S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 1492–1504 (2017) УДК 519.174
DOI 10.17377/semi.2017.14.129 MSC 05C15

Special issue: Groups and Graphs, Metrics and Manifolds — G2M2 2017

О ХРОМАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПОЛНЫХ ТРЕХДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

П.А. ГЕЙН

Abstract. Let $P(G,x)$ be the chromatic polynomial of a graph G. A graph G is called *chromatically unique* if for any graph H, $P(G,x) = P(H,x)$ implies that G and H are isomorphic. In this parer we show that full tripartite graph $K(n_1,n_2,n_3)$ is chromatically unique if $n_1 \geq n_2 \geq n_2 \geq n_3, n_1 - n_3 \leq 5$ and $n_1 + n_2 + n_3 \not\equiv 2 \mod 3$.

Keywords: graph, chromatic polynomial, chromatic uniqueness, complete tripartite graph.

1. Введение

В данной работе все графы являются обыкновенными, т. е. не содержат петель и кратных ребер. Основная терминология и обозначения используются в соответствии с [1].

Раскраской графа G в x цветов называется отображение ϕ из множества вершин графа G в множество чисел $\{1, 2, \dots x\}$ такое, что любым двум смежным вершинам сопоставлены разные числа. Граф называется x-раскрашиваемым, если существует его раскраска в x цветов. Обозначим через $P(G,x)$ количество различных раскрасок графа G в x цветов. Хорошо известно (см., например, [1]), что функция $P(G,x)$ является многочленом, который называется *хроматическим многочленом графа G*. Два графа называются *хроматически эквивалентными*, если они имеют одинаковые хроматические многочлены. Граф называется *хроматически определяемым*, если он изоморфен любому своему хроматически эквивалентному графу.

Gein, P.A., About chromatic uniqueness of some complete tripartite graphs.

© 2017 Гейн П.А.

Поступила 22 октября 2017 г., опубликована 29 декабря 2017 г.

Особый интерес при изучении хроматически определяемых графов представляет вопрос: являются ли полные t-дольные графы $K(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ хроматически определяемыми при $t \geq 3$ и $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t \geq 2$.

Приведем здесь краткий обзор связанных с этим вопросом результатов, более полный перечень можно найти в книге [2] и монографии [3].

(1) Граф $K(n_1, n_2)$ является хроматически определяемым, если $n_1 \geq n_2 \geq 2$, см. работу [4].

(2) Граф $K(n_1, n_2, n_3, \ldots n_t)$ является хроматически определяемым, если $t \geq 3$ и $n_1 \geq n_2 \geq \ldots n_t \geq 2$ и $n_1 - n_t \leq 4$, см. работы [5, 6, 7, 8].

(3) Граф $K(n_1, n_1, n_3)$ является хроматически определяемым, если $n_1 - 1 \geq n_3 \geq 2$, см. [9].

(4) Граф $K(n_1, n_1 - 1, n_3)$ является хроматически определяемым, если $n_3 \geq 2$, см. [10].

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Граф $K(n_1, n_2, n_3)$ является хроматически определяемым, если $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 2, n_1 - n_3 \leq 5$ и остаток r от деления n на 3 не равен 2, где $n = n_1 + n_2 + n_3$.*

Хроматическя определяемость графа $K(n_1, n_2, n_3)$, где $n_1 - n_3 \leq 4$, была доказана в работах [5, 6, 7]. Целью данной работы является доказательство теоремы в случае, когда $n_1 - n_3 = 5$.

Приведем необходимые для доказательства этой теоремы вспомогательные утверждения и определения.

Разбиением натурального числа n называется невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $u = (u_1, u_2, \ldots)$ такая, что $u_1 \geq u_2 \geq \ldots$, причем последовательность u содержит лишь конечное число ненулевых членов и $n = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. *Длиной* разбиения u называется такое число l, что $u_l > 0$, и $u_{l+1} = u_{l+2} = \ldots = 0$. При записи разбиений мы часто будем опускать их нулевые члены.

На множестве всех разбиений натурального числа n введем отношение порядка следующим образом. Пусть $u = (u_1, u_2, \ldots)$ и $v = (v_1, v_2, \ldots)$ — два разбиения числа n. Тогда $v \trianglelefteq u$, если

$$\begin{gathered} v_1 \leq u_1, \\ v_1 + v_2 \leq u_1 + u_2, \\ \ldots \\ v_1 + v_2 + \ldots + v_{t-1} \leq u_1 + u_2 + \ldots + u_{t-1}, \end{gathered}$$

где t – наибольшая из длин разбиений u и v. Отношение $\trianglelefteq$ называют *отношением доминирования.* В работе [11] показано, что все разбиения числа n образуют решетку относительно $\trianglelefteq$.

В работе [12] отмечено, что все разбиения фиксированной длины числа n образуют решетку относительно $\trianglelefteq$, а также введено понятие *элементарного преобразования.* Разбиение $v = (v_1, v_2, \ldots, v_t)$ есть результат применения элементарного преобразования к разбиению $u = (u_1, u_2, \ldots, u_t)$, если найдутся такие натуральные числа i и j, что 1) $1 \leq i < j \leq t$, 2) $u_i - 1 \geq u_{i+1}$ и $u_{j-1} \geq u_j + 1$, 3) $u_i - u_j = \delta \geq 2$, 4) $v_i = u_i - 1, v_j = u_j + 1, u_k = v_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, t, k \neq i, j$. В работе [12] доказано, что $v \trianglelefteq u$ выполняется в том и только в том случае, когда разбиение v может быть получено из разбиения

u последовательным применением некоторого конечного числа элементарных преобразований.

Каждый полный t-дольный граф на n вершинах можно отождествить с соответствующим ему разбиением числа n длины t. Пусть $u = (u_1, u_2, \ldots u_t)$ – разбиение длины t числа n. Далее для краткости вместо $K(u_1, u_2, \ldots, u_t)$ будем писать $K(u)$. Доли графа $K(u)$ будем обозначать через V_i, где $|V_i| = u_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$.

Пусть u – разбиение числа n длины t. Далее доказательство хроматической определяемости графа $K(u)$ будет проводиться по следующей схеме. От противного предполагается, что граф $K(u)$ не является хроматически определяемым, т. е. найдется такой граф H, неизоморфный $K(u)$, что H и $K(u)$ хроматически эквивалентны. Ясно, что хроматическое число графа H равно t, т. е. граф H может быть получен удалением некоторого множества ребер E из некоторого полного t-дольного графа $K(v)$. В работе [13] было доказано, что различные полные многодольные графы не являются хроматически эквиавлентными, поэтому множество E – непусто.

Предположим, что каждому графу приписано некоторое число. Это число называется *хроматическим инвариантом*, если оно одинаково для всех хроматически эквивалентных графов. Если $\alpha(G)$ — хроматический инвариант и G_1, G_2 — произвольные графы, то положим $\Delta\alpha(G_2, G_1) = \alpha(G_2) - \alpha(G_1)$. Хорошо известно (см. [1, 5, 14, 15]), что хроматическими инвариантами являются число вершин, ребер, компонент связности, треугольников.

Согласно теореме Зыкова (см., например, [1]), хроматический многочлен имеет вид $P(G, x) = \sum\limits_{i=\chi}^{n} pt(G, i)x^{(i)}$, где через $pt(G, i)$ обозначено число разбиений множества вершин графа G на i коклик, т. е. множеств, любые две вершины которых не смежны, а через $x^{(i)}$ обозначена *факториальная степень числа* x, которая задается равенством $x^{(i)} = x(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-i+1)$. Из теоремы Зыкова вытекает, что числа $pt(G, i), i = \chi, \ldots, n$, являются хроматическими инвариантами. В дальнейшем, нас особенно будет интересовать инвариант $pt(G, \chi + 1)$, который мы будем обозначать просто через $pt(G)$.

Ясно, что каждый полный t-дольный граф является t-раскрашиваемым, но не является $(t-1)$-раскрашиваемым, другими словами, хроматическое число полного t-дольного графа равно t. Для полного многодольного графа $K(u) = K(u_1, u_2, \ldots, u_t)$ вычислим значение инварианта $pt(K(u))$. Очевидно, что разбиение вершин на $(t+1)$ коклику может быть получено только разбиением какой-либо доли графа на 2 непустых подмножества, таким образом, $pt(K(u)) = \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{u_i - 1} - t$.

В работе [8] было установлено, как меняется инвариант pt при переходе от графа $K(v)$ к графу H. Приведем здесь необходимые определения и вспомогательные утверждения.

Полный многодольный подграф G_1 графа $K(v)$ называется *E-подграфом*, если каждая доля графа G_1 содержится в некоторой доле графа $K(v)$ и множество ребер графа G_1 содержится в множестве E. Произвольное непустое множество попарно непересекающихся E-подграфов называется *гирляндой*. Будем говорить, что гирлянда G' уничтожает долю V_i, если любая вершина из доли V_i принадлежит некоторому E-подграфу, входящему в гирлянду G'. Гирлянду мощности p, уничожающую ровно $p-1$ долю, назовем *интересной*. Множество ребер, входящих в E-подграфы, образующие гирлянду, назовем *реберным агрегатом* гирлянды. В работе [8] были установлены следующие свойства:

1) если хроматическое число графа H равно t, то любая гирлянда мощности p уничтожает не более чем $p-1$ долю;
2) реберный агрегат однозначно соответствует гирлянде;
3) число $\Delta pt(H, K(v))$ равно числу интересных гирлянд.

Из этих свойств вытекает

Лемма 1 (Следствие 2, [8])**.** *Если граф H получен удалением непустого множества ребер E из графа $K(v)$ и графы $K(u)$ и H хроматически эквивалентны, то $|E| \leq \Delta pt(H, K(v)) \leq 2^{|E|-1}$.*

Пусть $G' = \{G'_1, G'_2, \dots, G'_p\}$ — гирлянда. Будем говорить, что гирлянда G' имеет вид $H_1 \dot{\cup} H_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} H_p$, где $\{H_1, H_2, \dots H_p\}$ некоторое множество графов, если $G'_i \simeq H_i$ для всех $i = 1, 2 \dots p$. Число интересных гирлянд, чьи реберные агрегаты состоят ровно из k ребер, обозначим через μ_k.

Пусть $e \in E$. Через $\xi_1(e)$ обозначим число треугольников в графе $K(v)$, которые содержат ребро e. Пусть $\xi_1 = \sum_{e \in E} \xi_1(e)$.

Рассмотрим треугольник в графе G, у которого ровно два ребра лежат в E. Обозначим их через e_1 и e_2. Подграф, ребернопорожденный $\{e_1, e_2\}$, назовем подграфом вида Ξ_2 в G. Число таких подграфов обозначим через ξ_2. Число треугольников в графе $\langle E \rangle$ обозначим через ξ_3.

В дальнейшем через $I_3(G)$ будем обозначать число треугольников, содержащихся в G. В работе [5] отмечено соотношение $\Delta I_3(K(v), H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3$. Отметим, что при удалении ребер из произвольного графа не может образовываться новых треугольников, поэтому $\Delta I_3(K(v), H)$ равно числу треугольников из $K(v)$, разрушаемых при удалении множества ребер E из $K(v)$ для получения графа H.

Следующая лемма устанавливает соотношение между числом интересных двуреберных гирлянд, числом Ξ_2-подграфов и числом треугольников в графе $\langle E \rangle$, где через $\langle E \rangle$ мы обозначаем подграф в $K(v)$, порожденный множеством ребер E.

Лемма 2. *Пусть в графе $K(v)$ каждая доля содержит не менее трех вершин. Пусть из этого графа удалено множество ребер E. Пусть $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ – последовательность степеней вершин в подграфе $\langle E \rangle$. Тогда*

$$\mu_2 + \xi_2 + 3\xi_3 = \sum_{i=1}^{k} C^2_{d_i} \leqslant C^2_{|E|}.$$

Доказательство. Так как каждая доля содержит по крайней мере три вершины, интересная двухреберная гирлянда имеет вид $K(2,1)$, потому что пара несмежных ребер не может быть реберным агрегатом интересной гирлянды, так как такая гирлянда должна уничтожать некоторую долю, что невозможно.

Рассмотрим произвольную пару смежных ребер. Она образует либо интересную двухреберную гирлянду, либо подграф вида Ξ_2, либо входит в треугольник. Ясно, что каждый треугольник будет подсчитан трижды, а подграфы двух других видов – один раз. Число пар смежных ребер в точности равно $\sum\limits_{i=1}^{k} C_{d_i}^2$. □

Исследуем случай, когда неравенство, указанное в лемме 2 обращается в равенство. Это возможно в том и только в том случае, когда любые два ребра в графе $\langle E\rangle$ смежны.

Пусть $G_1 = (VG_1, EG_1), G_2 = (VG_2, EG_2)$ – два графа. Определим граф $G_1 + G_2$ следующим образом:

$$V(G_1 + G_2) = VG_1 \dot{\cup} VG_2$$
$$E(G_1 + G_2) = EG_1 \dot{\cup} EG_2 \dot{\cup} \{\{x, y\} | x \in VG_1, y \in VG_2\}.$$

Через O_n обозначим граф на n вершинах без ребер.

Лемма 3. *Пусть G – граф без изолированных вершин, имеющий m ребер, и любые два ребра из G смежны. Тогда G изоморфен либо треугольнику, либо графу $O_m + O_1$.*

Доказательство. Ясно, что в графе G нет циклов длины больше 3 (иначе есть пара несмежных ребер). Если в G есть треугольник, то в G не может быть других ребер, так как иначе ребро должно пройти через две вершины треугольника, но в таком случае граф G содержит кратные ребра.

Осталось рассмотреть случай, когда в G нет циклов, т. е. G является деревом. Найдем в G висячую вершину x. Пусть она смежна с вершиной y. Тогда все остальные ребра (если они есть) должны проходить через вершину y. Следовательно, граф G изоморфен графу $O_m + O_1$. □

Замечание. Ясно, что графы $O_m + O_1$ и $K(m, 1)$ изоморфны. В дальнейшем будем говорить, что подграф графа $\langle E\rangle$ является *согласованным подграфом вида* $K(m, 1)$, если он изоморфен $K(m, 1)$ и все m его вершин степени 1 лежат в одной и той же доле графа $K(v)$.

Пусть $E_1 \subseteq E$. Подмножество E_1 множества E назовем *непродолжаемым*, если не существует гирлянды в $\langle E\rangle$, содержащей все ребра, лежащие в E_1. В противном случае подмножество назовем *продолжаемым*. Отметим, что пустое подмножество является продолжаемым.

Пусть $E_2 \subseteq E_1 \subseteq E$. Подмножество E_2 множетсва E_1 назовем *продолжаемым вне* E_1, если существует такая гирлянда G' с множеством ребер E', что $E_2 = E' \cap E_1$.

Лемма 4. *Пусть $E_1 \subset E$ и E_1 содержит не более N продолжаемых вне E_1 подмножеств. Тогда всего гирлянд не более чем $N \cdot 2^{|E|-|E_1|} - 1$.*

Доказательство. Пусть X – множество всех гирлянд. Рассмотрим произвольную гирлянду с реберным агрегатом $\hat{E}$. Заметим, что множество ребер $E' = \hat{E} \cap E_1$ является продолжаемым вне E_1 подмножеством.

Рассмотрим произвольное подмножество $E' \subseteq E_1$, продолжаемое вне E_1. Пусть $X(E', E_1)$ – множество всех гирлянд, у которых пересечение множества ребер с множеством E_1 равно E'. Тогда $|X(E', E_1)| \le 2^{|E|-|E_1|}$. С учетом того, что $X = \dot{\cup}_{E'} X(E', E_1)$, получаем $|X| = \sum\limits_{E'} |X(E', E_1)| = X(\varnothing, E_1) + \sum\limits_{E' \neq \varnothing} |X(E', E_1)| \leqslant 2^{|E|-|E_1|} - 1 + \sum\limits_{E' \neq \varnothing} 2^{|E|-|E_1|} = N \cdot 2^{|E|-|E_1|} - 1$. □

Следующие три леммы вытекают из леммы 4.

Лемма 5. *Если в $\langle E\rangle$ есть треугольник, то число гирлянд не превосходит* $5\cdot 2^{|E|-3}-1$.

Доказательство. Заметим, что треугольник имеет не более чем 5 продолжаемых вне себя подмножеств: пустое, 3 однореберных и треугольник. □

Лемма 6. (1) *Если в $\langle E\rangle$ есть подграф вида Ξ_2, то число гирлянд не превосходит* $3\cdot 2^{|E|-2}-1$.

(2) *Пусть в $\langle E\rangle$ есть два различных подграфа вида Ξ_2 с множествами ребер E_1 и E_2. Тогда число гирлянд не превосходит* $2^{|E|-1}+2^{|E|-|E_1\cup E_2|}-1$.

Доказательство. (1) Заметим, что множество ребер Ξ_2 подграфа имеет не более чем 3 продолжаемых вне себя подмножества: пустое и два однореберных.

(2) Заметим, что множество ребер гирлянды не может содержать ни множества E_1, ни множества E_2 (так как гирлянда является дизъюнктным объединением полных многодольных подграфов, то вместе с ребрами xy и xz подграфа вида Ξ_2 должна содержать ребро yz, которое не принадлежит E, см. рис. 1). Тогда по формуле включений-исключений всего гирлянд имеется не более чем $2^{|E|}-2^{|E|-|E_1|}-2^{|E|-|E_2|}+2^{|E|-|E_1\cup E_2|}-1=2^{|E|}-1-2\cdot 2^{|E|-2}+2^{|E|-|E_1\cup E_2|}=2^{|E|-1}+2^{|E|-|E_1\cup E_2|}-1$.

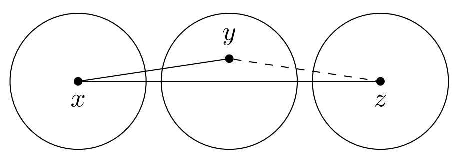

Рис. 1. Ξ_2-подграф

□

Поскольку два различных графа типа Ξ_2 в объединении имеют не менее 3 ребер, то верно

Следствие 1. *Если в графе $\langle E\rangle$ есть два различных подграфа типа Ξ_2, то число гирлянд не превосходит* $2^{|E|-1}+2^{|E|-3}-1$

Лемма 7. *Пусть в графе $\langle E\rangle$ есть гирлянда вида $K(2,1,1)$. Тогда число гирлянд не превосходит* $13\cdot 2^{|E|-5}-1$.

Доказательство. Продолжаемыми подмножествами вне множества ребер такой гирлянды могут быть только пустое, 5 одноребрных подмножеств, 2 треугольника, 2 гирлянды вида $K(2,1)$, 2 пары несмежных ребер и все ребра самой гирлянды. □

В дополнение к доказательству леммы 7 отметим, что непродолжаемыми подмножествами вне множества ребер гирлянды $K(2,1,1)$ являются:

- 6 двуреберных подмножеств, элементы которых являются ребрами одного и того же треугольника;

- 8 трехэлементных подмножеств, которые не содержат треугольника;
- 5 всевозможных четырехэлементных подмножеств.

На рис. 2 представлены всевозможные гирялнды, чьи реберные агрегаты содержат не более четырех ребер.

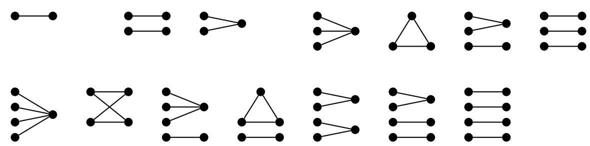

Рис. 2. Всевозможные гирлянды, чьи реберные агрегаты содержат не более 4 ребер

Долю V графа $K(v)$ назовем *активной*, если в ней найдется вершина, инцидентная некоторому ребру из множества E.

Лемма 8. *Пусть в графе $K(v)$ каждая активная доля содержит не менее 4 вершин и $|E| = 6$. Пусть также в подграфе $\langle E\rangle$ каждая гирлянда мощности p уничтожает не более чем $p-1$ долей в графе $K(v)$. Тогда либо $\langle E\rangle$ является интересной гирляндой вида $K(6,1)$ и содержит в точности 63 интересные гирлянды, либо содержит не более 33 интересных гирлянд.*

Доказательство. Заметим, что каждая гирлянда мощности 1 является интересной, так как по условию не может уничтожать ни одной доли.

Если в графе $\langle E\rangle$ есть гирлянда вида $K(6,1)$, то $\langle E\rangle$ является интересной гирляндой вида $K(6,1)$ и содержит в точности 63 интересные гирлянды.

Пусть в графе $\langle E\rangle$ нет гирлянды вида $K(6,1)$. Предположим, что в графе $\langle E\rangle$ есть гирлянда вида $K(5,1)$. Обозначим ребро, не входящее в $K(5,1)$, через e. Тогда либо e инцидентно вершине степени 1 в гирлянде $K(5,1)$, либо инцидентно вершине степени пять в гирлянде $K(5,1)$, либо не инцидентно ни одной вершине из гирлянды $K(5,1)$. Во всех случаях ребро e входит не более чем в две интересные гирлянды (однореберную и, возможно, шестиреберную или вида $K(2,1)$). Тогда всего интересных гирлянд не более чем $2^5 - 1 + 2 = 33$.

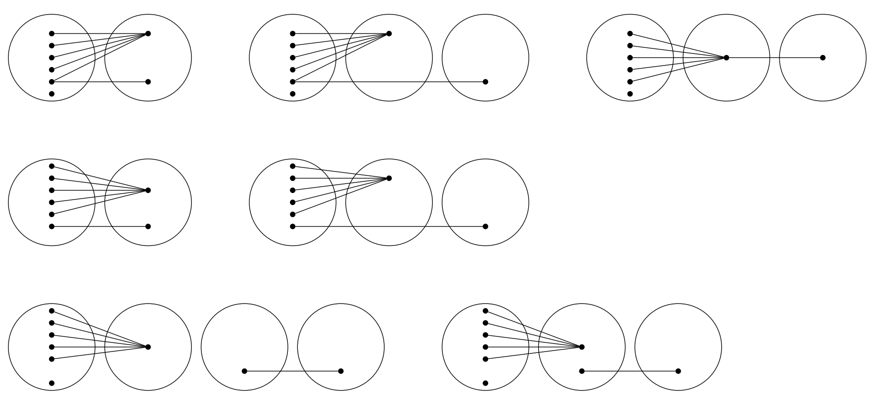

Рис. 3. Взаимное расположение гирлянды $K(5,1)$ и ребра e

Интересная четырехреберная гирлянда может иметь вид $K(4,1)$, $K(2,1)\dot\cup K(2,1)$, $K(3,1)\dot\cup K(1,1)$ и $K(2,2)$, так как гирлянды вида $K(1,1,1)\dot\cup K(1,1)$, $K(2,1)\dot\cup K(1,1)\dot\cup K(1,1)$ и $K(1,1)\dot\cup K(1,1)\dot\cup K(1,1)\dot\cup K(1,1)$ не могут уничтожить необходимое число долей, чтобы быть интересными.

Пусть в подграфе $\langle E\rangle$ нет гирлянд вида $K(5,1)$ и $K(6,1)$. Предположим, что есть интересная гирлянда вида $K(4,1)$, их не может быть больше одной. Обозначим через V_1 долю, в которой лежат вершины степени 1 гирлянды $K(4,1)$. Заметим, что если имеется гирлянда вида $K(3,1)$, нележащая в гирлянде вида $K(4,1)$, то она располагается указанным на рис. 4 способом (так как эти две гирлянды не могут не иметь общих ребер).

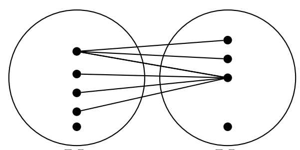

Рис. 4. Случай гирлянды $K(4,1)$ и гирлянды $K(3,1)$, не содержащейся в ней

В таком случае число интересных гирлянд равно $2^4-1+2^3-1=15+7=22$.

Рассмотрим случай, когда любая гирлянда вида $K(3,1)$ лежит в гирлянде вида $K(4,1)$.

Предположим, что есть интересная гирлянда G' вида $K(3,1)\dot\cup K(1,1)$. Заметим, что гирлянда G' должна уничтожать какую-либо долю. Она может уничтожать долю в которой содержится только 1, 2, 3 или 4 вершины. По условию, каждая доля содержит не менее четырех вершин, поэтому она должна уничтожать четырехвершинную долю, в этой доле должны лежать все 3 вершины степени 1 графа вида $K(3,1)$, содержащегося в гирлянде G', но эти вершины лежат в доле, которая содержит более чем 4 вершины, противоречие. Следовательно, интересных гирлянд вида $K(3,1)\dot\cup K(1,1)$ нет.

Заметим, что интересная гирлянда вида $K(2,1)\dot\cup K(2,1)$ должна уничтожать какую-либо долю. Она может уничтожать долю, которая содержит не более четырех вершин. По условию, активная доля содержит не менее четырех вершин. Чтобы гирлянда вида $K(2,1)\dot\cup K(2,1)$ уничтожила четырехвершинную долю, необходимо, чтобы все 4 вершины степени 1 лежали в этой доле, но эти вершины лежат в доле V_1, которая содержит не менее 5 вершин, противоречие.

Также заметим, что интересных гирлянд вида $K(2,2)$ не более 1, так как они должны иметь два ребра из гирлянды $K(4,1)$. Интересные трехреберные гирлянды могут иметь вид $K(3,1)$ или быть треугольниками. Гирлянд вида $K(3,1)$ ровно 4. Треугольников не больше одного, так как вне гирлянды $K(4,1)$ лежит только два ребра. Оценим число интересных двуреберных гирлянд. Тех, которые лежат внутри гирлянды вида $K(4,1)$ ровно $C_4^2=6$. Двуреберных гирлянд, которые содержат ребра, не входящие в $K(4,1)$, не более трех: не более одной гирлянды, у которой оба ребра лежат вне $K(4,1)$ и неболее двух гирлянд, которые содержат только одно ребро, не лежащее в $K(4,1)$. Тогда всего интересных гирлянд не более чем $6+9+(1+4)+2+5+1=28$.

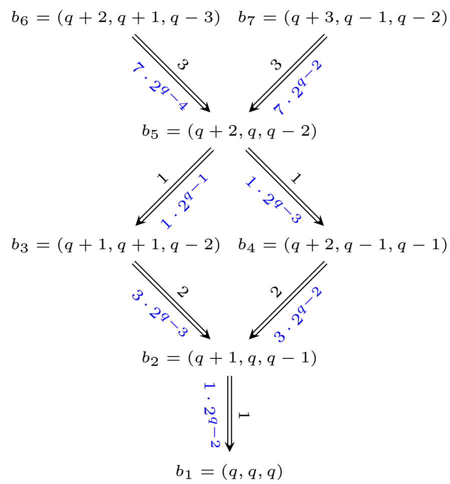

Рис. 5. Нижние этажи решетки $NPL(n,3)$ в случае, когда n делится на 3

Предположим, что в подграфе $\langle E\rangle$ нет гирлянд вида $K(N,1)$, где $N \geq 4$. Тогда гирлянд вида $K(2,2)$ и $K(2,1)\dot\cup K(2,1)$ не более 3. Гирлянд вида $K(3,1)$ не более 2 (так как они не могут иметь более одного общего ребра). Пусть k – наибольшее число вхождений гирлянды вида $K(3,1)$ в гирлянды вида $K(3,1)\dot\cup K(1,1)$. Тогда есть по крайней мере $3k$ пар несмежных ребер, откуда, используя лемму 2, получаем $\mu_2 + \xi_3 \leq C_6^2 - 3k = 15 - 3k$. Следовательно, однореберных гирлянд ровно 6, интересных двуреберных гирлянд ровно μ_2, интересных трехреберных гирлянд не более чем $\xi_3 + 3$, интересных четырехреберных гирлянд не более чем $2k+2$, интересных пятиреберных гирлянд не более чем $C_6^5 = 6$ и интересных шестиреберных гирлянд не более чем $C_6^6 = 1$, таким образом, всего интересных гирлянд не более чем $6 + \mu_2 + \xi_3 + 3 + 2k + 2 + 6 + 1 \leq 18 + 15 - 3k + 2k \leq 33$. $\square$

В работе [10] была доказана следующая

Лемма 9. *Пусть* $u = (u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots u_t) \to v = (\ldots, u_i - 1, \ldots u_j + 1, \ldots)$ *— элементарное преобразование разбиения* u *и компонента* $u_t \geq 2$. *Тогда графы* $K(u)$ *и* H *не являются хроматически эквивалентными.*

2. Случай, $r = 0$

На рис. 5 представлены нижние этажи решетки $NPL(n,3)$ в случае, когда n делится на 3. По аналогии с работой [5] над отношением покрытия $\Rightarrow$ показано изменение числа ребер, а под отношением покрытия – изменение инварианта pt. Элементов высоты 4 всего два: $(q+2, q+1, q-3)$ и $(q+3, q-1, q-2)$. Хроматическая определяемость графа $K(q+2, q+1, q-3)$ при $q \geq 5$ следует из основного результата работы [10].

Предложение 1. *Граф* $K(q+3, q-1, q-2)$ *хроматически определяем при* $q \geq 4$.

Доказательство. Пусть граф $K(q+3, q-1, q-2) = K(u)$ хроматически эквивалентен графу H, полученному удалением множества ребер E из графа $K(v)$. Рассмотрим возможные варианты для разбиения v.

Случаи $v = (q+2, q, q-2)$ и $v = (q+2, q-1, q-1)$ невозможны в силу леммы 9.

Случай 1. Пусть $v = (q+1, q+1, q-2)$. Тогда $|E| = 4$ и, используя лемму 1, получаем

$$\Delta pt(H, K(v)) = 7 \cdot 2^{q-2} + 2^{q-1} = 9 \cdot 2^{q-2} \leq 15,$$

откуда $q \leq 2$, что противоречиво.

Случай 2. Пусть $v = (q+1, q, q-1)$. Тогда $|E| = 6$ и в силу леммы 1 имеем

$$\Delta pt(H, K(v)) = 9 \cdot 2^{q-2} + 3 \cdot 2^{q-3} = 36 \cdot 2^{q-4} + 6 \cdot 2^{q-4} = 42 \cdot 2^{q-4} \leq 63,$$

откуда $q = 4$, $\Delta pt(H, K(v)) = 42$ и $v = (5, 4, 3)$. Вычислим разность инвариантов I_3:

$$\Delta I_3(K(v), K(u)) = 3(q-2) + q + 2 + 2(q-1) = 6q - 6 = 18,$$
$$\Delta I_3(K(v), H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 18,$$
$$\xi_1 = 3e_{12} + 4e_{13} + 5e_{23} = 3|E| + e_{13} + 2e_{23} = 18 + e_{13} + 2e_{23},$$
$$e_{13} + 2e_{23} = \xi_2 + 2\xi_3$$

Пусть $e_{12} = 6$. Тогда $\langle E \rangle$ является подграфом полного двудольного графа вида $K(5, 4)$. Он должен содержать ровно 42 интересные гирлянды, что противоречит лемме 8. Следовательно, $\xi_2 + 2\xi_3 > 0$.

Пусть $\xi_3 > 0$. Тогда по лемме 5 число интересных гирлянд не превосходит $5 \cdot 8 - 1 = 39 < 42$, что противоречиво. Следовательно, $\xi_3 = 0$.

Пусть $\xi_2 \geq 2$. Тогда по следствию 1 число интересных гирлянд не превосходит $63 - 32 + 2^{6-3} = 39 < 42$, что невозможно.

Следовательно, $\xi_2 = 1$, откуда получаем $e_{13} + 2e_{23} = 1$, а следовательно $e_{23} = 0, e_{13} = 1, e_{12} = 5$. Обозначим единственное ребро между долями V_1 и V_3 через e. Поскольку $\xi_2 = 1$, в $\langle E \rangle$ есть ровно одно ребро, смежное с e. Обозначим его через f. Тогда гирлянд, которые содержат только ребра из $E \setminus \{e\}$, не более чем $2^{|E \setminus \{e\}|} - 1 = 2^5 - 1 = 31$. Заметим, что неоднореберная интересная гирлянда, которая содержит ребро e, не может иметь мощность 1, т. е. должна уничтожать долю V_1 и содержать не менее 5 ребер. Заметим, что она не может содержать ребро f, следовательно, таких гирлянд не более чем 1. Следовательно, всего интересных гирлянд не более чем $31 + 1 + 1 = 33 < 42$, противоречие.

Случай 3. Пусть $v = (q, q, q)$. Тогда $|E| = 7$ и в силу леммы 1 имеем

$$\Delta pt(H, K(v)) = 42 \cdot 2^{q-4} + 2^{q-2} = 46 \cdot 2^{q-4} \leq 127,$$

откуда $q = 4$ или $q = 5$. Вычислим разность инвариантов I_3:

$$\Delta I_3(v, u) = 6q - 6 + q = 7q - 6$$
$$\Delta I_3(v, H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 7q - 6$$
$$\xi_1 = qe_{12} + qe_{13} + qe_{23} = q|E| = 7q$$
$$6 = \xi_2 + 2\xi_3,$$

следовательно, $\xi_3 > 0$ или $\xi_2 = 6$.

Предположим, что $q = 5$. В этом случае $\Delta pt(H, K(v)) = 92$. Если $\xi_3 > 0$, то в силу леммы 5 число интересных гирлянд не превосходит $5 \cdot 16 - 1 = 79$.

Если $\xi_2 = 6$, то в силу следствия 1 число интересных гирлянд не превосходит $2^7 - 1 - 2 \cdot 2^5 + 2^{7-3} = 127 - 64 + 16 = 79$, противоречие.

Теперь рассмотрим случай, $q = 4$. В этом случае $v = (4, 4, 4)$ и $\Delta pt(H, K(v)) = 46$.

Предположим, что $\xi_2 = 0$. Тогда $\xi_3 = 3$, откуда вытекает, что в $\langle E\rangle$ найдутся два различных треугольника, которые имеет общее ребро. Обозначим множество ребер этих треугольников через E', отметим, что $|E'| = 5$. Поскольку граф $K(v)$ трехдольный, множество E является реберным агрегатом гирлянды вида $K(2, 1, 1)$. Рассмотрим произвольное продолжаемое вне E' подмножество $E_1 \subset E'$, за исключением пары несмежных ребер (см. доказательство леммы 7), таких подмножеств 11. Число гирлянд, которые имеют в пересечении с множество ребер гирлянды $K(2, 1, 1)$ множество E_1 не больше чем $2^2 = 4$. Осталось оценить число гирлянд G', у которых множество ребер имеет в пересечении с множеством ребер гирлянды $K(2, 1, 1)$ пару несмежных ребер. Заметим, что в этом случае мощность G' не меньше чем 2, так как если бы мощность была равна 1, то она должна была бы содержать еще какие-то ребра из $K(2, 1, 1)$. Следовательно, гирлянда G' должна уничтожать какую-либо долю, откуда вытекает, что она содержит не менее чем 4 ребра, причем 2 из них не лежат в $K(2, 1, 1)$, то есть таких гирлянд G' не более чем 2, потому что в $K(2, 1, 1)$ есть только две пары несмежных ребер. Таким образом, всего интересных гирлянд не более чем $11 \cdot 4 - 1 + 2 = 45 < 46$, противоречие. Следовательно, $\xi_2 > 0$. С учетом того, что $\xi_2 = 6 - 2\xi_3$ — четное число, получаем $\xi_2 \geq 2$.

Тогда заметим, что в $\langle E\rangle$ отсутствуют гирлянды, чьи реберные агрегаты содержат ровно 7 ребер, потому что такие гирлянды должны содержать непродолжимое подмножество — множество ребер некоторого Ξ_2–подграфа. Также отметим, что шестиреберных гирлянд не больше одной (пусть ребра f и e порождают Ξ_2–подграф, тогда шестиреберная гирлянда обязана содержать ровно одно ребро из них, поскольку ребра Ξ_2-подграфа не могут одновременно лежать в гирлянде. Если в $\langle E\rangle$ есть два непересикающихся по ребрам Ξ_2-подграфа, то шестиреберных гирлянд нет; если f — общее ребро двух различных Ξ_2-подграфов, то оно не может лежать в шестиреберной гирлянде). Пятиреберных гирлянд не более чем $C_7^5 - C_5^3 = 21 - 10 = 11$, так как есть C_5^3 пяэтиэлементных подмножеств, которые содержат ребра заданного Ξ_2-подграфа.

Интересные трехреберные гирлянды могут быть двух видов: $K(3, 1)$ и треугольники.

Оценим число гирлянда вида $K(3, 1)$. Поскольку отсутствуют гирлянды вида $K(4, 1)$, так как такая гирлянда уничтожала бы долю, что невозможно, любые две гирлянды вида $K(3, 1)$ имеют не более одного общего ребра, откуда следует, что таких гирлянд не более трех.

Интересные четырехреберные гирлянды бывают трех видов: $K(3, 1)\dot\cup K(1, 1)$, $K(2, 1)\dot\cup K(2, 1)$, $K(2, 2)$. Гирлянд вида $K(2, 2)$ не более 2, гирлянд вида $K(2, 1)\dot\cup K(2, 1)$ не более 3.

Каждая гирлянда вида $K(3, 1)\dot\cup K(1, 1)$ содержит в себе гирлянду вида $K(3, 1)$. Пусть k — наибольшее число вхождений какой-либо гирлянды вида $K(3, 1)$ в интересные гирлянды вида $K(3, 1)\dot\cup K(1, 1)$. Тогда в графе $\langle E\rangle$ есть по крайней мере $3k$ пар несмежных ребер, откуда, используя лемму 2, получаем $\xi_2 + \mu_2 + 3\xi_3 \leq C_7^2 - 3k = 21 - 3k$, следовательно, $\mu_2 + \xi_3 \leq 15 - 3k$. Тогда всего гирлянд вида $K(3, 1)\dot\cup K(1, 1)$ не более чем $3k$. Тогда всего интересных гирлянд

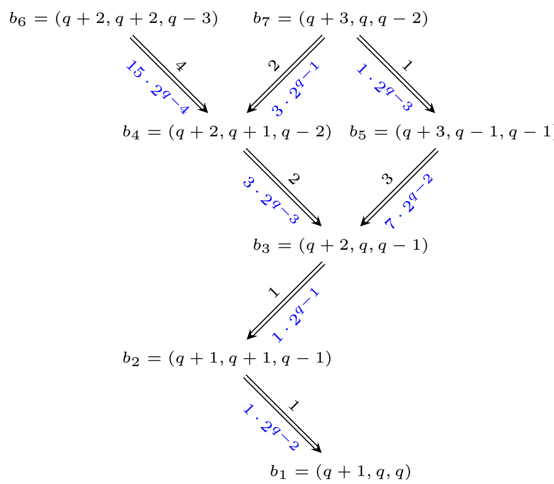

Рис. 6. Нижние этажи решетки $NPL(n,3)$ в случае, когда n дает остаток 1 при делении на 3

не более чем $7 + \mu_2 + (3 + \xi_3) + (3k + 5) + 11 + 1 \le 27 + 15 - 3k + 3k = 42 < 46$, что противоречиво. □

3. Случай $r = 1$

На рис. 6 представлены нижние этажи решетки $NPL(n,3)$ в случае, когда n дает остаток 1 при делении на 3. Так же как и в предыдущем случае, над отношением покрытия показано изменение числа ребер, а под отношением покрытия — изменение инварианта pt. Элементов высоты 4 все два: $(q+2, q+2, q-3)$ и $(q+3, q, q-2)$. Хроматическая определяемость графа $K(q+2, q+2, q-3)$ при $q \ge 5$ вытекает из теоремы 1 работы [16].

Предложение 2. *Граф $K(q+3, q, q-2)$ хроматически определяем при $q \ge 4$.*

Доказательство. Пусть граф $K(q+3, q, q-2) = K(u)$ хроматически эквивалентен графу H, полученному удалением множества ребер E из графа $K(v)$. Рассмотрим возможные варианты для разбиения v.

Случаи $v = (q+2, q+1, q-2), v = (q+3, q-1, q-1)$ и $v = (q+2, q, q-1)$ невозможны в силу леммы 9.

Случай 1. Пусть $v = (q+1, q+1, q-1)$. Тогда $|E| = 5$ и в силу леммы 1 получаем

$$\Delta pt(H, K(v)) = 2^{q-3} + 7 \cdot 2^{q-2} + 2^{q-1} = (2 + 28 + 8) \cdot 2^{q-4} = 38 \cdot 2^{q-4} \le 2^5 - 1,$$

противоречие, поскольку $q \ge 4$.

Случай 2. Пусть $v = (q+1, q, q)$, В этом случае $|E| = 6$ и по лемме 1

$$\Delta pt(H, K(v)) = 38 \cdot 2^{q-4} + 2^{q-2} = (38 + 4)2^{q-4} = 42 \cdot 2^{q-4} \le 2^6 - 1,$$

откуда $q = 4$ и $\Delta pt(H, K(v)) = 42$, что противоречит лемме 8. □

Автор выражает благодарность своему руководителю В.А. Баранскому за постоянное внимание и ценные замечания, способствовавшие значительному улучшению работы.

References

[1] M.O. Asanov, V.A. Baranskii, V.V. Rasin, *Discrete Mathematics: Graphs, Matroids, Algorithms*, Publ. Lan', 2010. [In Russian] ISBN 978-5-8114-1068-2

[2] F.M. Dong, K.M. Koh, K.L. Teo, *Chromatic polynomials and chromaticity of graphs*, World Scientific, Hackensack, NJ, 2005. MR2159409

[3] H. Zhao, *Chromaticity and adjoint polynomials of graphs.* Wöhrmann Print Service, Zutphen, The Netherlands, 2005. MR2715784

[4] K.M. Koh, K.L. Teo, *The search for chromatically unique graphs*, Graphs Combin., **6**:3, 1990, 259–285. MR1081201

[5] V.A. Baranskii, T.A. Koroleva, *Chromatic uniqueness of certain complete tripartite graphs*, Izv. Ural. Gos. Univ. Mat. Mekh. Inform., **74**:12 (2010), 5–26. [Russian. English summary] MR2906104

[6] T.A. Koroleva, *Chromatic uniqueness of some complete tripartite graphs. I*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **13**:3 (2007), 65–83. [In Russian] http://mi.mathnet.ru/eng/timm108

[7] T.A. Koroleva, *Chromatic uniqueness of some complete tripartite graphs. II*, Izv. Ural. Gos. Univ. Mat. Mekh. Inform., **74**:2010, 39–56. [Russian. English summary] MR2906106

[8] V.A. Baranskii , T.A. Sen'chonok, *Chromatic uniqueness of elements of height* ≤ 3 *in lattices of complete multipartite graphs*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **279**:S.1 (2012), 1–16 (translation from Tr. Inst. Mat. Mekh. (Ekaterinburg), **17:4** (2011), 3–18). Zbl 1301.05117

[9] R. Liu, H. Zhao, Ch. Ye, *A complete solution to a conjecture on chromatic uniqueness of complete tripartite graphs*, Discrete Math., **289**:1–3 (2004), 175–179. MR2106041

[10] P.A. Gein, *About chromatic uniqueness of complete tripartite graph* $K(s, s-1, s-k)$*, where* $k \geq 1$ *and* $s-k \geq 2$, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **13** (2016), 331–337. [Russian, English abstract] MR3506896

[11] T. Brylawski, *The lattice of integer partitions*, Dicrete Math., **6** (1973), 210–219. MR0325405

[12] V.A. Baranskii, T.A. Koroleva, T.A. Senchonok, *On the partition lattice of all integers*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **13** (2016), 744–753. [Russian, English abstract] MR3553165

[13] H. Zhao, X. Li, Sh. Zhang, R. Liu, *On the minimum real roots of the* σ*-polynomials and chromatic uniqueness of graphs*, Discrete Mathematics, **281**:1–3 (2004), 277–294. MR2047774

[14] E.J. Farrell, *On chromatic coefficients*, Discrete Math., **29**:3 (1980), 257–264. MR0560769

[15] V.A. Baranskii, S.V. Viharev, *On the chromatic invariants of bipartite graphs*, Izv. Ural. Gos. Univ., Mat. Mekh., **36**:7 (2005), 25–34. [Russian. English summary] Zbl 1189.05057

[16] G.L. Chia., Ch.-K. Ho, *Chromatic equivalence classes of complete tripartite graphs*, Discrete Mathematics **309**:1 (2009), 134–143. MR2475006

Pavel Aleksandrovich Gein
Ural Federal University,
pr. Lenina, 51,
62083, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: pavel.gein@gmail.com