S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 178–189 (2017) УДК 519.17

DOI 10.17377/semi.2017.14.018 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$

М.С. НИРОВА

Abstract. Distance-regular graph with intersection array $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ is $AT4(4, 6, 5)$-graph. Antipodal quotient $\bar{\Gamma}$ is strongly regular with parameters $(800, 204, 28, 60)$ and nonprincipal eigenvalues $4, -36$. Constituents of $\bar{\Gamma}$ are strongly regular with parameters $(204, 28, 2, 4)$ and $(595, 144, 18, 40)$, the second neighborhood of vertex in Γ is distance-regular graph with intersection array $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$. In this paper automorphisms of strongly regalar graphs with parameters $(204, 28, 2, 4)$, $(595, 144, 18, 40)$ and distance-regular graph with intersection array $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$ are investigated.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$.

Nirova, M.S., Automorphisms of distance-regular graph with intersection array $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 15-11-10025.

Поступила 15 января 2017 г., опубликована 6 марта 2017 г.

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ является $AT4(4, 6, 5)$-графом (см. [1]). Антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(800, 204, 28, 60)$ и неглавные собственные значения $4, -36$, первая и вторая окрестности вершины в $\bar{\Gamma}$ сильно регулярны с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и $(595, 144, 18, 40)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$. В работе исследуются автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(204, 28, 2, 4)$, $(595, 144, 18, 40)$ и дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(204, 28, 2, 4)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p = 17$ *и* $\alpha_1(g) = 34$, *либо* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 30l - 6$, *либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 20m + 4$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 1$, $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 70r + 28$, *либо* $n = 4$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 50s$, $s \le 2$;

(3) Ω *является* l*-кокликой,* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t - 6l + 4$ *и* $l = 8, 10, ..., 34$;

(4) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

(i) $p = 3$, Ω *– октаэдр и* $\alpha_1(g) = 30t + 18$, *либо*

(ii) $p = 2$, *степени вершин в* Ω *равны* $2, 4, ..., 26$ *и* $|\Omega| = 4, 6, ..., 34$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(204, 28, 2, 4)$ *и группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве его вершин. Тогда* $S(G) = O_2(G)$, *цоколь* $\bar{T}$ *группы* $\bar{G} = G/O_2(G)$ *изоморфен* $L_2(16)$ *и либо группа* G *изоморфна* $\mathrm{Aut}(L_2(16))$, *либо* $|\bar{G} : \bar{T}| = 2$, $|O_2(G) : O_2(G)_a| = 2$ *и* $\bar{T}$ *действует неприводимо на* $O_2(G)$, *либо* $\bar{G} = \bar{T}|$ *и* $|O_2(G) : O_2(G)_a| = 4$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(595, 144, 18, 40)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p = 17$ *и* $\alpha_2(g) = 425$, *либо* $p = 7$ *и* $\alpha_2(g) = 210l + 35$, *либо* $p = 5$ *и* $\alpha_2(g) = 150l + 125$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 1$, $p = 3$ *и* $\alpha_2(g) = 90r$ *или* $p = 2$ *и* $\alpha_2(g) = 60r + 30$, *либо* $n = 5$, $p = 5$ *и* $\alpha_2(g) = 50s + 20$;

(3) Ω *является* l*-кокликой,* $p = 2$, $\alpha_2(g) = 60m - 5l + 25$ *и* $l = 5, 7, ..., 91$;

(4) Ω *является объединением* m *изолированных* 5*-клик,* $p = 5$, $m \le 5$ *и* $\alpha_2(g) = 150l - 25m + 125$;

(5) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и* $p \le 29$.

Теорема 3. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p = 17$, $\alpha_1(g) = 170$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 85$ *и* $\alpha_3(g) = 680$, *либо* $p = 7$, $\alpha_1(g) = 420t + 5 \cdot 7(16 - 6s)$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7(6s + 1)$, *и* $\alpha_3(g) = 20 \cdot 7(16 - 6s) - 420t$, *либо* $p = 5$, $\alpha_1(g) = 230 - 150s + 160l + 300t$, $\alpha_4(g) = 25l$, $\alpha_2(g) = 125(6s + 5l + 17)$ *и* $\alpha_3(g) = 620 - 600s - 1310l - 300t$, l *делится на* 6;

(2) Ω *— непустой граф и* $p \le 13$.

Следствие 2. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$. *Если группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ, *то* G *разрешима.*

2. Граф с параметрами (204,28,2,4)

Доказательство теорем опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [2].

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому пространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [2]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Сначала приведем один вспомогательный результат.

Лемма 1. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* D — *индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то* $s \le d - w(k - d)/(v - w) \le r$, *причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из* $\Gamma - D$ *смежна точно с* $w(k - d)/(v - w)$ *вершинами из* D.

Доказательство. Это утверждение хорошо известно (см., например, §2 из [3]). $\square$

В леммах 2–4 будем предполагать, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и спектром $28^1, 4^{119}, -6^{84}$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. По [4, теорема 3.2] имеем $|\Omega| \le 204/6 = 34$.

Лемма 2. *Пусть* χ_1 — *характер, полученный при проектировании* $\psi(G)$ *на подпространство размерности* 119, *Тогда* $\chi_1(g) = (6\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 34)/10$ *и* $\chi_1(g) - 119$ *делится на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 119 & 17 & -17/5 \\ 84 & -18 & 12/5 \end{pmatrix}$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 119 равно $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_2(g)/5)/12$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (6\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 34)/10$.

Последнее утверждение леммы следует из леммы 1 [5]. $\square$

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω — *пустой граф, то либо* $p = 17$ *и* $\alpha_1(g) = 34$, *либо* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 30l - 6$, *либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 20m + 4$;

(2) *если* Ω *является* n-*кликой, то либо* $n = 1$, $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 70r + 28$, *либо* $n = 4$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 50s$, $s \le 2$;

(3) *если* Ω *является* l*-кокликой, то* $p=2$, $\alpha_1(g)=20t-6l+4$ *и* $l=8,10,...34$;
(4) *если* $[a]\subset\Omega$, *то* $p=3,5,7$ *и* $\alpha_1(g)=0$.

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $204=12\cdot 17$, то $p=2,3,17$.

Пусть $p=17$. Тогда $\chi_1(g)=(\alpha_1(g)-34)/10$ и $\alpha_1(g)=34$. Пусть $p=3$. Тогда $\chi_1(g)=(\alpha_1(g)-34)/10$ и $\alpha_1(g)=30l-6$. Пусть $p=2$. Тогда число $\chi_1(g)=(\alpha_1(g)-34)/10$ нечетно и $\alpha_1(g)=20m+4$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n=1$, то p делит 28 и 175, поэтому $p=7$, $\chi_1(g)=(\alpha_1(g)-28)/10$ и $\alpha_1(g)=70r+28$. Если Ω содержит смежные вершины u,w, то p делит $|[u]-w^\perp|=25$, $p=5$ и $n=4$. Далее, число $\chi_1(g)=(\alpha_1(g)-10)/10$ сравнимо с 4 по модулю 5 и $\alpha_1(g)=50s$, $s\le 2$.

Пусть Ω является l-кокликой, $l\ge 2$. Тогда p делит 4 и $152-l$, поэтому $p=2$, число $\chi_1(g)=(6l+\alpha_1(g)-34)/10$ нечетно и $\alpha_1(g)=20t-6l+4$. Так как вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, то $l=8,10,...34$.

Пусть Ω содержит смежные вершины и является объединением изолированных клик. Тогда p делит 4 и 25, противоречие.

Пусть $[a]\subset\Omega$. Тогда любая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с 4 вершинами из Ω, поэтому $\alpha_0(g)=29$ и $\alpha_1(g)=0$. Теперь $\chi_1(g)=14$ и $\chi_1(g)-119$ делится на p, поэтому $p=3,5,7$. $\square$

Лемма 4. *Пусть* Ω *содержит геодезический* 2*-путь* b,a,c. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*
(1) $p=3$, Ω *– октаэдр и* $\alpha_1(g)=30t+18$;
(2) $p=2$, *степени вершин в* Ω *равны* $2,4,...,26$ *и* $|\Omega|=4,6,...,34$.

Доказательство. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b,a,c. Если $p>3$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v',k',2,4)$. В этом случае $k'=u^2+3$, Ω имеет собственные значения $u-1$, $-(u+1)$ и кратность $u-1$ равна $u(u^2+3)(u^2+u+4)/(8u)$. Поэтому либо $u=1$ и Ω — октаэдр, либо $u=3$ и Ω имеет параметры (40,12,2,4). Но в последнем случае число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ равно 640, противоречие. В первом случае число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ равно 144, p делит 24 и 54, поэтому $p=2,3$, противоречие с тем, что $p>3$.

Если $p=3$, то $\lambda_\Omega=2$, $\mu_\Omega=1,4$, степени вершин в Ω равны $4,...,28$ и $|\Omega|=6,...,33$. Пусть a — вершина степени 4 в Ω. Тогда $\Omega(a)$ — четырехугольник и Ω — октаэдр. Далее, $\chi_1(g)=(\alpha_1(g)+2)/10$ и $\alpha_1(g)=30t+18$. Если $\mu_\Omega=4$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v',k',2,4)$. Как показано выше, Ω — октаэдр.

Пусть Ω не содержит вершин степени 4. Если Ω содержит вершину a степени k', то $|\Omega|\ge 1+k'+4k'/4$ и $k'\le 16$, причем в случае $k'=16$ любая вершина из $\Omega(a)$ имеет степень 7 в Ω, а вершина из $\Omega-a^\perp$ смежна с 4 вершинами из $\Omega(a)$. Далее, $\chi_1(g)=(164+\alpha_1(g))/10$ и $\alpha_1(g)=30l+6$. Заметим, что $\Omega-a^\perp$ содержит не более двух вершин степени 10, поэтому число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$, деленное на 3, не меньше $4+2\cdot 6+30\cdot 7$, противоречие с тем, что указанное число ребер не больше $2\cdot 1+55\cdot 4$.

Итак, степени вершин в Ω равны $7,10,13$. Пусть Ω содержит вершину a степени 7. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше 28. Заметим, что вершина из $\Omega_2(a)$ смежна либо с единственной вершиной из $\Omega(a)$ и с 3-кокликовой $\langle g\rangle$-орбитой на $[a]-\Omega$, либо с 4 вершинами из $\Omega(a)$.

Пусть $|\Omega(a)| = 7$. Допустим, что $\Omega(a)$ содержит изолированный 4-цикл $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. и треугольник $\{e_1, e_2, e_3\}$. В этом случае вершина c из $\Omega_2(a)$, смежная с 4 вершинами из $\Omega(a)$, смежна по крайней мере с тремя вершинами четырехугольника, и поэтому единственна. Отсюда $[c] \cap \Omega(a)$ – четырехугольник и $\{a, c\} \cup ([c] \cap \Omega(a))$ – октаэдр. Заметим, что каждая вершина из $\Omega(c) - [a]$ смежна с единственной вершиной треугольника $\{e_1, e_2, e_3\} = \Omega(a) - [c]$. Если $|\Omega(c)| = 7$, $\{d_1, d_2, d_3\} = \Omega(c) - [a]$, то $\{e_1, e_2, e_3, d_1, d_2, d_3\}$ является 3-призмой и можно считать, что d_i смежна с e_i. В этом случае $\Omega(e_1)$ содержит e_2, d_1 и две новых вершины из $[d_2]$, e_3, d_1 и две новых вершины из $[d_3]$, а также две новых вершины из $[d_1]$. Теперь $|\Omega(e_1)| \geq 10$ и $|\Omega_2(a)| \geq 1 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4$, противоречие с тем, что некоторая вершина из $[a] - \Omega$ смежна с 4 вершинами из $\Omega_2(a)$.

Итак, $\Omega(a)$ является 7-циклом $\{f_1, f_2, ..., f_7\}$, $\Omega(a)$ содержит 7 пар смежных вершин, смежных с единственной вершиной из $\Omega - a^\perp$, 7 пар вершин, смежных с двумя вершинами из $\Omega - a^\perp$ и 7 пар вершин, смежных с нулем или тремя вершинами из $\Omega - a^\perp$. Покажем, что вершина c из $\Omega_2(a)$ не смежна с 2 изолированными ребрами в $\Omega(a)$. Пусть $[a] \cap [c]$ содержит ребра $\{f_1, f_2\}$, $\{f_5, f_6\}$. Тогда $[f_i] \cap [f_j]$ содержит 2 вершины из $\Omega - \{a, c\}$ для $(i, j) = (1, 5), (2, 5), (2, 6)$. Поэтому $\Omega_2(a)$ содержит 7 вершин, смежных с четверками вершин из $\Omega(a)$, противоречие с тем, что c смежна с двумя ребрами из $\Omega(a)$.

Покажем, что вершина c из $\Omega_2(a)$ не смежна с 3-путем. Пусть $[a] \cap [c]$ содержит путь f_1, f_2, f_3, f_4. Тогда $\Omega_2(a)$ содержит 4 вершины, смежные с парами f_1, f_3, f_2, f_4 и с парой f_1, f_4 (эти вершины попарно различны, иначе некоторое ребро этого 3-пути смежна с 3 вершинами). Каждой из этих вершин отвечает единственное ребро 7-цикла, не лежащее в 3-пути. При этом полученные ребра должны быть изолированы в μ-подграфе $[a] \cap [c]$ с вершиной a. Для $d \in \Omega(f_1) \cap [f_4] - \{a, c\}$ подграф $\Omega(d) \cap [a]$ содержит ребро, инцидентное f_1 или f_4, скажем $\{f_1, f_7\}$. Противоречие с тем, что четвертая вершина из $\Omega(d) \cap [a]$ не может быть изолирована от f_1, f_4, f_7.

Покажем, что вершина c из $\Omega_2(a)$ не смежна с 2-путем. Пусть $[a] \cap [c]$ содержит путь f_1, f_2, f_3 и вершину f_5. Тогда $\Omega_2(a) \cap [f_5]$ содержит по 2 вершины, смежные с f_1, f_2 и одну вершину, смежную с f_3, причем совпасть могут только вершины, смежные с f_1 и f_3 (всего получилось не менее 4 вершин). В $\Omega_2(a)$ может попасть вершина, смежная с f_1, f_7, f_3, f_5. Вершина из $\Omega_2(a) \cap [f_5]$, смежная с ребром $\{f_3, f_4\}$, смежна с 2-путем f_3, f_4, f_5. Аналогично, для вершины, смежной с $\{f_6, f_7\}$. Итак, либо некоторая вершина из $\Omega_2(a) \cap [f_5]$ смежна с f_3, f_4 (и нет вершин, смежных с ребром $\{f_6, f_7\}$), либо нет вершин, смежных с ребром $\{f_3, f_4\}$ и вершина из $\Omega_2(a) \cap [f_5]$, смежная с f_6, f_7, смежна с 2-путем из $\Omega(a)$. В любом случае имеется не более 3 вершин в графе $\Omega_2(a) \cap [f_5]$, противоречие.

Итак, каждая вершина из $\Omega_2(a)$, смежная с 4 вершинами из $\Omega(a)$, смежна с ребром и двумя изолированными вершинами. Противоречие с тем, что имеются 3 вершины в $\Omega_2(a)$, смежные с f_1, f_3 – это вершины, смежные с ребрами $\{f_1, f_7\}$, $\{f_3, f_4\}$ и $\{f_5, f_6\}$, противоречие.

Есои Ω содержит вершину a степени 13, то $|\Omega| \geq 1+13+13{\cdot}7/4$, противоречие. Значит, Ω – регулярный граф степени 10. Противоречие с тем, что по лемме 1 имеем $|\Omega| \geq 51$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\lambda_\Omega = 0, 2$, $\mu_\Omega = 2, 4$, степени вершин в Ω равны $2, 4, ..., 26$ и $|\Omega| = 4, 6, ..., 34$. □

Из лемм 3–4 следует теорема 1.

Пусть до конца раздела Γ — сильно регулярный граф с параметрами (204,28, 2,4), группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. По теореме 1 имеем $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,17\}$, $|G : G_a| = 4 \cdot 3 \cdot 17$ и $|G|$ не делится на 49.

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если f — элемент порядка 17 из G, g — элемент простого порядка $p < 17$ из $C_G(f)$, то $p = 2$ и либо Ω — пустой граф и $\alpha_1(g) = 204$, либо $|\Omega| = 34$ и $\alpha_1(g) = 0$, в любом случае $|C_G(f)|$ не делится на 4;*

(2) *$S(G) = O_2(G)$;*

(3) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморфен $L_2(16)$.*

Доказательство. По теореме 1 граф $\mathrm{Fix}(f)$ является пустым и $\alpha_1(f) = 34$. Далее, либо Ω — пустой граф, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 30l-6$ или $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 20m+4$, либо $p = 2$, $|\Omega| = 34$ и $\alpha_1(g) = 20t - 200$.

Если Ω — пустой граф, то $p = 2$ и $5m+1$ делится на 17, поэтому $\alpha_1(g) = 204$. Если же $|\Omega| = 34$, то $t - 10$ делится на 17 и $\alpha_1(g) = 0$.

Допустим, что $C_G(f)$ содержит подгруппу V порядка 4. Если h — элемент порядка 4 из V, то из действия h на $W = \{u \mid d(u, u^f) = 1\}$ следует, что $g = h^2$ фиксирует вершину из W. Далее, $\chi_1(g) = 17 + \alpha_1(g)/10$ и число $\chi_1(g) - 119$ делится на 4, поэтому $\alpha_1(g) = 40l$ и $\alpha_2(g)$ не делится на 4, противоречие.

Пусть $Q = O_p(G) \neq 1$. Если $p = 3$, то $|Q : Q_a| = 3$ и Q_a фиксирует вершину b из $[a]$. Ввиду теоремы 1 найдется октаэдр Δ такой, что $\Delta = \mathrm{Fix}(y)$ для любого элемента y порядка 3 из Q_a. Так как 198 не делится на 27, то $|Q_a|$ делит 9, противоречие с действием элемента порядка 17 на Q. Значит, $S(G) = O_2(G)$.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/O_2(G)$. По [6, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(16)$, $L_2(17)$, $Sp_4(4)$, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$, $Sp_8(2)$. Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего 204, то $\bar{T} \cong L_2(16)$, $\bar{T}_a \cong E_{16} : Z_5$ — подгруппа индекса 51 из $\bar{T}$. Лемма доказана. □

По лемме 5 либо группа G изоморфна $\mathrm{Aut}(L_2(16))$, либо $|\bar{G} : \bar{T}| = 2$, $|O_2(G) : O_2(G)_a| = 2$ и $\bar{T}$ действует неприводимо на $O_2(G)$, либо $\bar{G} = \bar{T}|$ и $|O_2(G) : O_2(G)_a| = 4$. Следствие 1 доказано.

3. Граф с параметрами (595,144,18,40)

В леммах 6–8 предполагается, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(595, 144, 18, 40)$ и спектром 144^1,
$4^{510}, -26^{84}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда порядок коклики в Γ не больше 91 и по [4, теорема 3.2] имеем $|\Omega| \leq 595 \cdot 40/140 = 170$.

Лемма 6. *Пусть χ_2 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 84. Тогда $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) - 455)/30$ и $\chi_2(g) - 84$ делится на p.*

Доказательство. Как и выше, значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 84 равно $\chi_2(g) = (12\alpha_0(g) - 13\alpha_1(g)/6 + 2\alpha_2(g)/3)/85$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_1(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_2(g)$, получим $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) - 455)/30$.

Последнее утверждение леммы следует из леммы 1 [5]. □

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω *— пустой граф, то либо* $p = 17$ *и* $\alpha_2(g) = 425$, *либо* $p = 7$ *и* $\alpha_2(g) = 210l + 35$, *либо* $p = 5$ *и* $\alpha_2(g) = 150l + 125$;

(2) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо* $n = 1$, $p = 3$ *и* $\alpha_2(g) = 90r$ *или* $p = 2$ *и* $\alpha_2(g) = 60r + 30p = 7$, *либо* $n = 5$, $p = 5$ *и* $\alpha_2(g) = 150s - 50$;

(3) *если* Ω *является* l*-кокликой, то* $p = 2$, $l = 2m+1$, $\alpha_2(g) = 60t+10m-460$ *и* $m = 3, 4, ..., 45$;

(4) *если* Ω *содержит ребро и является объединением изолированных клик, то* $p = 5$, Ω *является объединением* m *изолированных* 5*-клик,* $m \leq 5$ *и* $\alpha_2(g) = 150l - 25m + 125$;

(5) *если* $[a] \subset \Omega$, *то* $p = 2, 3, 5$ *и* $\alpha_1(g) = 0$.

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $595 = 35 \cdot 17$, то $p = 5, 7, 17$.

Пусть $p = 17$. Тогда $\chi_2(g) = (\alpha_2(g) - 455)/30$ и $\alpha_2(g) = 425$. Пусть $p = 7$. Тогда $\chi_2(g) = (\alpha_2(g) - 455)/30$ и $\alpha_2(g) = 210l + 35$. Пусть $p = 5$. Тогда число $\chi_2(g) = (\alpha_2(g) - 455)/10$ сравнимо с 4 по модулю 5 и $\alpha_2(g) = 150m - 25$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 144 и 450, поэтому либо $p = 3$, $\chi_2(g) = (\alpha_2(g) - 450)/30$ и $\alpha_2(g) = 90r$, либо $p = 2$, $\chi_2(g) = (\alpha_2(g) - 450)/30$ и $\alpha_2(g) = 60r + 30$. Если Ω содержит смежные вершины u, w, то p делит $|[u] - w^{\perp}| = 125$, $p = 5$ и $n = 5$. Далее, число $\chi_2(g) = (\alpha_2(g) - 430)/30$ сравнимо с 4 по модулю 5 и $\alpha_2(g) = 150s - 50$.

Пусть Ω является l-кокликой, $l \geq 2$. Тогда p делит 40, 104 и $347 - l$, поэтому $p = 2$, $l = 2m + 1$, число $\chi_2(g) = (5l + \alpha_2(g) - 455)/30$ четно и $\alpha_2(g) = 60t + 10m - 450$. Так как вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, то $m = 3, 4, ..., 45$.

Пусть Ω содержит смежные вершины и является объединением изолированных клик. Тогда p делит 18 и 125, противоречие.

Пусть $[a] \subset \Omega$. Тогда любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 40 вершинами из Ω, поэтому $\alpha_0(g) = 145$ и $\alpha_1(g) = 0$. Теперь $\chi_2(g) = (725 + 450 - 455)/30 = 24$ и $\chi_2(g) - 84$ делится на p, поэтому $p = 2, 3, 5$. □

Лемма 8. *Пусть* Ω *содержит геодезический* 2*-путь* b, a, c. *Тогда* $p \leq 29$.

Доказательство. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c.

Если $p > 37$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 18, 40)$, $k' < 144$. В этом случае $n^2 = 4u^2 = 22^2 + 4(k' - 40)$, поэтому $k' = u^2 - 81$, $u < 15$, Ω имеет собственные значения $u - 11$, $-(u + 11)$ и кратность $u - 11$ равна $(u+10)(u^2-81)(u^2+u-70)/(80u)$. Если 8 делит k', то $u = 11, 13$, а если 8 делит $k'-19$, то $u = 10, 14$. Отсюда $u = 14$, Ω имеет параметры (392,115,18,40). Но в этом случае число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $392 \cdot 29$, противоречие.

Если $p = 37$, то $\lambda_\Omega = 18$, $\mu_\Omega = 3, 40$, степени вершин в Ω равны $33, 70, 107$ и $|\Omega| = 77, 114, 151$. Пусть a — вершина степени 33 в Ω. Тогда $|\Omega| \geq 1+33+33\cdot 14/3$, противоречие. Пусть a — вершина степени 70 в Ω. Тогда $|\Omega| \geq 1+70+70\cdot 51/40$, противоречие.

Если $p = 31$, то $\lambda_\Omega = 18$, $\mu_\Omega = 9, 40$, степени вершин в Ω равны $20, 51, 82, 113$ и $|\Omega| = 37, 68, 99, 130, 161$. Пусть a — вершина степени 20 в Ω. Тогда $\Omega(a)$ — полный многодольный граф $K_{10\times 2}$, противоречие с тем, что Γ не содержит 7-клик.

Пусть a — вершина степени 82 в Ω. Тогда $|\Omega| \geq 1 + 82 + 32 \cdot 82/40$, поэтому Ω не содержит вершин степени 113 и $|\Omega| = 161$. Если $|\Omega| = 161$, β — число вершин степени 82 в Ω, то $\chi_2(g) = (350 + \alpha_2(g))/30$, $\alpha_1(g) = 124$ и $\alpha_2(g) = 310$. В этом случае число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$, деленное на 31 не меньше $2\beta+3(161-\beta) = 483-\beta$, но не больше $4\cdot 18+10\cdot 40 = 472$, поэтому $\beta \geq 11$. Пусть z — другая вершина степени 82 в Ω. Если $|\Omega(a)\cap[z]| = 9$, то $|\Omega-(a^\perp\cup z^\perp)| = 4$ и степень вершины из $\Omega(a)\cap[z]$ в графе Ω не больше $19+19+4$, противоречие. Если вершины a, z смежны, то $|\Omega-(a^\perp\cup z^\perp)| = 15$. Для вершины b степени γ в графе $\Omega(a)\cap[z]$ подграф $\Omega(b)$ содержит по $17-\gamma$ вершин из $\Omega(a)-z^bot$, $\Omega(z)-a^bot$ и $15+\gamma$ вершин из $\Omega-(a^\perp\cup z^\perp)$. Поэтому $\Omega(a)\cap[z]$ является кокликой, состоящей из вершин степени 51 в Ω и вершина e из $\Omega-(a^\perp\cup z^\perp)$ смежна с 18 вершинами из $\Omega(a)\cap[z]$, с 22 вершинами из $\Omega(a)-z^bot$ и из $\Omega(z)-a^bot$ и с 20 вершинами из $\Omega-(a^\perp\cup z^\perp)$, противоречие. Итак, подграф Δ на множестве вершин степени 82 в Ω является β-кокликой и $|\Omega(a)\cap[z]| = 40$ для любых двух вершин $a, z\in\Delta$. Теперь число вершин из $\Gamma-\Omega$, смежных с вершинами из Δ не меньше $62\cdot 11$, противоречие.

Итак, Ω — регулярный граф степени 51. По лемме 1 имеем $47\cdot 17 \leq 4|\Omega|$, противоречие. $\square$

Из лемм 7–8 следует теорема 2.

4. Граф с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$

В леммах 9–12 предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$ и спектром 144^1, $24^{476}, 4^{510}, -6^{1904}, -26^{84}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Ввиду [4, теорема 3.2] имеем $|\Omega| \leq 850$. Заметим, что $v = 1+144+2250+576+4 = 2975 = 25\cdot 7\cdot 17$ и максимальный порядок клики в Γ не больше 6. Для вешины $x\in\Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x.

Лемма 9. *Пусть χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности* 476, *χ_2 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности* 510, *χ_4 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности* 84. *Тогда $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 6\alpha_4(g))/300$, $\chi_2(g) = (25\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 25\alpha_4(g))/150+85/6$, $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g)+\alpha_2(g)+5\alpha_4(g))/150-91/6$, причем числа $\chi_1(g)-476$, $\chi_2(g)-510$ и $\chi_4(g)-84$ делятся на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 476 & 238/3 & 0 & -119/6 & -119 \\ 510 & 85/6 & -17/3 & 85/6 & 510 \\ 1904 & -238/3 & 0 & 119/6 & -476 \\ 84 & -91/6 & 14/3 & -91/6 & 84 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g)+4\alpha_1(g)-\alpha_3(g)-6\alpha_4(g))/300$. Далее, $\chi_2(g) = (180\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g) + 5\alpha_3(g) + 180\alpha_4(g))/1050$. Подставив $\alpha_1(g)+\alpha_3(g) = 2975 - \alpha_0(g)-\alpha_2(g)-\alpha_4(g)$, получим $\chi_2(g) = (25\alpha_0(g)-\alpha_2(g)+25\alpha_4(g))/150+85/6$.

Аналогично, $\chi_4(g) = (72\alpha_0(g)-13\alpha_1(g)+4\alpha_2(g)-13\alpha_3(g)+72\alpha_4(g))/(150\cdot 17)$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_1(g)+\alpha_3(g) = 2975-\alpha_0(g)-\alpha_2(g)-\alpha_4(g)$, $\chi_2(g) = (25\alpha_0(g)-\alpha_2(g)+25\alpha_4(g))/150+85/6$. получим $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g)+\alpha_2(g)+5\alpha_4(g))/150-91/6$.

Последнее утверждение леммы следует из леммы 1 [5]. □

Лемма 10. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Ω *— пустой граф, то либо* $p = 17$, $\alpha_1(g) = 170$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 85$ *и* $\alpha_3(g) = 680$, *либо* $p = 7$, $\alpha_1(g) = 420t + 5 \cdot 7(16 - 6s)$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7(6s + 1)$, *и* $\alpha_3(g) = 20 \cdot 7(16 - 6s) - 420t$, *либо* $p = 5$, $\alpha_1(g) = 230 - 150s + 160l + 300t$, $\alpha_4(g) = 25l$, $\alpha_2(g) = 125(6s + 5l + 17)$ *и* $\alpha_3(g) = 620 - 600s - 1310l - 300t$, l *делится на* 6*;*

(2) *имеем* $p \leq 17$, *и если* $p = 17$, *то* Ω *— пустой граф.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $2975 = 25 \cdot 7 \cdot 17$, то $p = 5, 7, 17$.

Пусть $p = 17$. Тогда $\alpha_4(g) = 0$, $\chi_2(g) = -\alpha_2(g)/150 + 85/6$ и $\alpha_2(g) = 25 \cdot 85$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 850$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 170)/60$ и $\alpha_1(g) = 170$.

Пусть $p = 7$. Тогда $\alpha_4(g) = 0$, $\chi_2(g) = -\alpha_2(g)/150 + 85/6$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7w_2$ и число $\chi_2(g) = (-7w_2 + 85)/6$ сравнимо с -1 по модулю 7. Отсюда $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7(6s + 1)$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 25 \cdot 7(16 - 6s)$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 5 \cdot 7(16 - 6s))/60$ и $\alpha_1(g) = 420t + 5 \cdot 7(16 - 6s)$.

Пусть $p = 5$. Тогда $\alpha_4(g) = 5w_4$, число $\chi_2(g) = -\alpha_2(g)/150 + (5w_4 + 85)/6$ делится на 5, $\alpha_2(g) = 125w_2$ и $\chi_2(g) = 5(-w_2 + w_4 + 17)/6$. Отсюда $\alpha_2(g) = 125(6s + w_4 + 17)$, число $\chi_4(g) = (5(6s + w_4 + 17) + w_4 - 91)/6 = 5s + w_4 - 1$ сравнимо с 4 по модулю 5. Итак, $\alpha_4(g) = 25l$, $\alpha_2(g) = 125(6s + 5l + 17)$ и ввиду утверждения (1) леммы 7 число $5l + 17$ сравнимо с -1 по модулю 6. Отсюда l делится на 6, $30s + 26l + 85 \leq 119$.

Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 25(34 - 30s - 26l)$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 170 + 150s - 160l)/60$ сравнимо с 1 по модулю 5, $\alpha_1(g) = 230 - 150s + 160l + 300t$ и $\alpha_3(g) = 620 - 600s - 1310l - 300t$.

Пусть число p больше 17. Тогда Ω является вполне регулярным графом с $\lambda_\Omega = 18$, $\mu_\Omega = 8$ и 8 делит $k_\Omega(k_\Omega - 19)$.

Если $p = 29$, то $k_\Omega = 28, 57, 86, 115$, поэтому $k_\Omega = 115$, $115 \cdot 96/8 = 1380$ и $2250 - 1380 = 870$. Наконец, $460 \cdot 96/1380 = 32$, Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{115, 96, 32, 1; 1, 8, 96, 115\}$ и $|\Omega| = 1 + 115 + 1380 + 460 + 4 = 1960$. Противоречие с тем, что $|\Omega| \leq 850$.

Если $p = 23$, то $k_\Omega = 29, 52, 75, 98, 121$, поэтому $k_\Omega = 75$, $75 \cdot 56/8 = 525$ и $2250 - 525 = 1725$ не делится на 23.

Если $p = 19$, то $k_\Omega = 30, 49, 68, 87, 106, 125$, противоречие.

Пусть $p = 17$ и Ω — непустой граф. Тогда $\lambda_\Omega \in \{1, 18\}$, $\mu_\Omega = 8$ и степени вершин в Ω равны $23, 42, 59, 76, 93, 110, 127$ (ввиду леммы 7 эта степень не равна 144). Если $a \in \Omega$, $b \in \Omega \cap \Gamma_2(a)$, то $\Omega(b)$ содержит по 8 соседей вершин из $F(a)$ (всего 40 вершин) и не менее двух вершин из $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ ($a_2 = 104$). Так как 2250 сравнимо с 6 по модулю 17, $|\Omega_2(a)|$ делится на 5 и $|\Omega_2(a)| \geq 21 \cdot 23/4$, то $|\Omega_2(a)| \geq 125$.

Если степень a в Ω равна 127, то $[a]$ содержит единственную $\langle g \rangle$-орбиту длины 17 и для вершины $u \in [a] - \Omega$ подграф $[a] \cap [u]$ содержит не менее 4 вершин из Ω. Отсюда $|\Omega_2(a)| \geq (4 \cdot 40 + 123 \cdot 23)/8$ и $|\Omega_2(a)| \geq 425$. Противоречие с тем, что $|\Omega| \geq 425 + 5 \cdot 128$.

Если степень a в Ω равна 110, то $|\Omega_2(a)| \geq 110 \cdot 23/8$ и $|\Omega_2(a)| \geq 380$. Отсюда $|\Omega| \geq 555 + 380$, противоречие.

Если степень a в Ω равна 93, то $|\Omega_2(a)| \geq 93 \cdot 23/8$ и $|\Omega_2(a)| \geq 295$. Отсюда $|\Omega| \geq 765 = 17 \cdot 45$ и $|\Gamma - \Omega| \leq 17 \cdot 130$, поэтому некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с 22 вершинами из Ω, противоречие.

Если степень a в Ω равна 76, то $|\Omega_2(a)| \geq 76 \cdot 23/8$ и $|\Omega_2(a)| \geq 295$. Отсюда $|\Omega| \geq 680 = 17 \cdot 40$ и $|\Gamma - \Omega| \leq 17 \cdot 135$, поэтому некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с 21 вершинами из Ω, противоречие.

Если степень a в Ω равна 59, то $|\Omega_2(a)| \geq 59 \cdot 23/8$ и $|\Omega_2(a)| \geq 210$. Отсюда $|\Omega| \geq 210 + 300 = 17 \cdot 30$ и $|\Gamma - \Omega| \leq 17 \cdot 145$, поэтому некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с 18 вершинами из Ω, противоречие.

Если степень a в Ω равна 42, то $|\Omega_2(a)| \geq 42 \cdot 23/8$ и $|\Omega_2(a)| \geq 125$. Отсюда $|\Omega| \geq 125 + 215 = 17 \cdot 20$ и $|\Gamma - \Omega| \leq 17 \cdot 155$, поэтому некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с 14 вершинами из Ω, противоречие. □

Из леммы 10 следует теорема 3.

Лемма 11. *Пусть f — элемент порядка 17 из G, g — элемент простого порядка $p < 17$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $|\Omega| = 17t > 0$ и либо $p \leq 3$, либо $p = 5$, $t = 10$, $\alpha_4(g) = 680$, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 125 \cdot 17$.*

Доказательство. По лемме 10 подграф $\mathrm{Fix}(f)$ пуст.

Если Ω — пустой граф, то либо $p = 7$, $\alpha_1(g) = 420t + 5 \cdot 7(16 - 6s)$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7(6s+1)$, и $\alpha_3(g) = 20 \cdot 7(16 - 6s) - 420t$, либо $p = 5$, $\alpha_1(g) = 230 - 150s + 160l + 300t$, $\alpha_4(g) = 25l$, $\alpha_2(g) = 125(6s + 5l + 17)$ и $\alpha_3(g) = 620 - 600s - 1310l - 300t$, l делится на 6.

В случае $p = 7$ число $6s + 1$ делится на 17, противоречие. Пусть $p = 5$. Если $l = 0$, то s делится на 17, поэтому $s = 0$, $\alpha_2(g) = 125 \cdot 17$, $\alpha_1(g) = 230 + 300t$ и $23 + 30t$ делится на 17, поэтому $t = 10$, $\alpha_1(g) = 17 \cdot 190$, противоречие. Если $l = 6 \cdot 17$, то $\alpha_4(g) = 150 \cdot 17$, $\alpha_2(g) = 125(6s + 31 \cdot 17) \leq 25 \cdot 17$, противоречие.

Пусть Ω — непустой граф. Тогда $|\Omega| = 17t$, $t \leq 50$ и $175 - t$ делится на p.

Если $p = 13$, то $\alpha_4(g) = 0$, $t = 6, 19, 32, 45$, $\chi_2(g) = -\alpha_2(g)/150 + 17(t+5)/6$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 13s$ и $t + s + 5$ делится на 6. Аналогично, $\chi_4(g) = (85t + \alpha_2(g))/150 - 91/6$ и t делится на 5. Поэтому $t = 45$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 13s \leq 130 \cdot 17$ и $s = 4$. Отсюда $\alpha_2(g) = 25 \cdot 52$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 17 \cdot 130 - 25 \cdot 52$, число $\chi_1(g) = (315 + \alpha_1(g)/10)/6$ сравнимо с -5 по модулю 13. Теперь $\alpha_1(g) = 390(2l+1)$, $\chi_1(g) = (118 + 26l)/2 = 59 + 13l$, противоречие.

Если $p = 11$, то $\alpha_4(g) = 0$, $t = 10, 21, 32, 43$, $\chi_2(g) = -\alpha_2(g)/150 + 17(t+5)/6$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 11s$ и $t - s + 5$ делится на 6. Аналогично, $\chi_4(g) = (85t + \alpha_2(g))/150 - 91/6$ и t делится на 5. Поэтому $t = 10$, $s = 6l - 3$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 11s \leq 165 \cdot 17$ и $s = 3, 9$.

В случае $s = 3$ имеем $\alpha_2(g) = 25 \cdot 33$, $\chi_4(g) = (34 + 33 - 91)/6$, противоречие. В случае $s = 9$ имеем $\alpha_2(g) = 25 \cdot 99$, $\chi_4(g) = (34 + 99 - 91)/6$, противоречие.

Если $p = 7$, то $\alpha_4(g) = 0$, $t = 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49$, число $\chi_2(g) = -\alpha_2(g)/150 + 17(t+5)/6$ сравнимо с -1 по модулю 7, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7s$ и $t + s + 5$ делится на 6. Аналогично, число $\chi_4(g) = (85t + \alpha_2(g))/150 - 91/6$ делится на 7 и t делится на 5. Поэтому $t = 35$, $s = 6l + 2$, $\alpha_2(g) = 25 \cdot 7s \leq 140 \cdot 17$ и $s = 2, 8$. Противоречие с тем, что $\alpha_2(g)$ не делится на 17.

Пусть $p = 5$ и $\alpha_4(g) = 85z$, $t = 5, 10, ..., 85(10 - z)$, число $\chi_2(g) = \alpha_2(g))/150 + 17(t + 5z + 5)/6$ делится на 5, $\alpha_2(g) = 125s$, $s = 0, 17$ и $t + s - z - 1$ делится на 6. Аналогично, число $\chi_4(g) = (5s + 17(t/5 + z) - 91)/6$ сравнимо с 4 по модулю 5, поэтому $5s + 17(t/5 + z) - 85 = 30l$ и $t + 5z = 25, 50$.

Если $s = 0$, то $t-z-1$ делится на 6, поэтому $t = 25-5z$, $\alpha_1(g)+\alpha_3(g) = 25\cdot 17$, число $\chi_1(g) = 17(23 + l - 6z)/12$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $l = 1$. Отсюда $\chi_1(g) = 34 - 17z/2 = -5m + 1$, $17z/2 = 33 + 5m$, $m = 17n + 7$ и $z = 10n + 8$, противоречие.

Если $s = 17$, то $t - z - 2$ делится на 6, поэтому $t = 50 - 5z$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 0$, число $\chi_1(g) = 17(23 + l - 6z)/12$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $l = 1$. Отсюда $\chi_1(g) = 34 - 17z/2 = -5m + 1$, $17z/2 = 33 + 5m$, $m = 17n + 7$ и $z = 8$. □

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$, неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ, f — элемент порядка 17 из G и F — антиподальный класс, содержащий вершину a. По теореме 3 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$, $|G : G_a| = 25 \cdot 7 \cdot 17$ и $|G : G_{\{F\}}| = 35 \cdot 17$.

Лемма 12. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $S(G) = O_{5,7}(G)$;

(2) *цоколь* $\bar{T}$ *группы* $\bar{G} = G/S(G)$ *изоморфен* $\Omega_8^-(2)$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong E_{64} : U_4(2)$ — *подгруппа индекса* 119 *из* $\bar{T}$, $S(G)$ *является* 5*-группой,* $|S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 5$ *и* $\Omega_8^-(2)$ *действует неприводимо на* $S(G)$.

Доказательство. Так как $v = 25 \cdot 7 \cdot 17$, то $S(G) = O_{5,7,17}(G)$. Если G — неразрешимая группа, то ввиду леммы 11 имеем $S(G) = O_{5,7}(G)$.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. По [6, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(16)$, $L_2(17)$, $Sp_4(4)$, He, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$, $U_4(4)$, $Sp_8(2)$, $\Omega_{10}^-(2)$, $L_2(13^2)$, $PSp_4(13)$, $L_3(16)$, $Sp_6(4)$, $F_4(2)$, A_{17}, A_{18}.

Если 7 не делит $|\bar{T}|$, то $\bar{T} \cong L_2(16), L_2(17), Sp_4(4), U_4(4)$, группа $\bar{T}$ действует неприводимо на некоторой элементарной абелевой 7-группе V и $C_V(f) = 1$.

Пусть 7 делит $|\bar{T}|$. Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего $595 = 35 \cdot 17$, то либо $\bar{T} \cong \Omega_8^-(2)$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong E_{64} : U_4(2)$ — подгруппа индекса 119 из $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong A_{17}$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_{16}$ — подгруппа индекса 17 из $\bar{T}$. В первом случае $|S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 5$, $V = S(G)$ является элементарной абелевой 5-группой и $\Omega_8^-(2)$ действует неприводимо на V. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия 2. Для группы $\Omega_8^-(2)$ имеются неприводимые модули порядков $5^34, 5^51, 5^84$. Заметим, что $r = 5$ и $U_4(2)$ не вкладывается в S_5. При этом единственная нетривиальная нормальная подгруппа из $\bar{T}_{\{F\}} = E_{64} : U_4(2)$ — подгруппа порядка 64. То есть $\bar{T}_{\{F\}}$ совпадает с $\bar{T}_a$ для $a \in F$. Таким образом, граф можно разбить на $\bar{T}$-орбиты длины 119. На каждой $\bar{T}$ действует как группа ранга 3 с подстепенями 1, 54, 64. Соответствующие графы ранга 3 — сильно регулярные графы с параметрами (119,54,21,27) или (119,64,36,32). В искомом графе $\mu = 8, \lambda = 18$, поэтому $\bar{T}$-орбиты не могут быть ни графами ранга 3, ни кликами, а только кокликами.

Подгруппа $E_{64} : U_4(2)$ вкладывается в $\Omega_8^-(2)$ однозначно с точностью до сопряжения, поэтому каждая $\bar{T}$-орбита разбивается на три $\bar{T}_{\{F\}}$-орбиты с длинами 1, 54, 64. Окрестность [a] является объединением орбит группы $\bar{T}_{\{F\}} = \bar{T}_a$. Исключая $\bar{T}_a$-орбиты, лежащие в $a^{\bar{T}}$, замечаем, что для построения $[a]$ подходят 24 орбиты длины 1, 54 и 64. Число $k = 144$ единственным образом раскладывается в сумму длин орбит: $k = 16 \cdot 1 + 2 \cdot 64$. Значит, найдётся $\bar{T}$-орбита X, в которой a имеет не менее 64 соседей. Но тогда любая вершина из $a^{\bar{T}}$ имеет в X не менее 64 соседей, и для любых двух вершин из $a^{\bar{T}}$ число общих соседей не меньше, чем $64 + 64 - |X| = 9$. Противоречие с тем, что $\mu = 8$. Следствие 2 доказано. $\square$

References

[1] A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh, *On strongly regular graphs with eigenvalue μ and their extensions*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **285** (2014), 128–135. MR3363313

[2] P.J. Cameron, *Graphs, Permutation Groups*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999. MR1721031

[3] A. E. Brouwer, W. H. Haemers, *The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra*, Europ. J. Comb., **14** (1993), 397–407. MR1241907

[4] Behbahani M., Lam C., *Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms*, Discrete Math. **311** (2011), 132–144. MR2739917

[5] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Mathematics, **81** (2010), 439–442. MR2766516

[6] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673

Marina Sefovna Nirova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
st. Chernyshevsky, 175,
360004, Nalchik, Russia
E-mail address: nirova_m@mail.ru