2 (1975), 145–185.

[6] E.A. Palyutin, *Primitively connected theories*, Algebra and Logic, **39**:2 (2000), 84–97. MR1778315

[7] K. Urbanik,*A representation theorem for v^*-algebras*, Fund. Math, **52**:3 (1963), 291–317. MR0153611

[8] S.I. Adian, *Classifications of periodic words and their application in group theory*, in: Burnside Groups: Proceedings of a Workshop Held at the University of Bielefeld, Germany, Lecture Notes in Mathematics, 806, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980, 1–40. MR0586042

Evgeniy Andreevich Palyutin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: palyutin@math.nsc.ru