S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 163–177 (2017) УДК 517.53

DOI 10.17377/semi.2017.14.017 MSC 30J05,30J10

ТЕПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ В СОБОЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ф.А. ШАМОЯН, В.А. БЕДНАЖ

Abstract. A complete description of the integrable functions h on the unit circle, for which the Toeplitz operator with symbol h is a bounded operator in weighted spaces of Sobolev type of analytic functions in a disc. An application is also installed results in matters of the factorization of analytic functions.

Keywords: Teoplitz operator, inner functions, linear functional, unit disc.

1. Введение

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости C, $T = \{z : |z| = 1\}$ — его граница. Обозначим через $H(D)$ - множество всех голоморфных в D функций, $H^p = H^p(D)$, $0 < p \leq +\infty$ — класс Харди в D. В работах [1,2] исследовалась ограниченность операторов Тёплица $T_h : f \to P(h \cdot f)$, где P — проектор Рисса, в весовых пространствах С. Л. Соболева аналитических в круге функций, то есть в пространствах

$$A^p_n(\alpha) = \{f \in H(D) : \|f\|_{A^p_n(\alpha)} = \int_D |D^n f(\zeta)|^p (1-|\zeta|)^\alpha dm_2(\zeta) < +\infty\},$$

где D^n — произведения n-го порядка типа Римана—Лиувилля функции f (см. [3]).

Shamoyan, F.A., Bednazh, V.A., Toeplitz operators in Sobolev spaces of analytic functions and applications.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (проект 1.1704.2014K).

Поступила 26 июня 2016 г., опубликована 6 марта 2017 г.

Если $n > \alpha + 1$, то оператор T_h является ограниченным оператором в пространстве $A_n(\alpha) := A_n^1(\alpha)$ тогда и только тогда, когда функция h на единичной окружности допускает представление

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2}(\zeta),\ \zeta \in T, \tag{1}$$

где $h_1 \in A_n(\alpha),\ h_2 \in H^\infty$ (см.[1,4]), в частности, если $h \in H^1(D)$, то оператор $T_{\bar{h}}$ будет ограниченным в пространстве $A_n(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $h \in H^\infty$. Однако, при $n = \alpha + 1$ условие $h \in H^\infty$ не обеспечивает ограниченность $T_{\bar{h}}$ в пространстве $A_n(\alpha)$, возникает дополнительное условие на функцию h. Необходимым и достаточным условием ограниченности оператора T_h в пространстве $A_n(n-1)$ является условие

$$\sup_{z\in D}\left\{|h^{'}(z)|(1-|z|)\ln\frac{1}{1-|z|}\right\} < +\infty. \tag{2}$$

Условие (2) в дальнейшем возникло в работах [5,6] при исследовании аналогичных вопросов, если учесть, что класс аналитических в D функций с граничными значениями из класса С. Л. Соболева совпадает с классом $A_2(0)$. В работе [7] исследовался случай $0 < p < 1$, тогда также возникает аналог оценки (2). Необходимым и достаточным условием ограниченности оператора T_h в пространстве $A_n^p(n-1)$ является условие

$$\sup_{z\in D}\left\{|h'(z)|(1-|z|)\ln^{\frac{1}{p}}\frac{1}{1-|z|}\right\} < +\infty. \tag{3}$$

Таким образом, дополнительное условие (3) на функцию h возникает при степенном весе $x \mapsto (1-x)^\alpha$, $x \in [0,1]$ только при $\alpha = n-1$, при нецелых α условие типа (3) отсутствует. Естественно возникает вопрос: появится ли условие типа (3), когда весовая функция нестепенная и какой вид примет условие в общем виде?

В данной статье мы рассмотрим весовые функции вида $\omega(1-x)(1-x)^{\alpha-1}$, где $x \in \Delta = [0,1]$, ω — функция типа модуля непрерывности, $\alpha \geq 0$, то есть в работе исследуется поведение операторов T_h в следующем пространстве типа Соболева:

$$A_n^p(\alpha,\omega) = \{f \in H(D) : \|f\|_{A_n^p(\alpha,\omega)} = \left(\int_D |D^n f(\zeta)|^p \omega(1-|\zeta|)(1-|\zeta|)^{\alpha-1} dm_2(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}, \quad 0 < p < 1,$$

где D^n — оператор типа Римана—Лиувилля, $dm_2(\zeta)$ - плоская мера Лебега на C.

Напомним, что если $f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$, то

$$D^\beta f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(m+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+1)} a_m z^m, D^{-\beta} f(z) = (\beta+1)\int_0^1 (1-t)^{\beta-1} f(tz)dt,$$

$z \in D,\ 0 \leq \beta < +\infty$ (см. [3]). Будет установлено, что дополнительное условие типа (3) возникает только при $n + 1 = \frac{\alpha+2}{p}$, при этом аналогом условия (3) является

$$\sup_{z\in D}\left\{\left|h^{(k)}(z)\right|(1-|z|)^k\left(\frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)\int_{(1-|z|)}^1\frac{\omega(u)}{u^2}du}\right)^{-\frac{1}{p}}\right\}<+\infty,\quad k\geq 1,$$

кроме того мы приведем приложения полученных результатов в задачах деления на внутреннюю функцию (см.[8]) в классах $A_n^p(\alpha,\omega)$.

2. Формулировка основных результатов и доказательство вспомогательных утверждений

Для формулировки основных результатов статьи введем следующие обозначения:

пусть $\Delta=[0,1]$, функцию ω, определенную на Δ, назовем функцией типа модуля непрерывности, если $\omega(t)$ — неотрицательная неубывающая функция на Δ, при этом $t\mapsto\frac{\omega(t)}{t}$ не возрастает на Δ, а также, если в определении пространства $A_n^p(\alpha,\omega)$ выполняется условие $\alpha=0$, то будем предполагать, что $\int_0^1\frac{\omega(u)}{u}du<+\infty$. Как обычно $\mathbf{R}_+=\{x:x\geq 0\}$, если $X,Y\in\mathbf{R}_+$, то символ $X\lesssim Y$ означает, что существуют положительное число A такое, что $X\leq AY$, а $X\approx Y$, если $X\lesssim Y$ и $Y\lesssim X$.

В дальнейшем также потребуется определение класса $\Lambda^p(\omega,\alpha)$ (см.[2]):

$$\Lambda^p\left(\omega,\alpha\right)=\{f\in H\left(D\right):\|f\|_{\Lambda^p(\omega,\alpha)}$$

$$=\sup\left(\left|D^{\beta+1}f\left(z\right)\right|\frac{\left(1-|z|\right)^{\beta+2-2/p}}{\left(\omega\left(1-|z|\right)\left(1-|z|\right)^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{p}}}\right)<+\infty,\quad\beta>\frac{\alpha+2}{p}.$$

Обозначим также через $L(X)=L(X,X)$ — множество всех ограниченных операторов в квазинормированном пространстве X, через $C_A(D)$ множество: $C_A(D)=H(D)\bigcap C(D\bigcup T)$.

Сформулируем основные результаты статьи.

Теорема 1. *Пусть $0<p\leq 1,\alpha\geq 0$, ω — функция типа модуля непрерывности на Δ, h — суммируемая функция на T,*

$$T_h(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f(\zeta)h(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta,\quad f\in C_A(\mathbf{D}),\quad z\in\mathbf{D}.$$

1) *Предположим, что n,p,α удовлетворяют соотношению $(n+1)>\frac{\alpha+2}{p}$, тогда следующие утверждения равносильны:*

a) $T_h\in L(A_n^p(\omega,\alpha))$;

b) h допускает представление $h(\zeta)=h_1(\zeta)+h_2(\zeta),\zeta\in T$, где h_1 — принадлежит пространству $A_n^p(\omega,\alpha)$, $h_2\in H^\infty$;

2) *Пусть $(n+1)<\frac{\alpha+2}{p}$ и сходится следующий интеграл*

$$\int_0^1\frac{\omega(u)du}{u^{p(n+1)-\alpha}}<+\infty,$$

$h \in H^1(D)$, тогда $T_{\bar h}$ действует в пространстве $A^p_n(\omega,\alpha)$, тогда и только тогда, когда $D^{-n}h \in \Lambda^p(\omega,\alpha)$, т. е.

$$\left|D^{m+1}\left(D^{-n}h\right)(z)\right| \le \frac{\left(\omega\left(1-|z|\right)\left(1-|z|\right)^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(1-|z|\right)^{m+2-2/p}}, \quad m > \frac{\alpha+2}{p}+n.$$

При $(n+1)p = \frac{\alpha+2}{p}$ справедливо следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть $0 < p \le 1$, $n+1 = \frac{\alpha+2}{p}$, $h \in H^1(D)$, тогда следующие утверждения равносильны*

a) $T_{\bar h} \in L(A^p_n(\omega,\alpha))$,

b) $h \in H^\infty$, при этом

$$\sup\left\{\left|h^{(k)}(t)\right|(1-|t|)^k\left(\int_{1-|t|}^1 \frac{\omega(u)}{u^2}du\frac{(1-|t|)}{\omega(1-|t|)}\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < +\infty, \quad k \ge 1.$$

Из Теорем 1 и 2 легко вывести следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $f \in H^1 \bigcap A^p_n(\omega,\alpha)$ и*

$$f(z) = z^\lambda B(z,z_k)S(z) \times \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln|f(e^{i\theta})|d\theta\right), \quad z \in D, \text{ —}$$

факторизационное представление функции f, где $B(z,z_k) = \Pi_{k=1}^{+\infty}\frac{z_k-z}{1-\overline{z_k}z}\frac{\overline{z_k}}{|z_k|}$ — произведение Бляшке, $S(z) = \exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\mu(\theta)\right)$ — сингулярная внутренняя функция. Тогда, если I - произвольная внутренняя функция, для которой $B \cdot S/I \in H^\infty(D)$, то f/I принадлежит классу $A^p_n(\omega,\alpha) \cap H^1$.

Предложение 1. *Аналоги теорем 1–3 при $1 < p < +\infty$ установлены в работе [9].*

Доказательство основных результатов опирается на несколько вспомогательных утверждений.

Пусть

$$f_{a,m}(z) = \frac{m!}{(1-\bar a z)^{m+1}}, \quad z \in D, \quad m \in \mathbf{Z}_+. \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть $h \in H^1$. Тогда*

а)

$$T_{\bar h}(f_{a,m})(z) = \sum_{k=0}^{m}\frac{C^k_m\overline{h^{(k)}_m(a)}z^{m-k}}{(1-\bar a z)^{m-k+1}}, \tag{5}$$

где $h_m(z) = z^m h(z), z \in \mathbf{D}$.

б) *справедлива оценка*

$$\|T_{\bar h}(f_{a,m})\|_{A^p_n(\omega,\alpha)} \lesssim \left(\sum_0^m |h^{(k)}_m(a)|^p\int_{1-|a|}^1\frac{\omega(u)du}{u^{p(m+n+1)-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. а) Имеем

$$T_{\bar h}(f_{a,m})(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f_a(\zeta)\bar h(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta = \overline{\frac{m!}{2\pi i}\int_T\frac{h(\zeta)}{(\bar\zeta-\bar z)(1-a\bar\zeta)^{m+1}}d\bar\zeta}$$

$$= \overline{\left(\frac{h_m(\zeta}{1-\bar{z}\zeta}\right)^{(m)}}|_{\zeta=a} = \sum_{k=0}^{m} \frac{C_m^k \overline{h_m^{(k)}(a)} z^{m-k}}{(1-\bar{a}z)^{m-k+1}}. \tag{6}$$

Перейдем к доказательству пункта б).

Положим $F_a(z) = T_{\bar{h}}(f_{a,m})(z)$, тогда с учетом равенства (6)

$$F_a^{(n)}(z) = T_{\bar{h}}^{(n)}(f_{a,m})(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{C_m^k \overline{h_m^{(k)}(a)} z^{m-k}(m-k+1)\dots(m-k+n)}{(1-\bar{a}z)^{m-k+1+n}} =$$

$$:= \sum_{k=0}^{m} \frac{\bar{C}_m^k \overline{h_m^{(k)}(a)} P_{m-k}(z)}{(1-\bar{a}z)^{m-k+1+n}}, \tag{7}$$

где $\bar{C}_m^k = C_m^k(m-k+1)\dots(m-k+n)$, $P_{m-k}(z)$ - некоторый многочлен степени не выше $m-k$.

Напомним теперь, что

$$\|F_a\|_{A_n^p(\omega,\alpha)} := \left(\int_D |F_a^{(n)}(z)|^p \omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1} dm_2(z)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_D \left|\sum_{k=0}^{m} \frac{\bar{C}_m^k \overline{h_m^{(k)}(a)} P_{m-k}(z)}{(1-\bar{a}z)^{m-k+1+n}}\right|^p \omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1} dm_2(z)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim \sum_{k=0}^{m} \bar{C}_m^k |h_m^{(k)}(a)|^p \left(\int_D \omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1} \frac{dm_2(z)}{|1-\bar{a}z|^{m-k+1+n}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{8}$$

Перейдем к оценке интеграла в (8). Положим

$$I_k = \left(\int_D \omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1} \frac{dm_2(z)}{|1-\bar{a}z|^{m-k+1+n}}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 \le k \le m.$$

Тогда

$$I_k^p = \int_0^1 \omega(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1-\bar{a}\rho\, e^{i\theta}|^{p(m-k+1+n)}}, \quad 0 \le k \le m.$$

Будем предполагать, что $n \ge 1$, так как при $n = 0$ описание символов более простое, тогда $p(m-k+1+n) \ge p(1+n), 0 \le k \le m$. Следовательно, если $p(n+1) > 1$, то

$$I_k^p \approx \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha-1} d\rho}{|1-\bar{a}\rho|^{p(m-k+1+n)-1}} = \int_0^{1-|a|} \frac{\omega(u)(u)^{\alpha-1} du}{(1-|a|+|a|u)^{p(m-k+1+n)-1}}$$

$$+ \int_{1-|a|}^{1} \frac{\omega(u)(u)^{\alpha-1} du}{(1-|a|+|a|u)^{p(m-k+1+n)-1}}. \tag{9}$$

Теперь заметив, что $\omega(u)$ неубывающая функция на $[0;1]$, получаем

$$\int_0^{1-|a|} \frac{\omega(u)(u)^{\alpha-1} du}{(1-|a|+|a|u)^{p(m-k+1+n)-1}} \le \frac{\omega(1-|a|)(1-|a|)^{\alpha}}{(1-|a|)^{p(m-k+1+n)-1}}$$

$$= \frac{\omega(1-|a|)}{(1-|a|)^{p(m-k+1+n)-1-\alpha}}. \tag{10}$$

Докажем, что

$$\int_{1-|a|}^{1}\frac{\omega(u)(u)^{\alpha-1}du}{(1-|a|+|a|u)^{p(m-k+1+n)-1}}\geq\frac{\omega(1-|a|)}{(1-|a|)^{p(m-k+1+n)-1-\alpha}}. \tag{11}$$

Действительно,

$$\int_{1-|a|}^{1}\frac{\omega(u)(u)^{\alpha-1}du}{(1-|a|+|a|u)^{p(m-k+1+n)-1}}\geq c\omega(1-|a|)\int_{1-|a|}^{1}\frac{u^{\alpha-1}du}{u^{p(m-k+1+n)-1}}$$

$$=c\omega(1-|a|)\int_{1-|a|}^{1}\frac{du}{u^{p(m-k+1+n)-1-\alpha}}\geq\geq c_1\frac{\omega(1-|a|)}{(1-|a|)^{p(m-k+1+n)-1-\alpha}}.$$

Чтобы получить оценку (11) остается отдельно анализировать следующие случаи:

i) $p(m-k+1+n)-\alpha>1$,

ii) $p(m-k+1+n)-\alpha=1$,

iii) $p(m-k+1+n)-\alpha<1$.

Нетрудно видеть, что при всех условиях i)–iii) всегда выполняется неравенство (11). Поэтому

$$I_k^p\leq c_2\int_{1-|a|}^{1}\frac{\omega(u)du}{u^{p(m-k+n+1)-\alpha}}.$$

Обратная оценка следует из равенства (9).

Таким образом,

$$c_1\int_{1-|a|}^{1}\frac{\omega(u)du}{u^{p(m-k+n+1)-\alpha}}\leq I_k^p\leq c_2\int_{1-|a|}^{1}\frac{\omega(u)du}{u^{p(m-k+n+1)-\alpha}}. \tag{12}$$

Следовательно, учитывая неравенство (8), получаем

$$\|F_a\|_{A_n^p(\omega,\alpha)}\leq c_1\left(\sum_0^m|h_m^{(k)}(a)|^p\int_{1-|a|}^{1}\frac{\omega(u)du}{u^{p(m+n+1)-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}},$$

или

$$\|F_h(f_{a,m})\|_{A_n^p(\omega,\alpha)}\leq c_1\left(\sum_0^m|h_m^{(k)}(a)|^p\int_{1-|a|}^{1}\frac{\omega(u)du}{u^{p(m+n+1)-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{13}$$

где $h_m(z)=z^m h(z), z\in\mathbf{D}$.

$\square$

Из леммы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть $f_{a,m}$ определяется по равенству (4), тогда*

$$\|f_{m,a}\|_{A_n^p(\omega,\alpha)}\approx\left(\int_{1-|a|}^{1}\frac{\omega(u)du}{u^{p(m+n+1)-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}},$$

если $p(m+n+1)-\alpha>1$.

Доказательство. Доказательство верхней оценки сразу следует из леммы 1, поскольку $h(z)=1$, поэтому $h^{(k)}(z)=0, k\geq 1$. Нижняя оценка следует из оценки (12), поскольку при $p(m+n+1)>1$

$$\|f\|_{A_n^p(\omega,\alpha)}\approx I_0\approx\left(\int_{1-|a|}^{1}\frac{\omega(u)du}{u^{p(m+n+1)-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, если

$$f_{a,m}(z) = \frac{\left(\int_{1-|a|}^{1} \frac{\omega(u)du}{u^{p(m+n+1)-\alpha}}\right)^{-\frac{1}{p}}}{(1-\bar{a}z)^{m+1}},$$

то

$$0 < c_1 \leq \|f_{a,m}\|_{A^p_n(\omega,\alpha)} < c_2 < +\infty$$

при всех p, α, m, n. Поэтому, если оператор $T_{\bar{h}}$ действует в пространстве $A^p_n(\omega, \alpha)$, то

$$\|T_{\bar{h}}(f_{a,m})\|_{A^p_n(\omega,\alpha)} \leq \|T_{\bar{h}}\| \times \|(f_{a,m})\|_{A^p_n(\omega,\alpha)} \leq c_2\|T_{\bar{h}}\|. \qquad (14)$$

□

Следующие утверждения установлены в работах [4, 10].

Лемма 2. *Пусть Φ - линейный непрерывный функционал на*

$$A^p_0(\omega, \alpha) := A^p(\omega, \alpha), 0 < p \leq 1, e_z(\zeta) = \frac{1}{1 - z\zeta}, z, \zeta \in D,$$

тогда $g(z) = \Phi(e_z)$ принадлежит классу $\Lambda^p(\omega, \alpha)$ при этом

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_T f(\rho\zeta) g(\rho\bar{\zeta})|d\zeta|. \qquad (15)$$

$$\|\Phi\| \approx \|g\|_{\Lambda^p(\omega,\alpha)}. \qquad (16)$$

И обратно, если функция $g \in \Lambda^p(\omega, \alpha)$, то она порождает линейный непрерывный функционал на $A^p(\omega, \alpha)$, задаваемый формулой (16), для которой справедлива оценка (17).

Лемма 3. *Если $h \in H^1$, при этом $T_{\bar{h}} \in L(A^p_n(\omega, \alpha))$, то $h \in H^\infty$.*

Лемма 4. *Пусть $n+1 > \frac{\alpha+2}{p}$, тогда класс $A^p_n(\omega, \alpha)$ является кольцом относительно операторов умножения и сложения.*

Лемма 5. *Пусть $k, m \in N$, $m > \frac{\alpha+1}{p}$, $f \in A^p_n(\omega, \alpha)$ тогда существует многочлен P порядка не выше $m - n + 1$ такой, что*

$$f(z) = \int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^m D^n f(\zeta)}{(1-z\bar{\zeta})^{m+2-n}} P(z\bar{\zeta}) dm_2(\zeta), z \in D.$$

Лемма 6. *Пусть u - неотрицательная субгармоническая функция в D причем $\int\limits_D (1-|\zeta|)^s u(\zeta) dm_2(\zeta) < +\infty$. Тогда если $0 < p \leq 1$, $m > \frac{s}{p}$, то*

$$\left(\int_D (1-|\zeta|)^m u(\zeta) dm_2(\zeta)\right)^p \lesssim \int_D (1-|\zeta|)^{mp} u^p(\zeta) dm_2(\zeta).$$

Лемма 7. *Пусть $n \geq 0$, тогда следующие утверждения равносильны*

1) $D^{-n}h \in \Lambda^p_\omega$
2) $\left|D^{m+1}h(z)\right| < \frac{const(\omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1})^{1/p}}{(1-|z|)^{m+2+n-2/p}}, \quad z \in D, \quad m > n + \frac{\alpha+2}{p}.$

Доказательство этой леммы получается аналогично доказательству леммы 5 из работы [7] , поэтому приводим её без доказательства.

Лемма 8. *Пусть $p(n+1) < \alpha + 2, h \in H(D)$ такая, что $D^{-n}h \in \Lambda^p_\omega$ тогда $h \in H^\infty(D)$.*

Доказательство. Учитывая лемму 7, имеем

$$\left|D^{m+1}h(z)\right| \lesssim \frac{C(\omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1})^{1/p}}{(1-|z|)^{m+2+n-2/p}}.$$

Теперь, воспользуемся равенством $h(z) = (m+2)\int_0^1 (1-t)^m D^{m+1}h(tz)dt$, получаем

$$|h(z)| \lesssim \int_0^1 \frac{(1-t)^m(\omega(1-t|z|)(1-t|z|)^{\alpha-1})^{1/p}}{(1-t|z|)^{m+2+n-2/p}}dt := I_m.$$

Применяя рассуждения приведенные при доказательстве леммы 1 (оценки (9)–(12)), получаем

$$I_m(z) \approx \int_{(1-|z|)}^1 \frac{u^m(\omega(u))^{1/p}}{u^{m+2+n-(\alpha+1)/p}}du = \int_{(1-|z|)}^1 \frac{(\omega(u))^{1/p}}{u^{2+n-(\alpha+1)/p}}du.$$

В последнем интеграле применим следующее простое утверждение.

Лемма 9. *Пусть* ω *— функция типа модуля непрерывности (или монотонно растущая неотрицательная функция такая, что* $\omega(2u) \le c_0\omega(u), u \in [0;1]$ *на* $[0;2]$*),* $0 < p \le 1$*, тогда справедлива оценка*

$$\left(\int_a^1 \frac{(\omega(u))^{1/p}}{(u)^{2+n-(\alpha+1)/p}}du\right)^p \le \int_a^1 \frac{\omega(u)}{u^{p(1+n)-\alpha-1}}du, \quad 0 < a < 1. \tag{17}$$

Применяя оценку (17), получим

$$I_m^p(z) \le \int_0^1 \frac{\omega(u)}{u^{p(n+1)-\alpha-1}}du. \tag{18}$$

Так как ω — функция типа модуля непрерывности, то при $n+1 < \frac{\alpha+2}{p}$ интеграл (18) будет сходится. Таким образом $I_m(z) \le const, z \in D$ и $h \in H^\infty(D)$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем первый пункт теоремы.

Докажем импликацию а)$\Rightarrow$ б). Пусть $T_h \in L(A_n^p(\omega,\alpha))$, тогда функция $T_h(f) \in A_n^p(\omega,\alpha)$ для произвольной $f \in A_n^p(\omega,\alpha)$. Поэтому

$$T_h(f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(\zeta)h(\zeta)|d\zeta|$$

является линейным непрерывным функционалом на $A_n^p(\omega,\alpha)$.

Используя лемму 2 и применяя методику доказательства теоремы 2 из работы [4], получим представление из пункта б), т. е существует $g \in \Lambda_\omega^p$ такая, что

$$T_{\bar{h}}(f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(\zeta)h(\zeta)|d\zeta| = \lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D^n f(\rho e^{i\varphi})\overline{g(\rho e^{i\varphi})}d\varphi,$$

поэтому $h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \zeta \in T$, где $h_1 = T_h(1) \in A_n^p(\omega,\alpha)$, $D^{-n}h_2(z) = g(z), z \in D$.

Следовательно,

$$T_h(f(z)) = f(z)h_1(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\zeta)\overline{h_2(\zeta)}}{(\zeta - z)}d\zeta = f(z)h_1(z) + T_{\overline{h}_2}(f)(z), \quad z \in \mathbf{D}.$$

В условиях пункта а) по лемме 4 $A_n^p(\omega,\alpha)$ является кольцом относительно оператора умножения и сложения, поэтому оператор $M_{h_1} = h_1 f$, $f \in A_n^p(\omega,\alpha)$ является ограниченным оператором. Следовательно, если $T_h \in L(A_n^p(\omega,\alpha))$, то $T_{\overline{h}_2} \in L(A_n^p(\omega,\alpha))$.

Используя лемму 2, получим нужное представление и тем самым импликация а)$\Rightarrow$ б) установлена.

Докажем обратную импликацию. Учитывая выше указанные рассуждения, достаточно доказать ограниченность $T_{\bar{h}_2}$ в $A^p_n(\omega,\alpha)$. Используя лемму 5, имеем

$$f(z) = c(n,m)\int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^m D^n f(\zeta)}{(1-z\bar{\zeta})^{m+2-n}} P(z\bar{\zeta})dm_2(z),$$

следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_D \frac{f(\zeta)g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{k=0}^{m+1-n}\int_D (1-|t|^2)^m D^m f(t)\overline{h^{(k)}(t)}P(t,z)\frac{dm_2(t)}{(1-\bar{t}z)^{m-k+2-n}}.$$

Поэтому

$$|D^n T_{\bar{h}}(f)(z)| \approx \left|\sum_{k=0}^{m+1-n}\int_D (1-|t|^2)^m D^m f(t)\overline{h^{(k)}(t)}P_1(t,z)\frac{dm_2(t)}{(1-\bar{t}z)^{m-k+2}}\right|.$$

Для доказательства теоремы достаточно установить, что оператор

$$B_h(\psi)(z) = \int_D (1-|t|^2)^m \overline{h^{(k)}(t)}\psi(t)\frac{dm_2(t)}{(1-\bar{t}z)^{m-k+2}} \qquad (*)$$

действует в пространстве $A^p_0(\omega,\alpha)$ при условии $D^{-n}h \in \Lambda^p_\omega, 1+n > \frac{\alpha+2}{p}$, $0 \le k \le m+1-n$. Используя лемму 6, получим

$$|B_h(\psi)(z)|^p \lesssim \int_D (1-|z|)^{p(m+2)-2}|h^{(k)}(t)|^p|\psi(t)|^p\frac{dm_2(z)}{|1-\bar{t}z|^{(m-k+2)p}}.$$

Поэтому

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \le \int_D \omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1}$$
$$\times \int_D (1-|t|)^{p(m+2)-2}|h^{(k)}(t)|^p|\psi(t)|^p\frac{dm_2(t)dm_2(z)}{|1-\bar{t}z|^{(m-k+2)p}}.$$

Переставляя порядок интегрирования, получаем

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \le \int_D |\psi(t)|^p|h^{(k)}(t)|^p(1-|t|^2)^{p(m+2)-2}$$
$$\times \int_D \omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1}\frac{dm_2(z)dm_2(t)}{|1-\bar{t}z|^{(m-k+2)p}}. \qquad (19)$$

Пусть

$$I_k(t) = \int_D \omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1}\frac{dm_2(z)}{|1-tz|^{(m-k+2)p}},$$

где $0 \le k \le m+1-n$, т.е. $m+2-k \ge n+1$, поэтому $p(m+2-k) \ge p(n+1) > \alpha+2$, следовательно $p(m+2-k) > 2$, тогда

$$I_k(t) \approx \int_0^1 \omega(u)u^{\alpha-1}\frac{du}{(1-|t|+u|^{(m-k+2)p-1}}.$$

Из (19) получим

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \le \int_D |\psi(t)|^p|h^{(k)}(t)|^p(1-|t|^2)^{p(m+2)-2}I_k(t)dm_2(t).$$

При этом по оценке (12)

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \leq \int_D |\psi(t)|^p |h^{(k)}(t)|^p (1-|t|^2)^{p(m+2)-2} \times$$
$$\times \int_{1-|t|}^1 \omega(u) \frac{du dm_2(t)}{u^{(m-k+2)p-\alpha}} \tag{20}$$

Но поскольку $0 \leq k \leq m+1-n$, то $m+2-k \geq n+1$, т. е. $p(m+2-k)-\alpha \geq p(n+1)-\alpha$. Тогда по условию $p(m+2-k)-\alpha > 2$ при всех $0 \leq k \leq m+1-n$, поэтому

$$\int_{1-|t|}^1 \omega(u) \frac{du}{u^{(m-k+2)p-\alpha}} \leq \frac{\omega(1-|t|)}{(1-|t|)} \int_{1-|t|}^1 \frac{du}{u^{(m-k+2)p-\alpha-1}}$$
$$\approx \frac{\omega(1-|t|)}{(1-|t|)^{(m-k+2)p-\alpha-1}}.$$

Следовательно, из (20) приходим к неравенству

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \lesssim \int_D |\psi(t)|^p |h^{(k)}(t)|^p \omega(1-|t|)(1-|t|)^{pk-1+\alpha} dm_2(t).$$

Используя, что функция $h_2 \in H^\infty$, получаем

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \lesssim \int_D |\psi(t)|^p |h^{(k)}(t)|^p \omega(1-|t|)(1-|t|)^{pk-1+\alpha} dm_2(t)$$
$$\lesssim \int_D |\psi(t)|^p \omega(1-|t|)(1-|t|)^{\alpha-1} dm_2(t).$$

и тем самым импликация б)$\Rightarrow$ а) первого пункта доказана.

Перейдем к доказательству второго пункта.

Проверим соответствующие оценки для интеграла (*): при $0 \leq k \leq m+1-n$, $p(m+2-k) \geq p(1+n) < \alpha+2$, т.е. $i) p(m+2-k) > 2$. Тогда

$$I_k(t) \approx \int_0^1 \omega(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha-1} \frac{d\rho}{(1-\rho r)^{(m-k+2)p-1}}$$
$$= \int_0^1 \omega(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha-1} \frac{d\rho}{(1-\rho+\rho(1-r))^{(m-k+2)p-1}} \approx \int_0^r + \int_r^1 = I_k^1 + I_k^2.$$

Оценим: $I_k^1 = \int_{1-r}^1 \omega(u) u^{\alpha-1} \frac{du}{u^{(m-k+2)p-1}} = \int_{1-r}^1 \omega(u) \frac{du}{u^{(m-k+2)p-\alpha}}$;
$I_k^2 \approx \int_0^{1-r} \omega(u) u^{\alpha-1} \frac{du}{(u+(1-r))^{(m-k+2)p-1}} \approx \frac{\omega(1-r)(1-r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{(m-k+2)p-1}} =$
$= \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{(m-k+2)p-\alpha-1}}$.

Следующий случай $i_1) p(m+2-k)-\alpha > 1$, тогда $I_k = \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{(m-k+2)p-\alpha-1}}$. Следовательно,

$$\int_D (1-|t|)^{p(m+2)-2} |h^{(k)}(t)|^p \int_D \frac{\omega(1-|t|)(1-|t|)^{\alpha-1}}{(1-|t|)^{p(m+2-k)-2}} dm_2(t)$$
$$\approx \int_D |\psi(t)|^p |h^{(k)}(t)|^p \omega(1-|t|)(1-|t|)^{pk-1+\alpha} dm_2(t)$$

Теперь рассмотрим случай $i_2) p(m+2-k)-\alpha = 1$, тогда имеем

$$I_k \approx \int_{1-r}^1 \omega(u) u^{\alpha-1} \frac{du}{u^{(m-k+2)p-1}} + \int_0^{1-r} \omega(u) u^{\alpha-1} \frac{du}{(u+(1-r))^{(m-k+2)p-1}}$$

$$\approx \int_{1-r}^{1} \omega(u) \frac{du}{u^{(m-k+2)p-\alpha}} + \int_{0}^{1-r} \omega(u) u^{\alpha-1} \frac{du}{(1-r)^{(m-k+2)p-1}}$$

$$\approx \int_{1-r}^{1} \omega(u) \frac{du}{u} + \frac{\omega(1-r)(1-r)^{\alpha}}{(1-r)^{(m-k+2)p-1}} =$$

$$= \int_{1-r}^{1} \omega(u) \frac{du}{u} + \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{(m-k+2)p-\alpha-1}} = \int_{1-r}^{1} \omega(u) \frac{du}{u} + \omega(1-r) \leq 2 \int_{1-r}^{1} \omega(u) \frac{du}{u}.$$

В итоге получаем

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)}$$

$$\lesssim \int_D |\psi(t)|^p |h^{(k)}(t)|^p (1-|t|)^{p(m+2)-2} dm_2(t) \times \int_{1-r}^{1} \omega(u) \frac{du}{u}. \tag{21}$$

Из условия i_2) имеем $m = \frac{\alpha+1}{p} + k - 2$, подставляя выражение для m, в (21) и учитывая, что $h_2 \in H^\infty$ получаем

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \lesssim \int_D |\psi(t)|^p (1-|t|)^{\alpha-1} \omega(1-|t|) \times \int_{1-|t|}^{1} \omega(u) \frac{du dm_2(t)}{u^2}.$$

Так как $\frac{\omega(t)}{t}$ убывает на $(0,1]$, получаем

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \lesssim \int_D |\psi(t)|^p (1-|t|)^{\alpha-1} \omega(1-|t|)(1-|t|) \times \int_{1-|t|}^{1} \omega(u) \frac{du dm_2(t)}{u}$$

$$\lesssim \int_D |\psi(t)|^p (1-|t|)^{\alpha-1} \omega(1-|t|)(1-|t|) \ln \frac{1}{1-|t|} dm_2(t)$$

$$\lesssim \int_D |\psi(t)|^p (1-|t|)^{\alpha-1} \omega(1-|t|) dm_2(t) = \|\psi(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)}.$$

Рассмотрим теперь случай i_3) $p(m+2-k) - \alpha < 1$. В таком случае $I_k \lesssim 1$, тогда

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \lesssim \int_D |\psi(t)|^p |h^{(k)}(t)|^p (1-|t|)^{p(m+2)-2} dm_2(t). \tag{22}$$

Поэтому, так как $k > m + 2 - \frac{\alpha+1}{p}$ и $0 \leq k \leq m+1-n$, то по лемме 7

$$|h^{(k)}(t)|^p \lesssim \frac{\omega(1-|t|)(1-|t|)^{\alpha-1}}{(1-|t|)^{p(k+1+n)-2}}.$$

Следовательно, из (22) получаем

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \lesssim \int_D |\psi(t)|^p (1-|t|)^{p(m+2)-2} \frac{\omega(1-|t|)(1-|t|)^{\alpha-1}}{(1-|t|)^{p(k+1+n)-2}} dm_2(t)$$

$$= \int_D |\psi(t)|^p (1-|t|)^{\alpha-1} \omega(1-|t|)(1-|t|)^{p(m+2-k-1-n)} dm_2(t).$$

Так как ввиду оценки $0 \leq k \leq m+1-n$ выполняется $m-k-n+1 \geq 0$, то последний интеграл оценивается

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \lesssim \int_D |\psi(t)|^p (1-|t|)^{\alpha-1} \omega(1-|t|) dm_2(t).$$

Таким образом, импликация б)$\Rightarrow$ а) второго пункта полностью доказана при условии $p(m+2-k) > 2$, если же $p(m+2-k) \leq 2$, то достаточно применить рассуждения приведенные выше и воспользоваться леммой 6.

□

Доказательство теоремы 2. Метод доказательства аналогичен доказательству Теоремы 1. Нужно проверить соответствующие оценки: при $k = m+1-n$ $p(m+2-k) = p(1+n) = \alpha+2$, т.е.

$$p(m+2-k) - \alpha = 2 \qquad (23),$$

а при остальных $k < m+1-n$, получим

$$p(m+2-k) - \alpha > 2 \qquad (24).$$

При условии (24) доказано. Поэтому рассмотрим (23):

$$I_k \approx \int_{1-|t|}^{1} \omega(u) u^{\alpha-1} \frac{du}{u^{(m-k+2)-1}} \approx \int_{1-|t|}^{1} \omega(u) \frac{du}{u^2},$$

тогда оценка (20) примет вид

$$\int_D |\psi(t)|^p (1-|t|)^{p(m+2)-2} |h^{(k)}(t)|^p \int_{1-|t|}^{1} \omega(u) \frac{du}{u^2} dm_2(t)$$

$$= \int_D |\psi(t)|^p (1-|t|)^{2+\alpha+pk-2} |h^{(k)}(t)|^p \int_{1-|t|}^{1} \omega(u) \frac{du}{u^2} dm_2(t) \qquad (25).$$

Поэтому если

$$(1-|t|)^{\alpha+pk} |h^{(k)}(t)|^p \int_{1-|t|}^{1} \omega(u) \frac{du}{u^2} \lesssim \omega(1-|t|)(1-|t|)^{\alpha-1}, \qquad (26)$$

то из неравенства (25) получим

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \lesssim \int_D |\psi(t)|^p \omega(1-|t|)(1-|t|)^{\alpha-1} dm_2(t)$$

и теорема 2 будет доказана.

Оценка (26) равносильна

$$\left| h^{(k)}(t) \right|^p \lesssim \frac{\omega(1-|t|)}{(1-|t|)^{1+kp} \int_{(1-|t|)}^{1} \frac{\omega(u)}{u^2} du}.$$

Поэтому получим

$$\left| h^{(k)}(t) \right| \lesssim \frac{1}{(1-|t|)^k} \left(\frac{\omega(1-|t|)}{(1-|t|) \int_{(1-|t|)}^{1} \frac{\omega(u)}{u^2} du} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad t \in D. \qquad (*)$$

Если же $k < m+1-n$, то

$$p(m+2-k) > p(m+2-m-1+n) = p(n+1). \qquad (27)$$

Доказательство этого случая повторяет случай, когда $n+1 > \frac{\alpha+2}{p}$.

Перейдем к рассмотрению случая $n+1 < \frac{\alpha+2}{p}$. Снова применим оценку (21), учитывая (27). По оценке (21)

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \le \int_D |\psi(t)|^p |h^{(k)}(t)|^p (1-|t|^2)^{p(m+2)-2} \times$$

$$\times \int_{1-|t|}^{1} \omega(u) \frac{du dm_2(t)}{u^{(m-k+2)p-\alpha}}, \quad 0 \le k \le m+1-n. \qquad (28)$$

Рассмотрим следующие возможности i_1: $2 < (m+2-k)p-\alpha$, i_2: $2 = (m+2-k)p-\alpha$.

i_1: из (28) получаем

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)}$$
$$\leq \int_D |\psi(t)|^p |h^{(k)}(t)|^p (1-|t|^2)^{p(m+2)-2} \omega(1-|t|) \frac{dt}{(1-|t|)^{(m-k+2)p-\alpha-1}}$$
$$\lesssim \int_D |\psi(t)|^p |h^{(k)}(t)|^p (1-|t|)^{pk} \omega(1-|t|)^{\alpha-1} dm_2(t).$$

Но учитывая, что $h \in H^\infty$, получим

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \leq \|\psi(z)\|_{A^p(\omega,\alpha)}.$$

i_2: из (28) получаем

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)}$$
$$\leq \int_D |\psi(t)|^p |h^{(k)}(t)|^p (1-|t|)^{p(m+2)-2} \times \int_{1-|t|}^1 \omega(u) \frac{du dm_2(t)}{u^2}, \tag{29}$$

тогда если

$$|h^{(k)}(t)|^p (1-|t|)^{p(m+2)-2} \int_{1-|t|}^1 \omega(u) \frac{du}{u^2} \lesssim \omega(1-|t|)(1-|t|)^{\alpha-1}. \tag{30}$$

Тогда из (29) имеем

$$\|B_h(\psi)(z)\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \leq \int_D |\psi(t)|^p \omega(1-|t|)(1-|t|)^{\alpha-1} dm_2(t).$$

Перейдем к анализу оценки (*), которая эквивалентна

$$\left|h^{(k)}(t)\right| \lesssim \frac{1}{(1-|t|)^{m+2-2/p}} \left(\frac{\omega(1-|t|)(1-|t|)^{\alpha-1}}{\int_{(1-|t|)}^1 \frac{\omega(u)}{u^2} du} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{31}$$

Из условия i_2 имеем $m+2-2/p = \alpha/p + k$. Из (31) имеем

$$\left|h^{(k)}(t)\right| \lesssim \frac{1}{(1-|t|)^{k+2/p}} \left(\frac{\omega(1-|t|)(1-|t|)^{\alpha-1}}{\int_{(1-|t|)}^1 \frac{\omega(u)}{u^2} du} \right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \frac{1}{(1-|t|)^k} \left(\frac{\omega(1-|t|)}{(1-|t|) \int_{(1-|t|)}^1 \frac{\omega(u)}{u^2} du} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{32}$$

Перейдем к доказательству необходимости условия (*).

Для этого положим

$$f_a(z) = \frac{C(a)}{(1-\bar{a}z)^2}, z \in \mathbf{D},$$

где $C(a)$ выбрана таким образом, чтобы $\|f_a\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} \leq 1$. Имеем

$$\|f_a\|^p_{A^p(\omega,\alpha)} = \int_D \omega(1-|z|)(1-|t|)^{\alpha-1} |f_a^{(n)}(z)|^p dm_2(z)$$
$$= \int_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{\alpha-1} \int_\pi^{-\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}a|^{p(n+2)}} dr$$
$$\approx \int_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{\alpha-1} \frac{dr}{(1-r|a|)^{p(n+2)-1}} \approx \int_{1-|a|}^1 \omega(u) \frac{du}{u^{p(n+2)-\alpha}}$$

$$= \int_{1-|a|}^{1} \omega(u) \frac{du}{u^{2+p}} = \frac{\omega(1-|a|)}{(1-|a|)^{1+p}},$$

т. е. достаточно

$$C(a) = \frac{(1-|a|)^{1+1/p}}{(\omega(1-|a|))^{1/p}} = \frac{1}{(1-|a|)^{-1}} \left(\frac{1-|a|}{\omega(1-|a|)}\right)^{1/p},$$

таким образом,

$$f_a(z) = (1-|a|) \left(\frac{1-|a|}{\omega(1-|a|)}\right)^{1/p} \frac{1}{(1-\bar{a}z)^2}.$$

Теперь вычислим

$$T_{\bar{h}}(z) = \frac{C(a)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{h(e^{i\theta})} e^{i\theta} i d\theta}{(e^{i\theta}-z)(1-\bar{a}e^{i\theta})^2}$$

$$= \left(\frac{h(\zeta)\zeta}{1-\zeta\bar{z}}\right)^{(1)}_{\zeta=a} C(a) = C(a) \left[\frac{h^{(1)}(a)a}{1-z\bar{a}} + \frac{\overline{h(a)}}{(1-z\bar{a})^2}\right],$$

тогда

$$F^{(n)} = C(a) n! \left[\frac{h^{(1)}(a)a}{(1-z\bar{a})^{n+1}} + \frac{\overline{h(a)}(n+1)}{(1-z\bar{a})^{n+2}}\right] = g_1 + g_2.$$

Тогда

$$\|g_1\|^p_{A^p_n} \le \|T_{\bar{h}}(f_a)\|^p_{A^p_n} + \|g_2\|^p_{A^p_n},$$

т. е.

$$\frac{h^{(1)}(a)\, a}{(1-z\bar{a})^{n+1}} = F^{(n)}(z) - \frac{h(a)\,(n+1)}{(1-z\bar{a})^{n+2}} C(a)\, n!,$$

поэтому

$$\left|h^{(1)}(a)\right|^p C(a)^p \int_D \frac{\omega(1-|\zeta|)(1-|\zeta|)^{\alpha-1}}{\left|1-a\bar{\zeta}\right|^{p(n+1)}} dm_2(\zeta) \lesssim \|T_{\bar{h}}\|^p \|f_a\|^p_{A^p_n(\omega,\alpha)}$$
$$+ \frac{\omega(1-|a|)\, C(a)^p}{(1-|a|)^{p+1}}.$$

Следовательно,

$$\left|h^{(1)}(a)\right|^p C(a)^p \int_{1-|a|}^{1} \frac{\omega(u)}{u^2} du \lesssim 1 + \frac{\omega(1-|a|)\, C(a)^p}{(1-|a|)^{p+1}}.$$

Отсюда получаем

$$\left|h^{(1)}(a)\right| \lesssim \frac{1}{C(a) \left(\int_{1-|a|}^{1} \frac{\omega(u)}{u^2} du\right)^{\frac{1}{p}}} + \frac{1}{\left(\int_{1-|a|}^{1} \frac{\omega(u)}{u^2} du\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{\omega(1-|a|)}{(1-|a|)^{1+p}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Итак,

$$\left|h^{(1)}(a)\right| \le const \frac{1}{\left(\int_{1-|a|}^{1} \frac{\omega(u)}{u^2} du\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{\omega(1-|a|)}{(1-|a|)^{1+p}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Используя формулу Коши по окружности

$$K_{\frac{1}{2}}(a) = \left\{\zeta : |\zeta - a| = \frac{1}{2}(1-|a|)\right\},$$

получим

$$\left|h^{(k)}(a)\right| \lesssim \frac{1}{(1-|a|)^k}\left(\frac{\omega(1-|a|)}{(1-|a|)\int_{(1-|a|)}^{1}\frac{\omega(u)}{u^2}du}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Доказательство теоремы 3. Пусть $f \in A_n^p(\omega,\alpha)\bigcap H^1(D)$ при этом

$$f(z) = B(z,z_k)S(z)Q(z)$$

факторизационное представление функции f, и предположим, что $BS/I \in H^\infty(D)$. Докажем, что

$$f/I \in A_n^p(\omega,\alpha)\bigcap H^1(D).$$

Действительно, имеем $F = f/I \in H^1(D)$. Поэтому

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{I(\varsigma)(\varsigma - z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\varsigma)\overline{I(\varsigma)}d\varsigma}{(\varsigma - z)} = T_{\overline{I(\varsigma)}}(z).$$

По теоремам 1, 2 получаем, что $F \in A_n^p(\omega,\alpha)\bigcap H^1(D)$.

□

References

[1] F.A. Shamoyan, *On the boundedness of a class of operators connected with the divisibility of analytic functions*, Journal Funct. Anal. Appl. **13** (1979), 70–71. MR0527535

[2] F.A. Shamoyan, *On a class of operators connected with the factorization of analytic functions*, Journal of Mathematical Sciences **39** (1974), 200–206. MR0367210

[3] P. Duren, *Theory H^p spaces*, Acad. press, 1970. MR0268655

[4] F.A. Shamoyan, *On boundedness of Toeplitz operators in weighted Sobolev spaces of holomorphic functions in the disk*, Journal of Mathematical Sciences **389** (2011), 257–282. MR2962138

[5] S. Jenson, J. Peetre, A. Semes, *On the action of Hankel and Teopletz operators on some fanctions spaces*, Duke Math. J., **51** (1984), 937–958. MR0771389

[6] K. Zhu, *Multiplers of BMO in the Bergman metric with applications to teoplitz operators*, J. Fanc. Anal. **87** (1989), 31–50.

[7] F.A. Shamoyan *A boundedness criterion for Toeplitz operators in weighted Sobolev spaces of holomorphic functions in the disk*, Siberian Math. J., **53**:3 (2012), 554–572. MR2978585

[8] J. Garnett, *Bounded analytic functions*, Moscow, 1984. MR0767451

[9] F. A Shamoyan, A. V. Harutiunian *Toeplitz operators in anisotropic spaces holomorphic in polidisk of functions*, Reports of the Armenian Academy of Sciences, **4** (1991), 147–151.

[10] F.A. Shamoyan *The weighted spaces of analytic functions with mixed norm*, Bryansk State university, Bryansk, 2014.

Shamoyan F.A.
Bryansk State University,
Bezhitskaya Str., 14,
241036, Bryansk, Russia
E-mail address: shamoyanfa@yandex.ru

Bednazh V.A.
Bryansk State University,
Bezhitskaya Str., 14,
241036, Bryansk, Russia
E-mail address: verabednazh@rambler.ru