S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 156–162 (2017) УДК 512.57

DOI 10.17377/semi.2017.12.016 MSC 08A99

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

А.Г. ПИНУС

Abstract. The algebraic closure operator on the universal algebras is studied. Special attention is paid to a description of algebras whose closure operator is trivial.

Keywords: lattices of algebraic sets, inner homomorphisms, algebraic closure operator.

Одним из основных понятий алгебраической геометрии универсальных алгебр, развитой в работах школ Б. И. Плоткина и В. Н. Ремесленникова (см., к примеру, [1, 2]), является понятие алгебраического множества. Напомним, что множество $B \subseteq A^n$ называется *n-мерным алгебраическим множеством* для универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$, если B является совокупностью решений в $\mathfrak{A}$ некоторой системы (возможно бесконечной) термальных уравнений сигнатуры σ, т.е. $B = \{\overline{a} =< a_1, \cdots, a_n >\in A^n | \mathfrak{A} \models t_i^1(\overline{a}) = t_i^2(\overline{a}), i \in I\}$, где $\{t_i^1(x_1, \cdots, x_n), t_i^2(x_1, \cdots, x_n) | i \in I\}$ — некоторая совокупность термов сигнатуры σ. Совокупность $\mathrm{Alg}_n \mathfrak{A}$ всех n-мерных алгебраических множеств алгебры $\mathfrak{A}$ образует полную решетку относительно теоретико-множественного отношения $\subseteq$, а $< \mathrm{Alg}_n \mathfrak{A}; \cap >$ является нижней подполурешеткой полурешетки $< P(A^n); \cap >$. Здесь и далее $P(D)$ — совокупность всех подмножеств множества D. Подобные полные решетки, нижние подполурешетки некоторой полурешетки $< P(D); \cap >$ будем впредь называть *теоретико-множественными полными нижними подполурешетками*.

В связи с отмеченными свойствами решеток $\mathrm{Alg}_n \mathfrak{A}$ возникает естественный для всех производных структур универсальных алгебр (таких, к примеру, как решетки подалгебр, конгруэнций, группы автоморфизмов и т.д.) вопрос

Pinus, A.G., On algebraic properties of universal algebras.

Поступила 21 сентября 2016 г., опубликована 1 марта 2017 г.

(точнее — два) об описании соответствующих производных структур — абстрактном и "конкретном". В данном случае: какие решетки изоморфны решеткам вида $\mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}$ для универсальных алгебр $\mathfrak{A}$ и какие подмножества B множеств A^n совпадают с решетками $\mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}$ для какой-либо универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$? В настоящий момент известен лишь частичный ответ на первый из этих вопросов. В работе [3] доказано, что для любой полной решетки L существует универсальная алгебра $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ такая, что $L \cong \mathrm{Alg}_1\mathfrak{A}$.

В настоящей работе изложены некоторые результаты связанные с "конкретным" описанием решеток $\mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}$. Прежде всего покажем, что отнюдь не любая теоретико-множественная полная нижняя подполурешетка $B \subseteq P(A)$ имеет вид $\mathrm{Alg}_1\mathfrak{A}$ для какой-либо универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$. Кроме того приведем некоторое достаточное условие того, что бы для некоторого $B \subseteq P(A)$ существовала алгебра $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ такая, что $\mathrm{Alg}_1\mathfrak{A} = B$. Наконец, опишем алгебры с наибольшим числом алгебраических множеств, т.е. алгебры $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ такие, что $\mathrm{Alg}_n\mathfrak{A} = P(A^n)$.

В работе [4] предложено к рассмотрению определение оператора алгебраического замыкания $B \to \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ на подмножествах B множества A^n, где $\overline{B}_{\mathfrak{A}}$ – наименьшее алгебраическое множество алгебры $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ включающее в себя B. В работах [4, 5] определены отношения $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$, $\leq^n_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$ квазипорядков на множествах A и A^n соответственно:

- для $a, b \in A$, $a \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}} b$ тогда и только тогда, когда существует внутренний гомоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$ такой, что $\varphi(b) = a$;
- для $\overline{a}, \overline{b} \in A^n$, $\overline{a} \leq^n_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}} \overline{b}$ тогда и только тогда, когда существует внутренний гомоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$ такой, что $\varphi(\overline{b}) = \overline{a}$, т.е. $\varphi(b_i) = a_i$, если $\overline{a} =< a_1, \cdots, a_n >$, $\overline{b} =< b_1, \cdots, b_n >$.

Напомним, что *внутренним гомоморфизмом* алгебры $\mathfrak{A}$ называется любой гомоморфизм какой-либо подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ на какую-либо ее же подалгебру. Через $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$ обозначим совокупность (полугруппу относительно суперпозиции частичных отображений множества A в себя) внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$.

В работе [4] доказано

Утверждение А. *Для любой алгебры $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ и любых $a \in A$ ($\overline{a} \in A^n$) алгебраическое множество $\overline{\{a\}}_{\mathfrak{A}}$ ($\overline{\{\overline{a}\}}_{\mathfrak{A}}$) совпадает с главным идеалом в квазиупорядоченном множестве $< A; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}>$ (в $< A^n; \leq^n_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}>$), порожденным элементом a ($\overline{a}$).*

Произвольный квазипорядок $\leq$ на множестве A определен как Ihm-дозволенный (Ihm-запрещенный), если он совпадает с квазипорядком $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$ для некоторой алгебры
$\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ (если $\leq$ не совпадает ни с одним из квазипорядков $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$ ни для какой из алгебр $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$).

В работах [4, 6] построены примеры Ihm-запрещенных квазипорядков на любых не менее чем четырехэлементных множествах. Таковым, в частности, является квазипорядок определенный на множестве $A = \{a, b, c, d, e_i | i \in I\}$ (здесь I произвольное непустое множество) следующими неравенствами: $a \leq b$, $b \leq a$, $a < d$, $b < d$, $c < d$. Для любого $x \in A$ через A_x обозначим главный идеал порожденный в $< A; \leq>$ элементом x, т.е. $A_a = A_b = \{a, b\}$, $A_c = \{c\}$, $A_d = \{a, b, c, d\}$, $A_{e_i} = \{e_i\}$. В качестве B рассмотрим совокупность $\{\emptyset, A_a =$

$A_b, A_c, A_{e_i}(i \in I), A_d, A\}$ являющуюся теоретико-множественной нижней полной подполурешеткой. В силу Ihm-запрещенности квазипорядка $\leq$, отмеченной в утверждении А взаимосвязи алгебраических множеств $\overline{\{a\}}_{\mathfrak{A}}$ алгебр $\mathfrak{A}$ и главных идеалов квазипорядков $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$, а также определимости квазипорядков своими главными идеалами, совокупность B не совпадает с решеткой $\mathrm{Alg}_1\,\mathfrak{A}$ ни для какой из алгебр $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$.

Тем самым имеет место

Утверждение 1. *Для любого не менее чем четырехэлементного множества A существует теоретико-множественная нижняя полная подполурешетка его подмножеств не являющаяся решеткой одномерных алгебраических множеств $\mathrm{Alg}_1\,\mathfrak{A}$ ни для какой универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$.*

Таким образом вопрос конкретного описания решеток вида $\mathrm{Alg}_n\,\mathfrak{A}$ (и, в частности, вида $\mathrm{Alg}_1\,\mathfrak{A}$), т.е. нахождение необходимых и достаточных условий на совокупность $B \subseteq P(A^n)$ ($B \subseteq P(A)$) для совпадения B с $\mathrm{Alg}_n\,\mathfrak{A}$ (с $\mathrm{Alg}_1\,\mathfrak{A}$) для некоторой алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$, остается открытым. Приведем здесь, в качестве довольно простого примера, некоторое достаточное условие на совокупность $B \subseteq P(A)$ для совпадения B с решеткой $\mathrm{Alg}_1\,\mathfrak{A}$ для некоторой универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$.

Пусть A некоторое не менее чем трехэлементное множество, $0 \neq 1$ элементы из A и $A' = A \backslash \{0, 1\}$. Будем говорить, что совокупность множеств $B \subseteq P(A)$ удовлетворяет условию (*), если существует подалгебра D булевой алгебры $< P(A'); \cup, \cap, \neg, \emptyset, A' >$ замкнутая относительно пересечения любой совокупности входящих в нее подмножеств множества A' и при этом $B = \{C \cup \{0, 1\} | C \in D\}$.

Утверждение 2. *Если совокупность B подмножеств множества A удовлетворяет условию (*), то B является решеткой $\mathrm{Alg}_1\,\mathfrak{A}$ одномерных алгебраических множеств для некоторой алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$.*

Доказательство. Пусть множество A, его элементы $0, 1$, совокупности множеств
A', $D \subseteq P(A')$ и $B = \{C \cup \{0, 1\} | C \in D\}$ удовлетворяют условию (*). Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ сигнатуры σ состоящей из символов g_C $(C \in D)$ одноместных функций определенных для алгебры $\mathfrak{A}$ условиями:

$$g_C(x) = \begin{cases} 1 \text{ для } x \in C \cup \{1\}, \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Прежде всего заметим, что $g_{C_1}^2 = g_{C_1}$ и $g_{C_1} g_{C_2} = g_{C_2}$ для любых $C_1, C_2 \in D$. Тем самым, любое термальное уравнение равносильно для алгебры $\mathfrak{A}$ уравнению одного из видов: либо $g_{C_1}(x) = x$, либо $g_{C_1}(x) = g_{C_2}(x)$ для каких-либо $C_1, C_2 \in D$. Совокупность решений первого из них есть множество $\{0, 1\}$, а второго - $(A' \backslash (C_1 \oplus C_2)) \cup \{0, 1\}$, т.е. множества из совокупности B. В силу же того, что для любого $C \in D$, $C = A' \backslash (A' \oplus C)$, все множества из B являются одномерными алгебраическими множествами для алгебры $\mathfrak{A}$. А так как по условию (*) совокупность подмножеств из B замкнута относительно произвольных теоретико-множественных пересечений, то имеет место равенство $B = \mathrm{Alg}_1\,\mathfrak{A}$ и утверждение 2 доказано. □

Очевидным образом, для любого множества A теоретико-множественная нижняя полная подполурешетка $P(A)$ является решеткой одномерных алгебраических множеств $\mathrm{Alg}_1\,\mathfrak{A}$ для целого ряда универсальных алгебр $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$.

Причем эта ситуация экстремальна - это наибольшая теоретико-множественная нижняя полная подполурешетка для множества A и оператор алгебраического замыкания $B \to \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ в этом случае тривиален. В этой связи возникает естественный вопрос об описании алгебр $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ с условием $\mathrm{Alg}_1 \mathfrak{A} = P(A)$. Заключение данной работы и посвящено подобному описанию.

В утверждении А была описана взаимосвязь алгебраических множеств $\overline{\{a\}}_{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\{\overline{a}\}}_{\mathfrak{A}}$ для элементов a из A ($\overline{a}$ из A^n) универсальных алгебр и главных идеалов квазипорядков
$< A; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}>$ ($< A^n; \leq^n_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}>$).

Для алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ и подмножества B множества A через $< B >_{\mathfrak{A}}$ будем обозначать подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$ порожденную множеством B и вместо $< \{a\} >_{\mathfrak{A}}$ будем писать $< a >_{\mathfrak{A}}$ для $a \in A$. Таким образом существование внутреннего гомоморфизма φ алгебры $\mathfrak{A}$ такого, что $\varphi(\overline{a}) = \overline{b}$ (для $\overline{a}, \overline{b} \in A^n$) равносильно существованию гомоморфизма ψ алгебры $< \overline{a} >_{\mathfrak{A}}$ на алгебру $< \overline{b} >_{\mathfrak{A}}$ такого, что $\psi(a_i) = b_i$. Последнее же равносильно тому, что $\mathfrak{A} \models D^+_{\overline{a}}(\overline{b})$, где $D^+_{\overline{a}}(x_1, \cdots, x_n)$ позитивная диаграмма алгебры $< \overline{a} >_{\mathfrak{A}}$, т.е. совокупность всех термальных уравнений $\{t^1_i(\overline{x}) = t^2_i(\overline{x}) | i \in I\}$ таких, что $\mathfrak{A} \models t^1_i(\overline{a}) = t^2_i(\overline{a})$.

Несколько сложнее, чем это описано в утверждении А, обстоит дело для оператора алгебраического замыкания $B \to \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ в случае неодноэлементных множеств B ($B \subseteq A$ или $B \subseteq A^n$). Механизм построения множеств $\overline{B}_{\mathfrak{A}}$ в этом случае выглядит следующим образом. Для любого $B \subseteq A$ ($B \subseteq A^n$) через f_B обозначим некоторый фиксированный элемент алгебры $\mathfrak{A}^A$ ($(\mathfrak{A}^n)^{A^n}$) такой, что $\mathrm{rang}\, f_B = B$, а через g_a, соответственно, $g_{\overline{a}}$ для $a \in A$ и $\overline{a} \in A^n$ – элемент алгебры $\mathfrak{A}^A$ (алгебры $(\mathfrak{A}^n)^{A^n}$) такой, что $\mathrm{rang}\, g_a = \{a\}$ ($\mathrm{rang}\, g_{\overline{a}} = \{\overline{a}\}$).

В работе [5] доказана

Теорема А. *Для любых алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$, $n \in \omega$, $B \subseteq A$ ($B \subseteq A^n$) и $a \in A$ ($\overline{a} \in A^n$) имеет место: $a \in \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда существует $\varphi \in \mathrm{Ihm}\, \mathfrak{A}^A$ такой, что $\varphi(f_B) = g_a$
($\overline{a} \in \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда существует $\varphi \in \mathrm{Ihm}\, (\mathfrak{A}^n)^{A^n}$ такой, что $\varphi(f_B) = g_{\overline{a}}$).*

На основе этого утверждения вернемся к вопросу об условиях тривиальности оператора алгебраического замыкания на алгебре $\mathfrak{A}$. Прежде всего напомним следующее определение. Пусть $\pounds\mathfrak{A}$ некоторая полугруппа преобразований (возможно частичных) алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ называется *$\pounds$-жесткой*, если все отображения из $\pounds\mathfrak{A}$ тождественны (являются тождественными частичными отображениями). Обобщим это определение следующим образом: пусть $\mathfrak{A}'$ некоторая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ и $\pounds'$ некоторое подмножество элементов полугруппы $\pounds\mathfrak{A}$ область значений которых лежит в $\mathfrak{A}'$. Тогда алгебру $\mathfrak{A}$ назовем *($\pounds, \mathfrak{A}', \pounds'$)-жесткой*, если имеет место равенство $\{\varphi \in \pounds\mathfrak{A} | \mathrm{rang}\, \varphi \subseteq \mathfrak{A}'\} = \pounds'$.

Прежде всего отметим, что непосредственно из утверждения А следует

Утверждение 3. *Для любой алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ следующие утверждения равносильны:*

а) *для любого $a \in A$ $\overline{\{a\}}_{\mathfrak{A}} = \{a\}$;*
б) *квазипорядок $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$ совпадает с отношением равенства на A;*
в) *все внутренние гомоморфизмы алгебры $\mathfrak{A}$ тождественны, т.е. алгебра $\mathfrak{A}$ Ihm -жесткая;*
г) *для любого $\overline{a} \in A^n$ $\overline{\{\overline{a}\}}_{\mathfrak{A}} = \{\overline{a}\}$.*

Заметим, что равенства $\overline{\{a\}}_{\mathfrak{A}} = \{a\}$ для всех элементов a из алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ не гарантируют равенств $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$ для неодноэлементных $B \subseteq A$. Укажем при этом на следующий пример.

Пусть $A_1 = \{a_0, \cdots, a_8\}$, $A_2 = \{b_0, \cdots, b_3\}$, $A_3 = \{c_0, \cdots, c_5\}$, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ и

$$\sigma =< f^1, h^1 > .$$

Алгебру $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ определим следующим образом: $< A_1; f >$ есть 9-цикл и $h(a_i) = a_0$, есть $< A_2; f >$ 4-цикл и $h(b_i) = b_0$, $< A_3; f >$ есть 6-цикл и $h(c_i) = c_0$. Так как существует гомоморфизм алгебры $< A_1; f, h > \times < A_2; f, h >$ на алгебру $< A_3; f, h >$, то $c_0 \in \overline{\{a_0, b_0\}}_{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\{a_0, b_0\}}_{\mathfrak{A}} \neq \{a_0, b_0\}$. С другой стороны, т.к. элемент, к примеру, a_1 однозначно определяется в алгебре $\mathfrak{A}$ как решение уравнений $f^9(x) = x$, $x = fh(x)$ и аналогичная ситуация имеет место для любого $d \in A$, то $\overline{\{d\}}_{\mathfrak{A}} = \{d\}$ для любого $d \in A$.

Аналогичным образом можно для любого $n \in \omega$ указать алгебру $\mathfrak{A}_n =< A; \sigma >$ такую, что для любого $B \subseteq A$ неравенство $|B| \leq n$ влечет равенство $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$ и существует $C \subseteq A$ такое, что $|C| > n$ и $\overline{C}_{\mathfrak{A}} \neq C$. Подобным же образом строится пример алгебры $\mathfrak{A} =< A; f^1, h^1 >$ такой, что для любых конечных $B \subseteq A$ имеет место равенство $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$, и существуют бесконечные $C \subseteq A$ такие, что $\overline{C}_{\mathfrak{A}} \neq C$. Пусть P — совокупность всех простых натуральных чисел и $A = \bigcup\limits_{p \in P} A_p$ при этом $A_p = \{a_0^p, \cdots, a_{p-1}^p\}$, $< A_p; f >$ — p-цикл и $h(a_i^p) = a_0^p$ для $i = 0, \cdots, p-1$. Очевидно, что для любого конечного $B \subseteq A$ $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$. В то же время, если C бесконечное подмножество множества $A^0 = \{a_0^p | p \in P\}$, то, т.к. существуют гомоморфизмы φ алгебры $\prod\limits_{p \in C} < A_p; f, h >$ на любую из алгебр $< A_p; f, h >$ такие, что $\varphi(g) = a_0^p$ (здесь $g(p) = a_0^p$ для $p \in C$), то, $\overline{C}_{\mathfrak{A}} = A^0$ т.е. для $C \neq A^0$ $\overline{C}_{\mathfrak{A}} \neq C$.

Исходя из утверждения теоремы А возможно теперь сформулировать для алгебр $\mathfrak{A}$ критерий выполнимости равенств $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$ для любых $B \subseteq A$ ($B \subseteq A^n$).

Для $i \in A$ через π_i обозначим проектирование алгебры $\mathfrak{A}^A$ на алгебру $\mathfrak{A}$ по i-ой координате, а через π'_i — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}^A$ в ее константную подалгебру $\mathfrak{A}' = \{f \in \mathfrak{A}^A |$ для любых $i_1, i_2 \in A$ $f(i_1) = f(i_2)\}$ определяемый равенством $\pi'_i(f) = g_{\pi_i(f)}$ для $f \in \mathfrak{A}^A$. Через $Pr\,\mathfrak{A}^A$ обозначим совокупность внутренних гомоморфизмов являющихся ограничениями гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}^A$ вида π'_i $(i \in A)$. Непосредственно из теоремы А вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ следующие условия равносильны:*

а) *для любого $B \subseteq A$ $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$;*
б) *для любого $f \in \mathfrak{A}^A$ $\{h \in \mathfrak{A}^A | h \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}^A} f\} \cap \{g_a | a \in A\} = \{g_b | b \in A, b \in rangf\}$;*
в) *алгебра $\mathfrak{A}^A$ является $(\mathrm{Ihm}, \mathfrak{A}', Pr)$-жесткой.*

Соответствующим образом определим совокупность $Pr(\mathfrak{A}^n)^{A^n}$ внутренних гомоморфизмов алгебры $(\mathfrak{A}^n)^{A^n}$ в ее константную подалгебру $(\mathfrak{A}^n)'$ и тогда для равенства $\mathrm{Alg}_n\,\mathfrak{A} = P(A^n)$ из теоремы А вытекает следующий критерий.

Теорема 1'. *Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ и любого натурального n равносильны условия:*

а) *для любого $B \subseteq A^n$ $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$;*
б) *для любого $f \in (\mathfrak{A}^n)^{A^n}$ $\{h \in (\mathfrak{A}^n)^{A^n} | h \leq_{\mathrm{Ihm}\,(\mathfrak{A}^n)^{A^n}} f\} \cap \{g_{\overline{a}} | \overline{a} \in A^n\} = \{g_{\overline{b}} | b \in A^n, \overline{b} = \mathrm{rang}\, f\}$;*
в) *алгебра $(\mathfrak{A}^n)^{A^n}$ является $(\mathrm{Ihm}, (\mathfrak{A}^n)', Pr)$-жесткой.*

В связи с приведенными примерами алгебр с тривиальным алгебраическим замыканием для множеств мощности не превышающей n (n — произвольное фиксированное натуральное число), но нетривиальным для $(n+1)$-элементных множеств, представляет интерес нахождение условий на алгебры при которых тривиальность алгебраического замыкания для одноэлементных множеств влечет его тривиальность для любых конечных множеств. В работе [2] введено понятие эквациональной области — универсальной алгебры для которой объединение конечного числа алгебраических множеств и само является алгебраическим. Там же приведены многочисленные примеры эквациональных областей. Таким образом для эквациональных областей с алгебраически замкнутыми одноэлементными подмножествами конечные подмножества их базовых множеств так же алгебраически замкнуты.

Приведем здесь иное, сформулированное в классических терминах универсальной алгебры, условие на алгебры при котором алгебраическая замкнутость их одноэлементных подмножеств влечет алгебраическую замкнутость любых их конечных подмножеств.

Напомним, что многообразие $\mathfrak{M}$ универсальных алгебр удовлетворяет условию Фрезера–Хорна, если для любых алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ из $\mathfrak{M}$ и любой конгруэнции θ алгебры $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ существуют конгруэнции θ_i алгебр $\mathfrak{A}_i$ такие, что для $a_i, b_i \in \mathfrak{A}_i$
$<< a_1, a_2 >, < b_1, b_2 >> \in \theta \Leftrightarrow < a_1, b_1 > \in \theta_1, < a_2, b_2 > \in \theta_2$

Обозначим последнюю ситуацию как $\theta = \theta_1 \cdot \theta_2$. Как известно все конгруэнц-дистрибутивные многообразия обладают свойством Фрезера–Хорна.

Многообразие $\mathfrak{M}$ обладает свойством продолжимости конгруэнций, если для любой конгруэнции θ' на произвольной подалгебре $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{M}$ — θ' является ограничением на $\mathfrak{A}'$ некоторой конгруэнции θ алгебры $\mathfrak{A}$.

Имеет место

Теорема 2. *Для любой алгебры $\mathfrak{A} =< A; \sigma >$ из многообразия со свойствами Фрезера–Хорна и продолжимости конгруэнций все одноэлементные подмножества которой алгебраически замкнуты таковыми же будут и все ее конечные подмножества.*

Доказательство. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям теоремы. В силу теоремы 1 для доказательства равенства $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$ для любого конечного $B = \{b_1, \cdots, b_n\} \subseteq A$ необходимо показать, что для любого внутреннего гомоморфизма φ алгебры $\mathfrak{A}^n$ в алгебру ${\mathfrak{A}_o}^n = \{g_c | c \in A\}$ элемент $\varphi(f_B)$ совпадает с одним из элементов вида $g_{b_i} (i \leq n)$. Здесь f_B, g_c элементы из $\mathfrak{A}^n$ таковые, что для $j \leq n$ $f_B(j) = b_j$ и $g_c(j) = c$. Для простоты будем считать, что $B = \{b_1, b_2\}$. Пусть $\varphi \in \mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}^2$, $\mathrm{dom}\,\varphi =< f_B >_{\mathfrak{A}^2}$ и $\mathrm{rang}\,\varphi \subseteq {\mathfrak{A}_o}^2$. Пусть $\theta = \mathrm{Ker}\,\varphi$. В силу свойств многообразия включающего в себя алгебру $\mathfrak{A}$ найдутся конгруэнции θ_1, θ_2 алгебр $< b_1 >_{\mathfrak{A}}$ и $< b_2 >_{\mathfrak{A}}$ соответственно такие, что $\theta = \theta_1 \cdot \theta_2$. Через $\bigtriangledown_{\mathfrak{L}}$ ($\bigtriangleup_{\mathfrak{L}}$) обозначим наибольшую (наименьшую) конгруэнцию алгебры $\mathfrak{L}$. Заметим что равенства $\theta_1 = \bigtriangledown_{<b_1>_{\mathfrak{A}}}$ и $\theta_2 = \bigtriangledown_{<b_2>_{\mathfrak{A}}}$ одновременно невозможны, т.к. в этом случае алгебра $\mathfrak{A}$ должна содержать одноэлементную подалгебру, что противоречит ее Ihm-жесткости. Пусть $\theta_1 \neq \bigtriangledown_{<b_1>_{\mathfrak{A}}}$, так как $\theta = \theta_1 \cdot \theta_2 \leq \theta_1 \cdot \bigtriangledown_{<b_2>_{\mathfrak{A}}}$, то найдется гомоморфизм ψ алгебры $< f_B >_{\mathfrak{A}^2}$ в алгебру $\mathfrak{A}_0^2$ с ядром вида $\theta_1 \cdot \bigtriangledown_{<b_2>_{\mathfrak{A}}}$. В силу Ihm-жесткости алгебры $\mathfrak{A}$ это возможно лишь в случае когда $\theta_1 = \triangle_{<b_1>_{\mathfrak{A}}}$ и $\psi(f_B) =< b_1, b_1 >$.

Заметим, что в силу тех же причин θ_2 равно либо $\triangle_{<b_2>_{\mathfrak{A}}}$, либо $\nabla_{<b_2>_{\mathfrak{A}}}$. При этом одновременные равенства $\theta_1 = \triangle_{<b_1>_{\mathfrak{A}}}$ и $\theta_2 = \triangle_{<b_2>_{\mathfrak{A}}}$ невозможны, т.к. в этом случае алгебры $< b_1 >_{\mathfrak{A}}$ и $< b_2 >_{\mathfrak{A}}$ изоморфны с помощью изоморфизма η такого, что $\eta(b_1) = b_2$. Последнее же в случае $b_1 \neq b_2$ противоречит Ihm-жесткости алгебры $\mathfrak{A}$. Тем самым, либо $\varphi(f_B) =< b_1, b_1 >$, либо $\varphi(f_B) =< b_2, b_2 >$ и теорема доказана. □

References

[1] B. I. Plotkin, *Some concepts of algebraic geometry in universal algebra*, Algebra and Analysis, **9**:4 (1997), 224–248. Zbl 0920.08002

[2] E. Yu. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Algebraic Geometry on Algebraic Structures, IV, Ecuational Domains and Codomains*, Algebra and Logic, **49**:6 (2010), 483–508.

[3] A. G. Pinus, *On the lattices of algebraic subsets of universal algebras*, Algebra and model theory, 8, Collection of papers, NSTU, Novosibirsk, 2011, 60–66. Zbl 1299.03031

[4] A. G. Pinus, *On the quasiorders induced by inner homomorphisms and the operator of algebraical closure*, Siberian Math. Journal, **56**:3 (2015), 499–504. MR3442807

[5] A. G. Pinus, *n-algebraically complete algebras, pseudodirect products and algebraic closure operator*, Siberian Journal of Pure and Aapplied mathematics, **16**:4 (2016), 97–102.

[6] A. G. Pinus, Ihm-*admissible and* Ihm-*forbidden quasiorders on sets*, Siberian Math. Journal, 57:5(2016), 866–869. Zbl 06684756

Alexander Georgievich Pinus
Novosibirsk State Technical University,
pr. K. Marxa, 20,
630073, Novosibirsk, Russia
E-mail address: ag.pinus@gmail.com