S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 190–198 (2017) УДК 519.644
DOI 10.17377/semi.2017.14.019 MSC 65D32

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА СФЕРЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУПП СИММЕТРИИ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

А.С. ПОПОВ

Abstract. An algorithm of searching for the best (in a sense) cubature formulas on a sphere that are invariant under the transformations of the symmetry groups of regular polyhedrons is described. This algorithm is applied to find parameters of all the best cubature formulas of this symmetry type up to the 35th order of accuracy.

Keywords: numerical integration, invariant cubature formulas, invariant polynomials, symmetry groups, rotation groups, regular polyhedrons.

1. Введение

Основы теории кубатурных формул на сфере, инвариантных относительно преобразований конечных групп вращений, были заложены С.Л. Соболевым (см. [1, 2]). К настоящему времени наибольшее распространение получили кубатурные формулы, инвариантные относительно групп симметрии правильных многогранников (см. [3–18] и имеющуюся там литературу). Среди этих кубатурных формул особый интерес представляют кубатуры, имеющие положительные веса и содержащие при этом минимальное число узлов. В случае наличия для данного порядка точности n нескольких кубатур с положительными весами и одинаковым числом узлов в [15] был предложен новый критерий оптимальности, согласно которому наилучшей среди этих кубатур считается та, которая имеет наименьший главный член погрешности. В дальнейшем этот критерий был использован для поиска наилучших кубатур для группы

Popov, A.S., Cubature formulas on a sphere invariant under the symmetry groups of regular polyhedrons.

© 2017 Попов А.С.

Поступила 27 января 2017 г., опубликована 9 марта 2017 г.

вращений октаэдра [15], группы вращений октаэдра с инверсией [16], группы вращений икосаэдра [17] и группы вращений тетраэдра с инверсией [18].

В данной работе будет предпринята попытка построить кубатурные формулы, наилучшие среди всех групп симметрии правильных многогранников. При этом для $n \leq 11$ будут найдены точные значения параметров соответствующих кубатур, а для $12 \leq n \leq 35$ – приближённые, полученные путём численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом ньютоновского типа. Даются с 16 значащими цифрами параметры новой кубатуры для $n = 13$.

2. Алгоритм поиска наилучших кубатур

Как известно (см., например, [19]), имеется семь групп симметрии правильных многогранников. Это группа вращений тетраэдра T, группа полной симметрии тетраэдра T_d, группа вращений тетраэдра с инверсией T_h, группа вращений октаэдра O, группа вращений октаэдра с инверсией O_h, группа вращений икосаэдра Y и группа вращений икосаэдра с инверсией Y_h. Все эти группы содержат в качестве подгруппы группу тетраэдра T. Поэтому логично взять за основу поиска кубатур, наилучших среди всех вышеуказанных групп, кубатуры, инвариантные относительно группы T.

Итак, пусть S – единичная сфера с центром в начале координат, т. е. множество точек $(x, y, z) \in R_3$, для которых $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Рассмотрим на S интеграл

$$U(f) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(s)\, ds, \tag{1}$$

где $s \in S$, ds – элемент поверхности сферы, $U(1) = 1$.

Для численного нахождения интеграла (1) построим кубатурную формулу, инвариантную относительно преобразований группы T, в виде [12]

$$V(f) = A_0 \sum_{j=1}^{4} f(a_{0j}) + B_0 \sum_{j=1}^{4} f(b_{0j}) + C_0 \sum_{j=1}^{6} f(c_{0j}) + \sum_{i=1}^{M} A_i \sum_{j=1}^{12} f(a_{ij}), \tag{2}$$

где 4 точки a_{0j} лежат в вершинах вписанного в сферу тетраэдра и имеют координаты (p, p, p), $(p, -p, -p)$, $(-p, p, -p)$, $(-p, -p, p)$ при $p = 1/\sqrt{3}$; 4 точки b_{0j} отвечают центрам граней тетраэдра при координатах $(-p, -p, -p)$, $(-p, p, p)$, $(p, -p, p)$, $(p, p, -p)$; 6 точек c_{0j} отвечают серединам рёбер тетраэдра при координатах $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$; 12 точек a_{ij} являются точками общего положения на гранях тетраэдра при координатах

$$\begin{array}{llll}
(a_i, b_i, c_i), & (a_i, -b_i, -c_i), & (-a_i, b_i, -c_i), & (-a_i, -b_i, c_i), \\
(c_i, a_i, b_i), & (c_i, -a_i, -b_i), & (-c_i, a_i, -b_i), & (-c_i, -a_i, b_i), \\
(b_i, c_i, a_i), & (b_i, -c_i, -a_i), & (-b_i, c_i, -a_i), & (-b_i, -c_i, a_i).
\end{array}$$

Общее число узлов в кубатурной формуле (2) обозначим через N.

Будем говорить, что данная кубатурная формула имеет алгебраический порядок точности n (или просто порядок n), если она точна для всех многочленов степени не выше n и не точна хотя бы для одного многочлена степени $n + 1$.

Пусть $\{Z_{kj}(x, y, z);\ k = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, 2k + 1\}$ – ортонормированная система многочленов степени не выше n, для которых $U(Z_{kj} Z_{lm}) = \delta_{kl} \delta_{jm}$.

Здесь индекс k нумерует степени базисных многочленов, а индекс j – многочлены при данном k; δ_{kl} – символ Кронекера. Погрешностью кубатурной формулы (2) на многочленах степени k назовём величину [15]

$$E_k = \left(\sum_{j=1}^{2k+1} (U(Z_{kj}) - V(Z_{kj}))^2 \right)^{1/2} .$$

Для кубатурной формулы порядка n все величины $E_k = 0$ при $k \leq n$, а $E_{n+1} > 0$. Величину E_{n+1} назовём главным членом погрешности кубатурной формулы.

В данной работе будет сделана попытка построить все наилучшие кубатурные формулы вида (2) на сфере для $n \leq 35$. При этом наилучшей среди всех кубатурных формул этого вида, имеющих данный порядок n, мы будем считать ту, которая последовательно удовлетворяет четырём условиям [15]: 1) узлы принадлежат области интегрирования, 2) веса положительны, 3) число узлов минимально, 4) главный член погрешности минимален.

Пусть строится кубатурная формула вида (2) для некоторого порядка n. Достаточно потребовать, чтобы эта формула была точна для всех многочленов вида $u^k v^l w^j$, где $k, l = 0, 1, \ldots$; $j = 0, 1$; $4k + 3l + 6j \leq n$; $u = 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)$; $v = 3\sqrt{3}xyz$; $w = 3\sqrt{3}(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)$. Тогда для всех других многочленов степени не выше n наша формула будет точна автоматически [12]. Обозначим число базисных многочленов степени не выше n через m.

Параметрами кубатурной формулы (2) являются веса и координаты узлов. С учётом уравнений связи $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$ легко видеть, что узлы a_{0j}, b_{0j} и c_{0j} имеют по одному свободному параметру (это их вес A_0, B_0 и C_0), а узлы a_{ij} – по три свободных параметра. В итоге на один свободный параметр приходится: 4 узла a_{0j}, b_{0j} или a_{ij}, 6 узлов c_{0j}. Отсюда следует, что для получения формулы с минимальным для данного n числом узлов N выгоднее всего использовать в первую очередь узлы a_{0j}, b_{0j} и a_{ij} и лишь в последнюю очередь – узлы c_{0j}.

Возможны три случая:

1) $m = 3M$, полагаем в (2) $A_0 = B_0 = C_0 = 0$;

2) $m = 3M + 1$, полагаем $B_0 = C_0 = 0$;

3) $m = 3M + 2$, полагаем $C_0 = 0$.

При рассмотрении этих случаев мы исходили из гипотезы о том, что такие параметризации приводят к разрешимым системам нелинейных уравнений и дают в итоге кубатуры с положительными весами и с узлами, лежащими на сфере. Накопленный нами опыт практических расчётов говорит о том, что эта гипотеза действительно всегда верна, кроме случая $n = 6$, $m = 5$, $N = 20$, когда кубатура существует, но имеет отрицательные веса (см. следующий раздел).

Заметим, что получаемые в ходе описанной формальной процедуры кубатуры имеют $N_* = 4m$ узлов.

Аналогично работе [13], при выполнении практических расчётов с целью определения параметров конкретных кубатур удобнее использовать не параметры a_i, b_i, c_i, а параметры u_i, v_i, w_i, которые равны, соответственно, значениям функций u, v, w в узлах a_{ij}. Уравнения связей

$$w_i^2 = -4v_i^2 + 3u_i^2 + 6u_iv_i^2 - 4u_i^3 - v_i^4,$$

налагаемых на параметры каждой из M групп точек a_{ij}, не будем разрешать явно, а добавим их к исходной системе m уравнений, появляющихся после подстановки всех базисных функций на место f в формулу (2). Так что всего будет $m + M$ уравнений, определяющих параметры нашей кубатуры. Решив эту систему, получаем M наборов параметров u_i, v_i, w_i. Для определения параметров a_i, b_i, c_i через найденные величины u_i, v_i, w_i можно использовать следующий алгоритм [13].

1. Пусть $x_i \geq y_i \geq z_i \geq 0$ – корни кубического уравнения

$$x^3 - x^2 + (u_i/3)x - v_i^2/27 = 0.$$

2. Положим $a_i = \sqrt{x_i}$.

3. Если $w_i \geq 0$, положим $b_i = \sqrt{y_i}$, $c_i = \sqrt{z_i}$, в противном случае $b_i = \sqrt{z_i}$, $c_i = \sqrt{y_i}$.

4. Если $v_i < 0$, положим $c_i = -c_i$.

Заметим, что в узлах a_{0j} $u = v = 1$, $w = 0$, в узлах b_{0j} $u = 1$, $v = -1$, $w = 0$, в узлах c_{0j} $u = v = w = 0$.

Интересно задать вопрос: а существуют ли кубатуры вида (2), содержащие число узлов $N < N_*$? Как мы убедимся в следующем разделе, для некоторых n такие кубатуры действительно существуют. Все они имеют более высокую симметрию по сравнению с группой T, а именно, имеют симметрию групп T_h, O, O_h, Y и Y_h. Кубатур группы T_d, имеющих $N < N_*$ узлов, не существует.

Ранее в работах [15], [17] и [18] были построены наилучшие кубатуры, инвариантные относительно групп O, Y и T_h соответственно. Поскольку группа T_h является подгруппой групп O_h и Y_h, то наилучшие кубатуры группы T_h либо совпадают с наилучшими кубатурами групп O_h и Y_h, либо превосходят их. Поэтому наш поиск наилучших кубатур вида (2) будет проходить так. Сначала смотрим (например, по работам [15], [17] и [18]), существуют ли для данного n кубатуры более высокой симметрии с числом узлов $N < N_*$. Если да, то выбираем среди них наилучшую и на этом наш поиск заканчивается. Если нет, то формируем по описанному выше алгоритму систему нелинейных алгебраических уравнений, находим по возможности все её решения и выбираем среди них наилучшее.

3. Построение конкретных кубатур

С целью полноты изложения, приведём параметры всех наилучших кубатур вида (2) для $n \leq 13$.

Кубатура $n = 2$, $m = 1$, $N = N_* = 4$, $M = 0$, $A_0 = 1/4$, $B_0 = C_0 = 0$.

Эта формула тривиальна и имеет симметрию группы T_d [20].

Кубатура $n = 3$, $m = 2$, $N = 6$, $N_* = 8$, $M = 0$, $A_0 = B_0 = 0$, $C_0 = 1/6$.

Эта формула также тривиальна и имеет симметрию группы O_h [20].

Кубатура $n = 5$, $m = 3$, $N = N_* = 12$, $M = 1$, $A_0 = B_0 = C_0 = 0$, $A_1 = 1/12$, $a_1^2 = (5 + \sqrt{5})/10$, $b_1^2 = (5 - \sqrt{5})/10$, $c_1 = 0$.

Эта формула хорошо известна и имеет симметрию группы Y_h [20].

Кубатура $n = 6$, $m = 5$, $N = N_* = 20$, $M = 1$, $A_0 = 3(-3 - \sqrt{105})/320$, $B_0 = 3(-3 + \sqrt{105})/320$, $C_0 = 0$, $A_1 = 49/480$, $a_1 = b_1 = 1/\sqrt{7}$, $c_1 = \sqrt{5/7}$.

Узлы a_{0j} этой кубатуры имеют отрицательные веса, а сама кубатура имеет симметрию группы T_d [10].

Кубатура $n = 6$, $m = 5$, $N = 22$, $N_* = 20$, $M = 1$, $A_0 = 0$, $B_0 = (14-\sqrt{7})/240$, $C_0 = 2(3-\sqrt{7})/15$, $A_1 = 49(\sqrt{7}-2)/720$, $a_1^2 = b_1^2 = (5+2\sqrt{7})/21$, $c_1^2 = (11 - 4\sqrt{7})/21$.

Эта кубатура также имеет симметрию группы T_d [10].

Кубатура $n = 7$, $m = 6$, $N = N_* = 24$, $M = 2$, $A_0 = B_0 = C_0 = 0$, $A_1 = A_2 = 1/24$, $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, $a_2 = a$, $b_2 = c$, $c_2 = -b$, где $a^2 = 1/3 + 2uv$, $b^2 = 1/3 - uv + uw$, $c^2 = 1/3 - uv - uw$, $u = \sqrt{2/45}$, $v = cos(arccos(\sqrt{40}/7)/3)$, $w = \sqrt{3-3v^2}$.

Эта кубатура имеет симметрию группы O [3].

Кубатура $n = 8$, $m = 7$, $N = N_* = 28$, $M = 2$, $B_0 = C_0 = 0$.

Поочерёдно подставляя в (2) семь базисных функций и добавляя два уравнения связей, получим следующую систему:

$$
\begin{aligned}
&V(1) = 4A_0 + 12A_1 + 12A_2 = 1,\\
&V(v) = 4A_0 + 12A_1v_1 + 12A_2v_2 = 0,\\
&V(u) = 4A_0 + 12A_1u_1 + 12A_2u_2 = 3/5,\\
&V(v^2) = 4A_0 + 12A_1v_1^2 + 12A_2v_2^2 = 9/35,\\
&V(w) = 12A_1w_1 + 12A_2w_2 = 0,\\
&V(uv) = 4A_0 + 12A_1u_1v_1 + 12A_2u_2v_2 = 0,\\
&V(u^2) = 4A_0 + 12A_1u_1^2 + 12A_2u_2^2 = 3/7,\\
&w_1^2 = -4v_1^2 + 3u_1^2 + 6u_1v_1^2 - 4u_1^3 - v_1^4,\\
&w_2^2 = -4v_2^2 + 3u_2^2 + 6u_2v_2^2 - 4u_2^3 - v_2^4.
\end{aligned}
$$

Решая эту систему аналитически, находим:

$A_0 = 9/260$, $A_i = 7(88-h_i)/17160$, $u_i = (11-h_i)/21$, $v_i = (h_i-2)/14$, где $h_1 = \sqrt{22}$, $h_2 = -h_1$, $i = 1, 2$.

Полагая $w_1 > 0$, $w_2 < 0$ и применяя алгоритм из раздела 2, находим:

$a_1 = \sqrt{x_1}$, $b_1 = \sqrt{y_1}$, $c_1 = \sqrt{z_1}$, $a_2 = \sqrt{x_2}$, $b_2 = \sqrt{z_2}$, $c_2 = -\sqrt{y_2}$,
где $x_i = 1/3 + 2p_iq_i$, $y_i = 1/3 - p_iq_i + p_ir_i$, $z_i = 1/3 - p_iq_i - p_ir_i$,
$p_i = \sqrt{(10+h_i)/21}/3$, $q_i = cos(arccos((55+12h_i)/(5292p_i^3))/3)$, $r_i = \sqrt{3-3q_i^2}$,
$h_1 = \sqrt{22}$, $h_2 = -h_1$, $i = 1, 2$.

Числовые значения параметров этой кубатуры, имеющей симметрию группы T, приведены с 16 знаками в [12].

Кубатура $n = 9$, $m = 9$, $N = 32$, $N_* = 36$, $M = 2$, $A_0 = B_0 = 9/280$, $C_0 = 0$, $A_1 = 5/168$, $A_2 = 9/280$, $a_1^2 = (5+\sqrt{5})/10$, $b_1^2 = (5-\sqrt{5})/10$, $c_1 = 0$, $a_2^2 = (3-\sqrt{5})/6$, $b_2^2 = (3+\sqrt{5})/6$, $c_2 = 0$.

Эта формула хорошо известна и имеет симметрию группы Y_h [21].

Кубатура $n = 10$, $m = 11$, $N = N_* = 44$, $M = 3$, $C_0 = 0$.

Подставляя в (2) 11 базисных функций и добавляя три уравнения связей, получим следующую систему:

$$
\begin{aligned}
&V(1) = 4A_0 + 4B_0 + 12A_1 + 12A_2 + 12A_3 = 1,\\
&V(v) = 4A_0 - 4B_0 + 12A_1v_1 + 12A_2v_2 + 12A_3v_3 = 0,\\
&V(u) = 4A_0 + 4B_0 + 12A_1u_1 + 12A_2u_2 + 12A_3u_3 = 3/5,\\
&V(v^2) = 4A_0 + 4B_0 + 12A_1v_1^2 + 12A_2v_2^2 + 12A_3v_3^2 = 9/35,\\
&V(w) = 12A_1w_1 + 12A_2w_2 + 12A_3w_3 = 0,\\
&V(uv) = 4A_0 - 4B_0 + 12A_1u_1v_1 + 12A_2u_2v_2 + 12A_3u_3v_3 = 0,\\
&V(u^2) = 4A_0 + 4B_0 + 12A_1u_1^2 + 12A_2u_2^2 + 12A_3u_3^2 = 3/7,\\
&V(v^3) = 4A_0 - 4B_0 + 12A_1v_1^3 + 12A_2v_2^3 + 12A_3v_3^3 = 0,\\
&V(vw) = 12A_1v_1w_1 + 12A_2v_2w_2 + 12A_3v_3w_3 = 0,\\
&V(uv^2) = 4A_0 + 4B_0 + 12A_1u_1v_1^2 + 12A_2u_2v_2^2 + 12A_3u_3v_3^2 = 81/385,\\
&V(uw) = 12A_1u_1w_1 + 12A_2u_2w_2 + 12A_3u_3w_3 = 0,\\
&w_1^2 = -4v_1^2 + 3u_1^2 + 6u_1v_1^2 - 4u_1^3 - v_1^4,\\
&w_2^2 = -4v_2^2 + 3u_2^2 + 6u_2v_2^2 - 4u_2^3 - v_2^4,\\
&w_3^2 = -4v_3^2 + 3u_3^2 + 6u_3v_3^2 - 4u_3^3 - v_3^4.
\end{aligned}
$$

Решая эту систему аналитически, находим:
$A_0 = 27/2240$, $B_0 = 2A_0 = 27/1120$,
$A_1 = (479v_2v_3 - 27(v_2 + v_3) + 63)/(6720(v_2 - v_1)(v_3 - v_1))$,
$A_2 = (479v_1v_3 - 27(v_1 + v_3) + 63)/(6720(v_1 - v_2)(v_3 - v_2))$,
$A_3 = (479v_1v_2 - 27(v_1 + v_2) + 63)/(6720(v_1 - v_3)(v_2 - v_3))$,
$a_i = b_i = \sqrt{(1 - c_i^2)/2}$,
$c_1 = (20p - 1)/t$, $c_2 = (-10p + 10q - 1)/t$, $c_3 = (-10p - 10q - 1)/t$,
где $v_i = 3\sqrt{3}c_i(1 - c_i^2)/2$,
$p = cos(arccos(4/125)/3)$, $q = \sqrt{3 - 3p^2}$, $t = 11\sqrt{3}$, $i = 1, 2, 3$.

Эта кубатура имеет симметрию группы T_d.

Кубатура $n = 11$, $m = 12$, $N = N_* = 48$, $M = 4$, $A_0 = B_0 = C_0 = 0$,
$A_1 = A_2 = (44035 - 4h_1)/2113680$, $A_3 = A_4 = (44035 + 4h_1)/2113680$,
$a_1 = \sqrt{x_1}$, $b_1 = \sqrt{y_1}$, $c_1 = \sqrt{z_1}$, $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$, $c_2 = -b_1$,
$a_3 = \sqrt{x_2}$, $b_3 = \sqrt{z_2}$, $c_3 = \sqrt{y_2}$, $a_4 = a_3$, $b_4 = c_3$, $c_4 = -b_3$,
где $x_i = 1/3 + 2p_iq_i$, $y_i = 1/3 - p_iq_i + p_ir_i$, $z_i = 1/3 - p_iq_i - p_ir_i$,
$p_i = \sqrt{2(875 + h_i)/35}/33$, $q_i = cos(arccos(8(1415 + 3h_i)/(1257795p_i^3))/3)$,
$r_i = \sqrt{3 - 3q_i^2}$, $h_1 = \sqrt{308245}$, $h_2 = -h_1$, $i = 1, 2$.

Эта кубатура имеет симметрию группы O [14], её главный член погрешности $E_{12} = 1.6928$. Заметим, что в [12, 18] приведена кубатура $n = 11$, $N = 48$ группы T_h, для которой $E_{12} = 1.9700$.

Расчёт параметров наилучших кубатур для $n \geq 12$ проводился с использованием арифметики повышенной точности (более 30 десятичных знаков в мантиссе) на вычислительной технике Сибирского суперкомпьютерного центра. Системы нелинейных алгебраических уравнений решались численным методом ньютоновского типа, аналогичным работе [18].

Кубатура $n = 12$, $m = 15$, $N = N_* = 60$, $M = 5$, $A_0 = B_0 = C_0 = 0$.

Числовые значения параметров этой кубатуры, имеющей симметрию группы T, приведены с 16 знаками в [12].

Кубатура $n = 13$, $m = 17$, $N = N_* = 68$, $M = 5$, $C_0 = 0$,

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 0.1352485457725067E-1, & B_0 &= +0.1517251300680149E-1,\\
A_1 &= 0.1363347665056839E-1, & a_1 &= +0.7859194339703887E+0,\\
A_2 &= 0.1485580566128947E-1, & a_2 &= +0.7646854720239241E+0,\\
A_3 &= 0.1499281604183833E-1, & a_3 &= +0.8840280162756681E+0,\\
A_4 &= 0.1500767347471316E-1, & a_4 &= +0.9777182068662691E+0,\\
A_5 &= 0.1527777231023993E-1, & a_5 &= +0.8708280759039422E+0,\\
b_1 &= 0.5730053540474418E+0, & c_1 &= +0.2323693343378805E+0,\\
b_2 &= 0.6207214909924342E+0, & c_2 &= -0.1730923438389977E+0,\\
b_3 &= 0.2408287218543596E+0, & c_3 &= -0.4006195117186663E+0,\\
b_4 &= 0.2086707415825803E+0, & c_4 &= +0.2288295369010155E-1,\\
b_5 &= 0.1824962549309805E+0, & c_5 &= +0.4564576422337614E+0.
\end{aligned}
$$

Приведём теперь сводную таблицу, содержащую основные характеристики всех наилучших на сегодняшний день кубатур до 35-го порядка точности, инвариантных относительно групп симметрии правильных многогранников.

n	m	N_*	N	E_{n+1}	G	L	n	m	N_*	N	E_{n+1}	G	L
2	1	4	4	1.9720	T_d	[20]	20	37	148	148	0.8569	T	
3	2	8	6	2.2913	O_h	[20]	21	41	164	162	1.6219	T_h	[18]
5	3	12	12	2.3917	Y_h	[20]	22	45	180	180	0.6933	T	
6	5	20	22	0.5454	T_d	[10]	23	48	192	192	0.3349	Y	[17]
7	6	24	24	1.4662	O	[3]	24	53	212	212	0.5485	Y	[17]
8	7	28	28	1.8137	T	[12]	25	57	228	228	0.6104	T	
9	9	36	32	2.2441	Y_h	[21]	26	61	244	244	0.8682	T	
10	11	44	44	1.4291	T_d		27	66	264	260	1.5409	T_h	[18]
11	12	48	48	1.6928	O	[14]	28	71	284	284	0.3722	T	
12	15	60	60	1.1835	T	[12]	29	75	300	296	1.7440	T_h	[18]
13	17	68	68	1.6080	T		30	81	324	324	0.6307	T	
14	19	76	72	1.7836	Y	[3]	31	86	344	342	0.4297	O	[15]
15	22	88	84	2.0117	T_h	[12]	32	91	364	364	0.2868	T	
16	25	100	100	0.8130	T		33	97	388	384	0.9888	T_h	[18]
17	27	108	108	1.4797	T		34	103	412	412	0.2583	T	
18	31	124	124	1.1990	T		35	108	432	426	1.1931	T_h	[18]
19	34	136	132	1.0089	Y	[17]							

Здесь G – группа симметрии данной кубатуры, L – ссылка на первоисточник.

Из таблицы видно, что для всех n, кроме $n = 6$, наилучшие кубатуры данного вида симметрии содержат число узлов N, не превосходящее N_*.

Заметим, что указанные в этой таблице кубатуры $n = 2$, 3, 5, 8, 9, 11, 14, 15, 19, 20, 26, 32 являются наилучшими на сегодняшний день не только для групп симметрии правильных многогранников, но и вообще для всех групп симметрии.

4. Заключение

Был представлен алгоритм поиска наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно преобразований групп симметрии правильных многогранников. Проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатур данного вида симметрии до 35-го порядка точности n. При этом для $n \leq 11$ были найдены точные значения параметров соответствующих кубатур, а для остальных n – приближённые, полученные путём численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом ньютоновского типа. Использованный в работе численный метод не гарантирует, что были найдены все возможные решения системы нелинейных уравнений, из которой определяются параметры кубатуры. Поэтому не исключена возможность, что для некоторых n полученные в работе результаты могут быть улучшены.

References

[1] S.L. Sobolev, *Cubature formulas on a sphere which are invariant under transformation of finite rotational groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **146**:2 (1962), 310–313 (in Russian). MR0141225

[2] S.L. Sobolev, *On mechanical cubature formulas for the surface of a sphere*, Sibirskii Mat. Zh., **3**:5 (1962), 769–796 (in Russian). MR0141227

[3] A.D. McLaren, *Optimal numerical integration on a sphere*, Math. Comput., **17**:83 (1963), 361–383. MR0159418

[4] V.I. Lebedev, *Nodes and weights of Gauss-Markov type quadrature formulas from 9th to 17th accuracy orders for a sphere which are invariant under the octahedral group with inversion*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **15**:1 (1975), 48–54 (in Russian). MR0371024

[5] V.I. Lebedev, *On quadratures for a sphere*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **16**:2 (1976), 293–306 (in Russian). MR0438670

[6] V.I. Lebedev, *Quadrature formulas for a sphere of the 25th to the 29th orders of accuracy*, Sibirskii Mat. Zh., **18**:1 (1977), 132–142 (in Russian). MR0448821

[7] V.I. Lebedev, D.N. Laikov, *Quadrature formula of 131st algebraic order of accuracy for a sphere*, Dokl. RAN, **366**:6 (1999), 741–745 (in Russian). MR1711567

[8] S.I. Konyaev, *Gauss type quadratures for a sphere invariant under icosahedral group with inversion*, Mat. Zametki, **25**:4 (1979), 629–634 (in Russian). MR0534305

[9] S.I. Konyaev, *Formulas for numerical integration on a sphere*, Embedding Theorems and Their Applications / Trudy Seminara Akad. S.L. Soboleva, Novosibirsk, **1** (1982), 75–82 (in Russian). MR0738998

[10] S.I. Konyaev, *On invariant quadrature formulae for a sphere*, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **10**:1 (1995), 41–47. MR1327472

[11] I.P. Mysovskikh, *Interpolation Cubature Formulas*, Nauka, Moscow, 1981 (in Russian). MR0656522

[12] A.S. Popov, *Cubature formulae for a sphere which are invariant with respect to the tetrahedral group*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **35**:3 (1995), 369–374. MR1328179

[13] A.S. Popov, *Cubature formulae of high orders of accuracy for a sphere which are invariant with respect to the tetrahedral group*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **36**:4 (1996), 417–421. MR1395117

[14] A.S. Popov, *Cubature formulas on a sphere that are invariant with respect to octahedron rotation groups*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **38**:1 (1998), 30–37. MR1604203

[15] A.S. Popov, *The search for the sphere of the best cubature formulae invariant under octahedral group of rotations*, Siberian J. of Numer. Mathematics, **5**:4 (2002), 367–372 (in Russian). MR2116066

[16] A.S. Popov, *The search for the best cubature formulae invariant under the octahedral group of rotations with inversion for a sphere*, Siberian J. of Numer. Mathematics, **8**:2 (2005), 143–148 (in Russian). Zbl 1112.65310

[17] A.S. Popov, *Cubature formulas on a sphere invariant under the icosahedral rotation group*, Numerical Analysis and Applications, **1**:4 (2008), 355–361.

[18] A.S. Popov, *Cubature formulas on a sphere invariant under the tetrahedral group with inversion*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 372–379 (in Russian). Zbl 1327.65047

[19] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Nauka, Moscow, 1989 (in Russian). MR1018103

[20] V.A. Ditkin, *On some approximate formulas for calculating triple integrals*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **62**:4 (1948), 445–447 (in Russian). MR0027603

[21] V.A. Ditkin, L.A. Lyusternik, *On a method of practical harmonic analysis on a sphere*, Vychisl. Matematika i Vychisl. Tekhnika, Mashgiz, Moscow, **1** (1953), 3–13 (in Russian). MR0068913

Anatolii Stepanovich Popov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrent'eva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: popov@labchem.sscc.ru