

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 14, стр. 156–162 (2017)

DOI 10.17377/semi.2017.12.016

УДК 512.57

MSC 08A99

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

А.Г. ПИНУС

ABSTRACT. The algebraic closure operator on the universal algebras is studied. Special attention is paid to a description of algebras whose closure operator is trivial.

Keywords: lattices of algebraic sets, inner homomorphisms, algebraic closure operator.

Одним из основных понятий алгебраической геометрии универсальных алгебр, развитой в работах школ Б. И. Плоткина и В. Н. Ремесленникова (см., к примеру, [1, 2]), является понятие алгебраического множества. Напомним, что множество $B \subseteq A^n$ называется n -мерным алгебраическим множеством для универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, если B является совокупностью решений в \mathfrak{A} некоторой системы (возможно бесконечной) термальных уравнений сигнатуры σ , т.е. $B = \{\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in A^n | \mathfrak{A} \models t_i^1(\bar{a}) = t_i^2(\bar{a}), i \in I\}$, где $\{t_i^1(x_1, \dots, x_n), t_i^2(x_1, \dots, x_n) | i \in I\}$ — некоторая совокупность термов сигнатуры σ . Совокупность $\text{Alg}_n \mathfrak{A}$ всех n -мерных алгебраических множеств алгебры \mathfrak{A} образует полную решетку относительно теоретико-множественного отношения \subseteq , а $\langle \text{Alg}_n \mathfrak{A}; \cap \rangle$ является нижней подполурешеткой полурешетки $\langle P(A^n); \cap \rangle$. Здесь и далее $P(D)$ — совокупность всех подмножеств множества D . Подобные полные решетки, нижние подполурешетки некоторой полурешетки $\langle P(D); \cap \rangle$ будем впредь называть *теоретико-множественными полными нижними подполурешетками*.

В связи с отмеченными свойствами решеток $\text{Alg}_n \mathfrak{A}$ возникает естественный для всех производных структур универсальных алгебр (таких, к примеру, как решетки подалгебр, конгруэнций, группы автоморфизмов и т.д.) вопрос

PINUS, A.G., ON ALGEBRAIC PROPERTIES OF UNIVERSAL ALGEBRAS.

© 2017 Пинус А.Г.

Поступила 21 сентября 2016 г., опубликована 1 марта 2017 г.

(точнее — два) об описании соответствующих производных структур — абстрактном и “конкретном”. В данном случае: какие решетки изоморфны решеткам вида $\text{Alg}_n \mathfrak{A}$ для универсальных алгебр \mathfrak{A} и какие подмножества B множеств A^n совпадают с решетками $\text{Alg}_n \mathfrak{A}$ для какой-либо универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$? В настоящий момент известен лишь частичный ответ на первый из этих вопросов. В работе [3] доказано, что для любой полной решетки L существует универсальная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ такая, что $L \cong \text{Alg}_1 \mathfrak{A}$.

В настоящей работе изложены некоторые результаты связанные с “конкретным” описанием решеток $\text{Alg}_n \mathfrak{A}$. Прежде всего покажем, что отнюдь не любая теоретико-множественная полная нижняя подполурешетка $B \subseteq P(A)$ имеет вид $\text{Alg}_1 \mathfrak{A}$ для какой-либо универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$. Кроме того приведем некоторое достаточное условие того, что бы для некоторого $B \subseteq P(A)$ существовала алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ такая, что $\text{Alg}_1 \mathfrak{A} = B$. Наконец, опишем алгебры с наибольшим числом алгебраических множеств, т.е. алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ такие, что $\text{Alg}_n \mathfrak{A} = P(A^n)$.

В работе [4] предложено к рассмотрению определение оператора алгебраического замыкания $B \rightarrow \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ на подмножествах B множества A^n , где $\overline{B}_{\mathfrak{A}}$ — наименьшее алгебраическое множество алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ включающее в себя B . В работах [4, 5] определены отношения $\leq_{\text{Ihm} \mathfrak{A}}$, $\leq_{\text{Ihm} \mathfrak{A}}^n$ квазипорядков на множествах A и A^n соответственно:

- для $a, b \in A$, $a \leq_{\text{Ihm} \mathfrak{A}} b$ тогда и только тогда, когда существует внутренний гомоморфизм φ алгебры \mathfrak{A} такой, что $\varphi(b) = a$;
- для $\bar{a}, \bar{b} \in A^n$, $\bar{a} \leq_{\text{Ihm} \mathfrak{A}}^n \bar{b}$ тогда и только тогда, когда существует внутренний гомоморфизм φ алгебры \mathfrak{A} такой, что $\varphi(\bar{b}) = \bar{a}$, т.е. $\varphi(b_i) = a_i$, если $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$.

Напомним, что *внутренним гомоморфизмом* алгебры \mathfrak{A} называется любой гомоморфизм какой-либо подалгебры алгебры \mathfrak{A} на какую-либо ее же подалгебру. Через $\text{Ihm} \mathfrak{A}$ обозначим совокупность (полугруппу относительно суперпозиции частичных отображений множества A в себя) внутренних гомоморфизмов алгебры \mathfrak{A} .

В работе [4] доказано

Утверждение А. *Для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и любых $a \in A$ ($\bar{a} \in A^n$) алгебраическое множество $\overline{\{a\}}_{\mathfrak{A}}$ ($\overline{\{\bar{a}\}}_{\mathfrak{A}}$) совпадает с главным идеалом в квазиупорядоченном множестве $\langle A; \leq_{\text{Ihm} \mathfrak{A}} \rangle$ ($\langle A^n; \leq_{\text{Ihm} \mathfrak{A}}^n \rangle$), порожденным элементом a (\bar{a}).*

Произвольный квазипорядок \leq на множестве A определен как Ihm -дозволненный (Ihm -запрещенный), если он совпадает с квазипорядком $\leq_{\text{Ihm} \mathfrak{A}}$ для некоторой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ (если \leq не совпадает ни с одним из квазипорядков $\leq_{\text{Ihm} \mathfrak{A}}$ ни для какой из алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$).

В работах [4, 6] построены примеры Ihm -запрещенных квазипорядков на любых не менее чем четырехэлементных множествах. Таковым, в частности, является квазипорядок определенный на множестве $A = \{a, b, c, d, e_i | i \in I\}$ (здесь I произвольное непустое множество) следующими неравенствами: $a \leq b, b \leq a, a < d, b < d, c < d$. Для любого $x \in A$ через A_x обозначим главный идеал порожденный в $\langle A; \leq \rangle$ элементом x , т.е. $A_a = A_b = \{a, b\}$, $A_c = \{c\}$, $A_d = \{a, b, c, d\}$, $A_{e_i} = \{e_i\}$. В качестве B рассмотрим совокупность $\{\emptyset, A_a =$

$A_b, A_c, A_{e_i} (i \in I), A_d, A\}$ являющуюся теоретико-множественной нижней полной подполурешеткой. В силу Пhm-запрещенности квазипорядка \leq , отмеченной в утверждении А взаимосвязи алгебраических множеств $\{\overline{a}\}_{\mathfrak{A}}$ алгебр \mathfrak{A} и главных идеалов квазипорядков $\leq_{\text{Phm}} \mathfrak{A}$, а также определенности квазипорядков своими главными идеалами, совокупность B не совпадает с решеткой $\text{Alg}_1 \mathfrak{A}$ ни для какой из алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$.

Тем самым имеет место

Утверждение 1. *Для любого не менее чем четырехэлементного множества A существует теоретико-множественная нижняя полная подполурешетка его подмножеств не являющаяся решеткой одномерных алгебраических множеств $\text{Alg}_1 \mathfrak{A}$ ни для какой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$.*

Таким образом вопрос конкретного описания решеток вида $\text{Alg}_n \mathfrak{A}$ (и, в частности, вида $\text{Alg}_1 \mathfrak{A}$), т.е. нахождение необходимых и достаточных условий на совокупность $B \subseteq P(A^n)$ ($B \subseteq P(A)$) для совпадения B с $\text{Alg}_n \mathfrak{A}$ (с $\text{Alg}_1 \mathfrak{A}$) для некоторой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, остается открытым. Приведем здесь, в качестве довольно простого примера, некоторое достаточное условие на совокупность $B \subseteq P(A)$ для совпадения B с решеткой $\text{Alg}_1 \mathfrak{A}$ для некоторой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$.

Пусть A некоторое не менее чем трехэлементное множество, $0 \neq 1$ элементы из A и $A' = A \setminus \{0, 1\}$. Будем говорить, что совокупность множеств $B \subseteq P(A)$ удовлетворяет условию (*), если существует подалгебра D булевой алгебры $\langle P(A'); \cup, \cap, \neg, \emptyset, A' \rangle$ замкнутая относительно пересечения любой совокупности входящих в нее подмножеств множества A' и при этом $B = \{C \cup \{0, 1\} \mid C \in D\}$.

Утверждение 2. *Если совокупность B подмножеств множества A удовлетворяет условию (*), то B является решеткой $\text{Alg}_1 \mathfrak{A}$ одномерных алгебраических множеств для некоторой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$.*

Доказательство. Пусть множество A , его элементы $0, 1$, совокупности множеств

$A', D \subseteq P(A')$ и $B = \{C \cup \{0, 1\} \mid C \in D\}$ удовлетворяют условию (*). Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ сигнатуры σ состоящей из символов g_C ($C \in D$) одноместных функций определенных для алгебры \mathfrak{A} условиями:

$$g_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in C \cup \{1\}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Прежде всего заметим, что $g_{C_1}^2 = g_{C_1}$ и $g_{C_1} g_{C_2} = g_{C_2}$ для любых $C_1, C_2 \in D$. Тем самым, любое термальное уравнение равносильно для алгебры \mathfrak{A} уравнению одного из видов: либо $g_{C_1}(x) = x$, либо $g_{C_1}(x) = g_{C_2}(x)$ для каких-либо $C_1, C_2 \in D$. Совокупность решений первого из них есть множество $\{0, 1\}$, а второго - $(A' \setminus (C_1 \oplus C_2)) \cup \{0, 1\}$, т.е. множества из совокупности B . В силу же того, что для любого $C \in D$, $C = A' \setminus (A' \oplus C)$, все множества из B являются одномерными алгебраическими множествами для алгебры \mathfrak{A} . А так как по условию (*) совокупность подмножеств из B замкнута относительно произвольных теоретико-множественных пересечений, то имеет место равенство $B = \text{Alg}_1 \mathfrak{A}$ и утверждение 2 доказано. \square

Очевидным образом, для любого множества A теоретико-множественная нижняя полная подполурешетка $P(A)$ является решеткой одномерных алгебраических множеств $\text{Alg}_1 \mathfrak{A}$ для целого ряда универсальных алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$.

Причем эта ситуация экстремальна - это наибольшая теоретико-множественная нижняя полная подполурешетка для множества A и оператор алгебраического замыкания $B \rightarrow \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ в этом случае тривиален. В этой связи возникает естественный вопрос об описании алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ с условием $\text{Alg}_1 \mathfrak{A} = P(A)$. Заключение данной работы и посвящено подобному описанию.

В утверждении А была описана взаимосвязь алгебраических множеств $\overline{\{a\}}_{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\{\bar{a}\}}_{\mathfrak{A}}$ для элементов a из A (\bar{a} из A^n) универсальных алгебр и главных идеалов квази порядков

$$\langle A; \leq_{\text{Pnm } \mathfrak{A}} \rangle \quad (\langle A^n; \leq_{\text{Pnm } \mathfrak{A}}^n \rangle).$$

Для алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и подмножества B множества A через $\langle B \rangle_{\mathfrak{A}}$ будем обозначать подалгебру алгебры \mathfrak{A} порожденную множеством B и вместо $\langle \{a\} \rangle_{\mathfrak{A}}$ будем писать $\langle a \rangle_{\mathfrak{A}}$ для $a \in A$. Таким образом существование внутреннего гомоморфизма φ алгебры \mathfrak{A} такого, что $\varphi(\bar{a}) = \bar{b}$ (для $\bar{a}, \bar{b} \in A^n$) равносильно существованию гомоморфизма ψ алгебры $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}}$ на алгебру $\langle \bar{b} \rangle_{\mathfrak{A}}$ такого, что $\psi(a_i) = b_i$. Последнее же равносильно тому, что $\mathfrak{A} \models D_{\bar{a}}^{\pm}(\bar{b})$, где $D_{\bar{a}}^{\pm}(x_1, \dots, x_n)$ позитивная диаграмма алгебры $\langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}}$, т.е. совокупность всех термальных уравнений $\{t_i^1(\bar{x}) = t_i^2(\bar{x}) \mid i \in I\}$ таких, что $\mathfrak{A} \models t_i^1(\bar{a}) = t_i^2(\bar{a})$.

Несколько сложнее, чем это описано в утверждении А, обстоит дело для оператора алгебраического замыкания $B \rightarrow \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ в случае неоднородных множеств B ($B \subseteq A$ или $B \subseteq A^n$). Механизм построения множеств $\overline{B}_{\mathfrak{A}}$ в этом случае выглядит следующим образом. Для любого $B \subseteq A$ ($B \subseteq A^n$) через f_B обозначим некоторый фиксированный элемент алгебры \mathfrak{A}^A ($(\mathfrak{A}^n)^{A^n}$) такой, что $\text{rang } f_B = B$, а через g_a , соответственно, $g_{\bar{a}}$ для $a \in A$ и $\bar{a} \in A^n$ - элемент алгебры \mathfrak{A}^A (алгебры $(\mathfrak{A}^n)^{A^n}$) такой, что $\text{rang } g_a = \{a\}$ ($\text{rang } g_{\bar{a}} = \{\bar{a}\}$).

В работе [5] доказана

Теорема А. *Для любых алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, $n \in \omega$, $B \subseteq A$ ($B \subseteq A^n$) и $a \in A$ ($\bar{a} \in A^n$) имеет место: $a \in \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда существует $\varphi \in \text{Pnm } \mathfrak{A}^A$ такой, что $\varphi(f_B) = g_a$ ($\bar{a} \in \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда существует $\varphi \in \text{Pnm } (\mathfrak{A}^n)^{A^n}$ такой, что $\varphi(f_B) = g_{\bar{a}}$).*

На основе этого утверждения вернемся к вопросу об условиях тривиальности оператора алгебраического замыкания на алгебре \mathfrak{A} . Прежде всего напомним следующее определение. Пусть $\mathcal{L}\mathfrak{A}$ некоторая полугруппа преобразований (возможно частичных) алгебры \mathfrak{A} . Тогда алгебра \mathfrak{A} называется \mathcal{L} -жесткой, если все отображения из $\mathcal{L}\mathfrak{A}$ тождественны (являются тождественными частичными отображениями). Обобщим это определение следующим образом: пусть \mathfrak{A}' некоторая подалгебра алгебры \mathfrak{A} и \mathcal{L}' некоторое подмножество элементов полугруппы $\mathcal{L}\mathfrak{A}$ область значений которых лежит в \mathfrak{A}' . Тогда алгебру \mathfrak{A} назовем $(\mathcal{L}, \mathfrak{A}', \mathcal{L}')$ -жесткой, если имеет место равенство $\{\varphi \in \mathcal{L}\mathfrak{A} \mid \text{rang } \varphi \subseteq \mathfrak{A}'\} = \mathcal{L}'$.

Прежде всего отметим, что непосредственно из утверждения А следует

Утверждение 3. *Для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ следующие утверждения равносильны:*

- а) для любого $a \in A$ $\overline{\{a\}}_{\mathfrak{A}} = \{a\}$;
- б) квази порядок $\leq_{\text{Pnm } \mathfrak{A}}$ совпадает с отношением равенства на A ;
- в) все внутренние гомоморфизмы алгебры \mathfrak{A} тождественны, т.е. алгебра \mathfrak{A} Pnm -жесткая;
- г) для любого $\bar{a} \in A^n$ $\overline{\{\bar{a}\}}_{\mathfrak{A}} = \{\bar{a}\}$.

Заметим, что равенства $\overline{\{a\}}_{\mathfrak{A}} = \{a\}$ для всех элементов a из алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ не гарантируют равенств $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$ для неодноэлементных $B \subseteq A$. Укажем при этом на следующий пример.

Пусть $A_1 = \{a_0, \dots, a_8\}$, $A_2 = \{b_0, \dots, b_3\}$, $A_3 = \{c_0, \dots, c_5\}$, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ и

$$\sigma = \langle f^1, h^1 \rangle.$$

Алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ определим следующим образом: $\langle A_1; f \rangle$ есть 9-цикл и $h(a_i) = a_0$, есть $\langle A_2; f \rangle$ 4-цикл и $h(b_i) = b_0$, $\langle A_3; f \rangle$ есть 6-цикл и $h(c_i) = c_0$. Так как существует гомоморфизм алгебры $\langle A_1; f, h \rangle \times \langle A_2; f, h \rangle$ на алгебру $\langle A_3; f, h \rangle$, то $c_0 \in \overline{\{a_0, b_0\}}_{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\{a_0, b_0\}}_{\mathfrak{A}} \neq \{a_0, b_0\}$. С другой стороны, т.к. элемент, к примеру, a_1 однозначно определяется в алгебре \mathfrak{A} как решение уравнений $f^9(x) = x$, $x = fh(x)$ и аналогичная ситуация имеет место для любого $d \in A$, то $\overline{\{d\}}_{\mathfrak{A}} = \{d\}$ для любого $d \in A$.

Аналогичным образом можно для любого $n \in \omega$ указать алгебру $\mathfrak{A}_n = \langle A; \sigma \rangle$ такую, что для любого $B \subseteq A$ неравенство $|B| \leq n$ влечет равенство $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$ и существует $C \subseteq A$ такое, что $|C| > n$ и $\overline{C}_{\mathfrak{A}} \neq C$. Подобным же образом строится пример алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; f^1, h^1 \rangle$ такой, что для любых конечных $B \subseteq A$ имеет место равенство $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$, и существуют бесконечные $C \subseteq A$ такие, что $\overline{C}_{\mathfrak{A}} \neq C$. Пусть P — совокупность всех простых натуральных чисел и $A = \bigcup_{p \in P} A_p$ при этом $A_p = \{a_0^p, \dots, a_{p-1}^p\}$, $\langle A_p; f \rangle$ — p -цикл и $h(a_i^p) = a_0^p$ для $i = 0, \dots, p-1$. Очевидно, что для любого конечного $B \subseteq A$ $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$. В то же время, если C бесконечное подмножество множества $A^0 = \{a_0^p | p \in P\}$, то, т.к. существуют гомоморфизмы φ алгебры $\prod_{p \in C} \langle A_p; f, h \rangle$ на любую из алгебр $\langle A_p; f, h \rangle$ такие, что $\varphi(g) = a_0^p$ (здесь $g(p) = a_0^p$ для $p \in C$), то, $\overline{C}_{\mathfrak{A}} = A^0$ т.е. для $C \neq A^0$ $\overline{C}_{\mathfrak{A}} \neq C$.

Исходя из утверждения теоремы А возможно теперь сформулировать для алгебр \mathfrak{A} критерий выполнимости равенств $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$ для любых $B \subseteq A$ ($B \subseteq A^n$).

Для $i \in A$ через π_i обозначим проектирование алгебры \mathfrak{A}^A на алгебру \mathfrak{A} по i -ой координате, а через π'_i — гомоморфизм алгебры \mathfrak{A}^A в ее константную подалгебру $\mathfrak{A}' = \{f \in \mathfrak{A}^A | \text{ для любых } i_1, i_2 \in A \ f(i_1) = f(i_2)\}$ определяемый равенством $\pi'_i(f) = g_{\pi_i(f)}$ для $f \in \mathfrak{A}^A$. Через $Pr \mathfrak{A}^A$ обозначим совокупность внутренних гомоморфизмов являющихся ограничениями гомоморфизмов алгебры \mathfrak{A}^A вида π'_i ($i \in A$). Непосредственно из теоремы А вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ следующие условия равносильны:

- для любого $B \subseteq A$ $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$;
- для любого $f \in \mathfrak{A}^A$ $\{h \in \mathfrak{A}^A | h \leq_{\text{Ihm } \mathfrak{A}^A} f\} \cap \{g_a | a \in A\} = \{g_b | b \in A, b \in \text{rang } f\}$;
- алгебра \mathfrak{A}^A является $(\text{Ihm } \mathfrak{A}', Pr)$ -жесткой.

Соответствующим образом определим совокупность $Pr(\mathfrak{A}^n)^{A^n}$ внутренних гомоморфизмов алгебры $(\mathfrak{A}^n)^{A^n}$ в ее константную подалгебру $(\mathfrak{A}^n)'$ и тогда для равенства $\text{Alg}_n \mathfrak{A} = P(A^n)$ из теоремы А вытекает следующий критерий.

Теорема 1'. Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и любого натурального n равносильны условия:

- а) для любого $B \subseteq A^n$ $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$;
- б) для любого $f \in (\mathfrak{A}^n)^{A^n}$ $\{h \in (\mathfrak{A}^n)^{A^n} \mid h \leq_{\text{Ihm}(\mathfrak{A}^n)^{A^n}} f\} \cap \{g_{\bar{a}} \mid \bar{a} \in A^n\} = \{g_{\bar{b}} \mid b \in A^n, \bar{b} = \text{rang } f\}$;
- в) алгебра $(\mathfrak{A}^n)^{A^n}$ является $(\text{Ihm}, (\mathfrak{A}^n)', Pr)$ -жесткой.

В связи с приведенными примерами алгебр с тривиальным алгебраическим замыканием для множеств мощности не превышающей n (n — произвольное фиксированное натуральное число), но нетривиальным для $(n+1)$ -элементных множеств, представляет интерес нахождение условий на алгебры при которых тривиальность алгебраического замыкания для одноэлементных множеств влечет его тривиальность для любых конечных множеств. В работе [2] введено понятие эквациональной области — универсальной алгебры для которой объединение конечного числа алгебраических множеств и само является алгебраическим. Там же приведены многочисленные примеры эквациональных областей. Таким образом для эквациональных областей с алгебраически замкнутыми одноэлементными подмножествами конечные подмножества их базовых множеств так же алгебраически замкнуты.

Приведем здесь иное, сформулированное в классических терминах универсальной алгебры, условие на алгебры при котором алгебраическая замкнутость их одноэлементных подмножеств влечет алгебраическую замкнутость любых их конечных подмножеств.

Напомним, что многообразия \mathfrak{M} универсальных алгебр удовлетворяет условию Фрезера–Хорна, если для любых алгебр $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ из \mathfrak{M} и любой конгруэнции θ алгебры $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ существуют конгруэнции θ_i алгебр \mathfrak{A}_i такие, что для $a_i, b_i \in \mathfrak{A}_i$

$$\langle \langle a_1, a_2 \rangle, \langle b_1, b_2 \rangle \rangle \in \theta \Leftrightarrow \langle a_1, b_1 \rangle \in \theta_1, \langle a_2, b_2 \rangle \in \theta_2$$

Обозначим последнюю ситуацию как $\theta = \theta_1 \cdot \theta_2$. Как известно все конгруэнцидистрибутивные многообразия обладают свойством Фрезера–Хорна.

Многообразие \mathfrak{M} обладает свойством продолжимости конгруэнций, если для любой конгруэнции θ' на произвольной подалгебре \mathfrak{A}' алгебры \mathfrak{A} из \mathfrak{M} — θ' является ограничением на \mathfrak{A}' некоторой конгруэнции θ алгебры \mathfrak{A} .

Имеет место

Теорема 2. Для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ из многообразия со свойствами Фрезера–Хорна и продолжимости конгруэнций все одноэлементные подмножества которой алгебраически замкнуты таковыми же будут и все ее конечные подмножества.

Доказательство. Пусть алгебра \mathfrak{A} удовлетворяет условиям теоремы. В силу теоремы 1 для доказательства равенства $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = B$ для любого конечного $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq A$ необходимо показать, что для любого внутреннего гомоморфизма φ алгебры \mathfrak{A}^n в алгебру $\mathfrak{A}_o^n = \{g_c \mid c \in A\}$ элемент $\varphi(f_B)$ совпадает с одним из элементов вида $g_{b_i} (i \leq n)$. Здесь f_B, g_c элементы из \mathfrak{A}^n таковые, что для $j \leq n$ $f_B(j) = b_j$ и $g_c(j) = c$. Для простоты будем считать, что $B = \{b_1, b_2\}$. Пусть $\varphi \in \text{Ihm } \mathfrak{A}^2, \text{dom } \varphi = \langle f_B \rangle_{\mathfrak{A}^2}$ и $\text{rang } \varphi \subseteq \mathfrak{A}_o^2$. Пусть $\theta = \text{Ker } \varphi$. В силу свойств многообразия включающего в себя алгебру \mathfrak{A} найдутся конгруэнции θ_1, θ_2 алгебр $\langle b_1 \rangle_{\mathfrak{A}}$ и $\langle b_2 \rangle_{\mathfrak{A}}$ соответственно такие, что $\theta = \theta_1 \cdot \theta_2$. Через $\nabla_{\mathfrak{A}} (\Delta_{\mathfrak{A}})$ обозначим наибольшую (наименьшую) конгруэнцию

алгебры \mathfrak{L} . Заметим что равенства $\theta_1 = \nabla_{\langle b_1 \rangle_{\mathfrak{A}}}$ и $\theta_2 = \nabla_{\langle b_2 \rangle_{\mathfrak{A}}}$ одновременно невозможны, т.к. в этом случае алгебра \mathfrak{A} должна содержать одноэлементную подалгебру, что противоречит ее Иhm-жесткости. Пусть $\theta_1 \neq \nabla_{\langle b_1 \rangle_{\mathfrak{A}}}$, так как $\theta = \theta_1 \cdot \theta_2 \leq \theta_1 \cdot \nabla_{\langle b_2 \rangle_{\mathfrak{A}}}$, то найдется гомоморфизм ψ алгебры $\langle f_B \rangle_{\mathfrak{A}^2}$ в алгебру \mathfrak{A}_0^2 с ядром вида $\theta_1 \cdot \nabla_{\langle b_2 \rangle_{\mathfrak{A}}}$. В силу Иhm-жесткости алгебры \mathfrak{A} это возможно лишь в случае когда $\theta_1 = \Delta_{\langle b_1 \rangle_{\mathfrak{A}}}$ и $\psi(f_B) = \langle b_1, b_1 \rangle$.

Заметим, что в силу тех же причин θ_2 равно либо $\Delta_{\langle b_2 \rangle_{\mathfrak{A}}}$, либо $\nabla_{\langle b_2 \rangle_{\mathfrak{A}}}$. При этом одновременные равенства $\theta_1 = \Delta_{\langle b_1 \rangle_{\mathfrak{A}}}$ и $\theta_2 = \Delta_{\langle b_2 \rangle_{\mathfrak{A}}}$ невозможны, т.к. в этом случае алгебры $\langle b_1 \rangle_{\mathfrak{A}}$ и $\langle b_2 \rangle_{\mathfrak{A}}$ изоморфны с помощью изоморфизма η такого, что $\eta(b_1) = b_2$. Последнее же в случае $b_1 \neq b_2$ противоречит Иhm-жесткости алгебры \mathfrak{A} . Тем самым, либо $\varphi(f_B) = \langle b_1, b_1 \rangle$, либо $\varphi(f_B) = \langle b_2, b_2 \rangle$ и теорема доказана. \square

REFERENCES

- [1] B. I. Plotkin, *Some concepts of algebraic geometry in universal algebra*, Algebra and Analysis, **9**:4 (1997), 224–248. Zbl 0920.08002
- [2] E. Yu. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Algebraic Geometry on Algebraic Structures, IV, Equational Domains and Codomains*, Algebra and Logic, **49**:6 (2010), 483–508.
- [3] A. G. Pinus, *On the lattices of algebraic subsets of universal algebras*, Algebra and model theory, 8, Collection of papers, NSTU, Novosibirsk, 2011, 60–66. Zbl 1299.03031
- [4] A. G. Pinus, *On the quasiorders induced by inner homomorphisms and the operator of algebraic closure*, Siberian Math. Journal, **56**:3 (2015), 499–504. MR3442807
- [5] A. G. Pinus, *n-algebraically complete algebras, pseudodirect products and algebraic closure operator*, Siberian Journal of Pure and Applied mathematics, **16**:4 (2016), 97–102.
- [6] A. G. Pinus, *Ihm-admissible and Ihm-forbidden quasiorders on sets*, Siberian Math. Journal, **57**:5(2016), 866–869. Zbl 06684756

ALEXANDER GEORGIEVICH PINUS
 NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
 PR. K. MARXA, 20,
 630073, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
 E-mail address: ag.pinus@gmail.com