S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 199–209 (2017) УДК 517.9
DOI 10.17377/semi.2017.14.020 MSC 35R25, 47J06

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КЛАССЕ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Е.В. ТАБАРИНЦЕВА

Abstract. We study a reverse time problem for a nonlinear differential equation. The exact solution is given to be a piecewise smooth function. We suggest an approach for constructing a stable approximate solution to the inverse problem taking into account the a priori information about the exact solution. We obtain sharp error estimates for the approximate solutions .

Keywords: operator equation, reverse time problem, regularization, error estimate.

1. Введение

В работе предложен оптимальный по порядку метод решения одного класса нелинейных некорректно поставленных задач. Получены точные по порядку оценки погрешности этого метода с использованием априорной информации о принадлежности точного решения некоторому классу равномерной регуляризации. С использованием данных общих результатов получена оценка погрешности метода приближенного решения задачи с обратным временем для параболического уравнения в классе кусочно-гладких функций. Так, как на практике точный класс равномерной регуляризации, как правило, не известен, для выбора параметра регуляризации используются способы, не использующие

Tabarintseva, E.V., On methods to solve an inverse problems for a nonlinear differential equation.

Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

Поступила 17 июня 2016 г., опубликована 14 марта 2017 г.

явно априорную информацию о точном решении. - для построения приближенных решений нелинейной задачи используются модификации принципа невязки и адаптивного выбора параметра регуляризации, основанные на решении соответствующих линейных задач.

Пусть U и F — метрические пространства,$M \in U$, а $C[U,F]$ — пространство непрерывных отображений U в F .

Рассмотрим операторное уравнение

$$A_0 u = f; \quad u \in U; \quad f \in F, \tag{1}$$

где $A_0 \in C[U,F]$ — взаимно-однозначный оператор, отображающий U в F.

Предположим, что при $f = f_0$ существует единственное точное решение u_0 уравнения (1), которое принадлежит множеству M, но точное значение правой части нам не известно, а вместо него даны приближенное значение $f_\delta \in F$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\rho(f_0, f_\delta) \le \delta$. Требуется по исходым данным задачи f_δ и δ определить приближенное решение уравнения (1) и оценить его уклонение от точного решения.

Определение 1. *Семейство операторов $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ будем называть методом приближенного решения уравнения (1) на множестве M, если для любого $\delta \in (0;\delta_0]$ оператор T_δ непрерывно отображает пространство F в U и $T_\delta f_\delta \to u_0$ при $\delta \to 0$ равномерно на множестве M при условии $\rho(A_0u_0, f_\delta) \le \delta$.*

Рассмотрим следующую величину, характеризующую точность метода $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ на множестве M:

$$\Delta_\delta(T_\delta) = \sup\{\rho(u, T_\delta f_\delta) : \quad u \in M,\ \rho(A_0 u, f_\delta) \le \delta\}.$$

Обозначим

$$\omega_1(\tau; M) = \{\rho(u_1, u_2) : \quad u_1, u_2 \in M, \quad \rho(A_0u_1, A_0u_2) \le \tau\}$$

модуль непрерывности оператора, обратного к A_0 , на множестве A_0M.

Определение 2. *Метод $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ будем называть оптимальным по порядку на множестве M, если существует число k такое, что для любого $\delta \in (0;\delta_0]$ выполняется*

$$\Delta_\delta(T_\delta) \le k\omega_1(2\delta; M).$$

2. Задача с обратным временем для линейного дифференциально-операторного уравнения.

Пусть H - гильбертово пространство, A - линейный неограниченный положительно определенный самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H.

Рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi_\tau \in H$ такого, что решение задачи Коши

$$\frac{dv}{dt} = -Av; \quad t \in (\tau; T), \tag{2}$$

$$v(\tau) = \psi_\tau, \qquad 0 < t_0 \le \tau < T,$$

удовлетворяет условию $v(T) = \chi$.

Пусть $B : H \to H$ — линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор, такой, что множество

$$M = BS(0, r) = \{\psi \in H : \|B^{-1}\psi\| \le r\}$$

является классом корректности задачи (2).

Предположим, что при заданном $\chi \in H$ существует точное решение $\psi \in H$ поставленной обратной задачи, принадлежащее множеству M.

Элемент $\chi \in H$ нам не известен, а вместо него дано приближенное значение $\chi_\delta \in H$ такое, что $\|\chi - \chi_\delta\| < \delta$. Требуется по исходым данным задачи определить приближенное решение ψ_δ^τ задачи с обратным временем и оценить его уклонение от точного решения.

Задача с обратным временем сводится к операторному уравнению первого рода

$$A_0^\tau \psi_\tau = \chi, \tag{3}$$

где $A_0^\tau = e^{-A(T-\tau)}$ (см., например, [4]).

3. Построение приближенного решения задачи с обратным временем для линейного дифференциально-операторного уравнения.

Рассмотрим семейство функций $\Phi_\alpha(\mu)$, принимающих действительные значения при $\mu > 0$, кусочно-непрерывных на промежутке $\mu \in (0;\infty)$ $(0 < \alpha < \alpha_0)$. Будем предполагать также, что функции $\Phi_\alpha(\mu)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\sup\{|\Phi_\alpha(e^{-\lambda(T-\tau)})| : \lambda \geq 0\} \leq K_\alpha(\tau) < \infty$, где функция $K_\alpha(t)$ удовлетворяет условию $K_\alpha(\tau_1 + \tau_2) = K_\alpha(\tau_1)K_\alpha(\tau_2)$.

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \Phi_\alpha(e^{-\lambda(T-\tau)})e^{-\lambda(T-\tau)} = 1$ при каждом $\lambda \geq 0$;

3) $\sup\{|\Phi_\alpha(e^{-\lambda(T-\tau)})e^{-\lambda(T-\tau)}| : \lambda \geq 0,\ 0 < \alpha < \alpha_0\} = \ < \infty$.

Следуя работе ([1]), рассмотрим семейство операторов $R_\alpha^{T-\tau}$, действующих в пространстве H по правилу

$$R_\alpha^{T-\tau} = \Phi_\alpha(e^{-A(T-\tau)}). \tag{4}$$

В качестве приближенного решения линейной задачи с обратным временем будем рассматривать элемент

$$\psi_\delta^\tau = R_\alpha^{T-\tau}\chi_\delta \tag{5}$$

при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$.

4. Задача с обратным временем для нелинейного дифференциально-операторного уравнения.

Рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi \in H$ такого, что решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t, u(t)); \quad t \in (t_0; T), \tag{6}$$

$$u(t_0) = \varphi, \quad \varphi \in H, \quad 0 < t_0 < T,$$

удовлетворяет условию $u(T) = \chi$. Здесь $f : [0;T] \times H \to H$ - отображение, удовлетворяющее условию Липшица по переменной u и условию Гельдера по переменной t, т.е. существуют постоянные $K > 0$, $L > 0$, $0 < \gamma < 1$, такие, что

$$\|f(u_1, t_1) - f(u_2, t_2)\|_H \leq L\|u_1 - u_2\|_H + K|t_1 - t_2|^\gamma$$

при всех $t \in [0;T]$, $u_1, u_2 \in H$.

Пусть $B : H \to H$ — линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор, такой, что множество

$$M = BS(0, r) = \{\varphi \in H : \|B^{-1}\varphi\| \le r\}$$

является классом корректности соответствующей линейной задачи.

Предположим, что при заданном $\chi \in H$ существует точное решение $\varphi \in H$ поставленной обратной задачи, принадлежащее множеству M.

Элемент $\chi \in H$ нам не известен, а вместо него дано приближенное значение $\chi_\delta \in H$ такое, что $\|\chi - \chi_\delta\| < \delta$. Требуется по исходым данным задачи определить приближенное решение φ_δ задачи с обратным временем и оценить его уклонение от точного решения.

Задача Коши (6) равносильна интегральному уравнению

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}\varphi + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(t-\tau)} f(\tau, u(\tau)) d\tau \tag{7}$$

(см., например, [4]).

Рассмотрим величины:

$$\omega(M, \delta) = \sup\{\|\varphi_1 - \varphi_2\| : \varphi_1, \varphi_2 \in M, \|\chi_1 - \chi_2\| \le \delta\} -$$

модуль непрерывности для нелинейной обратной задачи,

$$\hat{\omega}(M, \delta) = \sup\{\|\varphi_1 - \varphi_2\| : \varphi_1, \varphi_2 \in M, \|e^{A(T-t_0)}(\varphi_1 - \varphi_2)\| \le \delta\} -$$

модуль непрерывности для линейной обратной задачи.

Справедлива следующая лемма (см. [6]).

Лемма 1. *Существует* $\delta_0 > 0$ *, такое, что для всех* $\delta < \delta_0$ *выполняются неравенства*

$$\hat{\omega}(M, e^{-LT}\delta) \le \omega(M, \delta) \le \hat{\omega}(M, e^{LTe^{LT}}\delta).$$

4.1. **Метод приближенного решения задачи с обратным временем.** Пусть R_α^t - семейство линейных непрерывных самосопряженных операторов, определенных формулой (4).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u^\alpha(t) = R_\alpha^{T-t}\chi - \int\limits_{t}^{T} e^{A(T-\tau)} R_\alpha^{T-t} f(\tau, u^\alpha(\tau)) d\tau. \tag{8}$$

Выполняется

Теорема 1. *Для любого элемента* $\chi \in H$ *интегральное уравнение (8) имеет решение в пространстве непрерывных функций* $C([0;T];H)$.

Доказательство теоремы может быть получено стандартным методом с применением принципа сжимающих отображений.

Обозначим $u_\delta^\alpha(t)$ решение интегрального уравнения

$$u_\delta^\alpha(t) = R_\alpha^{T-t}\chi_\delta - \int\limits_{t}^{T} e^{A(T-\tau)} R_\alpha^{T-t} f(\tau, u_\delta^\alpha(\tau)) d\tau. \tag{9}$$

В качестве приближенного решения нелинейной задачи с обратным временем будем рассматривать элемент

$$\varphi_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(t_0), \tag{10}$$

где $u_\delta^\alpha(t)$ — решение интегрального уравнения (9), при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$.

4.2. **Вспомогательные неравенства.** Выполняются следующие неравенства, которые будут использоваться в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть $u(t)$ — решение интегрального уравнения (7),*

$$P(\tau, t) = e^{A(\tau - t)} G(t),$$

где $G(t)$ — положительно определенный самосопряженный оператор в H, такой, что оператор $P(\tau, t)$ ограничен, $\|P(\tau, t)\| \leq B(\tau, t)$, где функция $B(\tau, t)$ удовлетворяет условию $B(\tau_1, t)B(\tau_2, t) = B(\tau_1 + \tau_2, t)$ $(t_0 \leq t \leq \tau \leq T)$, функция $V(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$V(t) = P(T - t, t)u(T) - \int_t^T P(\tau - t, t) f(\tau, V(\tau)) d\tau. \tag{11}$$

Тогда выполняются неравенства

$$e^{-LTe^{LT}} \|P(T - t, t)u(T)\| \leq \|V(t)\| \leq e^{LT} \|P(T - t, t)u(T)\|; \tag{12}$$

$$e^{-LTe^{LT}} \|G(t)u(t) - u(t)\| \leq \|V(t) - u(t)\| \leq e^{LT} \|G(t)u(t) - u(t)\|. \tag{13}$$

Доказательство леммы приводится в статье ([5]).

4.3. **Оценка погрешности метода приближенного решения.** Обозначим $\varphi^\alpha = u^\alpha(t_0)$, где $u^\alpha(t)$ - решение уравнения (8); $\varphi_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(t_0)$, где $u_\delta^\alpha(t)$- решение уравнения (9)

Рассмотрим величину

$$\Delta_M(\alpha, \delta) = \sup\{\|\varphi_\delta^\alpha - \varphi\| : \varphi \in M, \|\chi - \chi_\delta\| \leq \delta\},$$

характеризующую точность построенного метода приближенного решения нелинейной задачи (6) на множестве M.

Воспользуемся неравенством

$$\Delta_M(\alpha, \delta) \leq \Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha, \delta), \tag{14}$$

где

$$\Delta_2(\alpha, \delta) = \sup_{\|\chi - \chi_\delta\| \leq \delta} \|\varphi_\delta^\alpha - \varphi^\alpha\|, \quad \Delta_1(\alpha) = \sup_{\varphi \in M} \|\varphi^\alpha - \varphi\|.$$

Рассмотрим также величину

$$\hat{\Delta}_M(\alpha, \delta) = \sup\{\|R_\alpha^{T - t_0} \hat{\chi}_\delta - \psi\| : \psi \in M, \|e^{-A(T - t_0)}\psi - \hat{\chi}_\delta\| \leq \delta\} -$$

погрешность приближенного решения соответствующей линейной задачи на множестве M. Будем использовать очевидное неравенство

$$\hat{\Delta}_M(\alpha, \delta) \leq \hat{\Delta}_1(\alpha) + \hat{\Delta}_2(\alpha, \delta), \tag{15}$$

где

$$\hat{\Delta}_2(\alpha,\delta) = \sup_{\|\hat{\chi}-\hat{\chi}_\delta\|\le\delta} \|R_\alpha^{T-t_0}(\hat{\chi}_\delta - \hat{\chi})\|, \quad \hat{\Delta}_1(\alpha) = \sup_{\varphi\in M} \|R_\alpha^{T-t_0}\hat{\chi} - \varphi\|.$$

Из очевидных неравенств

$$\Delta_M(\alpha,\delta) \ge \Delta_2(\alpha,\delta) - \Delta_1(\alpha),$$

$$\Delta_M(\alpha,\delta) \ge \Delta_1(\alpha)$$

следует, что

$$2\Delta_M(\alpha,\delta) \ge \Delta_M(\alpha,\delta) + \Delta_1(\alpha) \ge \Delta_2(\alpha,\delta).$$

Следовательно,

$$2\Delta_M(\alpha,\delta) \ge \Delta_1(\alpha) + \frac{1}{2}\Delta_2(\alpha,\delta) \ge \frac{1}{2}(\Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha,\delta)).$$

Таким образом, выполняются неравенства

$$\frac{1}{4}(\Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha,\delta)) \le \Delta_M(\alpha,\delta) \le \Delta_1(\alpha) + \Delta_2(\alpha,\delta). \tag{16}$$

Аналогично,

$$\frac{1}{4}(\hat{\Delta}_1(\alpha) + \hat{\Delta}_2(\alpha,\delta)) \le \hat{\Delta}_M(\alpha,\delta) \le \hat{\Delta}_1(\alpha) + \hat{\Delta}_2(\alpha,\delta). \tag{17}$$

Из леммы 2 при $B(\tau,t) = e^{-A(T-\tau)}R_\alpha^{T-t}$ следуют неравенства

$$e^{-LTe^{LT}}\hat{\Delta}_1(\alpha) \le \Delta_1(\alpha) \le e^{LT}\hat{\Delta}_1(\alpha)$$

$$e^{-LTe^{LT}}\hat{\Delta}_2(\alpha,\delta) \le \Delta_2(\alpha,\delta) \le e^{LT}\hat{\Delta}_2(\alpha,\delta)$$

Рассмотрим зависимость $\alpha = \alpha_0(\delta)$, такую, что выполняются соотношения
1) $\alpha_0(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$;
2) $\delta\|R_{\alpha_0(\delta)}^{T-t_0}\| \to 0$ при $\delta \to 0$.

Из последних неравенств с учетом (16), (17) вытекает следующая теорема

Теорема 2. *Существует постоянная $\delta_0 > 0$, такая, что для всех $0 < \delta < \delta_0 < 1$ выполняются неравенства*

$$\frac{1}{4}e^{-LTe^{LT}}\hat{\Delta_M}(\alpha_0(\delta),\delta) \le \Delta_M(\alpha_0(\delta),\delta) \le e^{LT}\hat{\Delta_M}(\alpha_0(\delta),\delta)$$

Обозначим $\alpha_{opt}(\delta)$ параметр регуляризации, выбранный из условия

$$\hat{\Delta}_1(\alpha_{opt}(\delta)) = \hat{\Delta}_2(\alpha_{opt}(\delta)),\delta)$$

(квазиоптимальный выбор параметра регуляризации).

В силу теоремы 2 и леммы 1 выполняется

Замечание. Метод приближенного решения нелинейной задачи (6), определенный равенством (10), оптимален по порядку на множестве M тогда и только тогда, когда метод приближенного решения линейной задачи (2), определенный равенством (5), оптимален по порядку на множестве M.

4.4. **Пример: метод проекционной регуляризации.** Обозначим через

$$\{E_\lambda : \lambda \geq 0\}$$

разложение единицы, порожденное оператором A. Пусть A_α - линейный ограниченный оператор в H , определяемый формулой

$$A_\alpha u = \int\limits_0^\alpha \lambda dE_\lambda u.$$

Вместо неустойчивой обратной задачи для уравнения (6) рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(t_0)$, где $u_\delta^\alpha(t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{du_\delta^\alpha(t)}{dt} = -A_\alpha u_\delta^\alpha(t) + E_\alpha f(u_\delta^\alpha(t)), \quad t \in (t_0, T); \quad u_\delta^\alpha(T) = E_\alpha \chi_\delta \tag{18}$$

Из (18) следует, что функция u_δ^α удовлетворяет интегральному уравнению

$$u_\delta^\alpha(t) = e^{A_\alpha(T-t)} E_\alpha \chi_\delta - \int\limits_t^T e^{A_\alpha(\tau - t} E_\alpha f(\tau, u_\delta^\alpha(\tau)) d\tau, \tag{19}$$

т.е. уравнению (9) с оператором $R_\alpha^{T-t} = e^{A_\alpha(T-t)} E_\alpha$.

5. Выбор параметра регуляризации по принципу невязки.

Рассмотрим функцию

$$\nu(\alpha) = \int\limits_\alpha^\infty d(E_\lambda \chi_\delta, \chi_\delta). \tag{20}$$

Рассмотрим уравнение

$$\nu(\alpha) = 4\delta. \tag{21}$$

Лемма 3. Пусть $\|\chi_\delta\| > 4\delta$, тогда уравнение (8) имеет единственное решение.

Обозначим через $\overline{\alpha}(\delta, \chi_\delta)$ решение уравнения (8). Пусть Q_δ - линейный ограниченный оператор в H, определяемый формулой

$$Q_\delta u = \int\limits_0^{\overline{\alpha}(\delta)} \lambda dE_\lambda u; \tag{22}$$

P_δ - линейный ограниченный оператор в H, определяемый формулой

$$P_\delta u = E_{\overline{\alpha}(\delta)} u = \int\limits_0^{\overline{\alpha}(\delta)} dE_\lambda u. \tag{23}$$

Пусть $\|f_\delta\| > 3\delta$. Приближенное решение задачи (2)-(3) определим как $\varphi_\delta = u_\delta(t_0)$, где $u_\delta(t_)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{du^\delta(t)}{dt} = -Q_\delta u^\delta(t) + P_\delta f(u^\delta(t)), \quad t \in [t_0, T]; \tag{24}$$

$$v^\delta(T) = P_\delta \chi_\delta. \tag{25}$$

Таким образом, метод проекционной регуляризации $\{\hat{T}_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$ определим формулой

$$\hat{T}_\delta \chi_\delta = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_\delta, \ \|\chi_\delta\| > 4\delta \\ 0, \ \|\chi_\delta\| \leq 4\delta. \end{array} \right. \tag{26}$$

Имеем следующие оценки:

$$\hat{\Delta}_1(\alpha) = \delta e^{(T-t_0)\alpha^2}, \quad \hat{\Delta}_2(\alpha, \delta) = \frac{r}{\alpha^m}.$$

Используя технику оценок, применяемую в работе [3] для линейной обратной задачи и теорему 2, имеем следующий результат.

Теорема 3. *Существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что*

$$\Delta_M(\overline{\alpha}(\delta), \delta) \leq \frac{18re^{LT}(T-t_0)^{m/2}}{(\ln(r/\delta))^{m/2}}$$

для всех $\delta < \delta_0$.

6. Адаптивный выбор параметра регуляризации

Для выбора параметра регуляризации на практике может быть использована следующая схема, основанная на схеме М. М. Лаврентьева выбора параметра регуляризации, но не использующая явно априорную информацию о точном решении поставленной обратной задачи (см. [7]). Обозначим $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$. Пусть параметр регуляризации выбирается из конечного множества

$$\Lambda_N = \{\varepsilon_i : \ 0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < ... < \varepsilon_N\},$$

причем $\varepsilon_i \leq q \ \ \varepsilon_{i-1} \ \ (i = 1, 2, ..., n)$. Обозначим через $\psi^\delta_{\varepsilon_i} = R_{\varepsilon_i}\chi_\delta$, $\psi_{\varepsilon_i} = R_{\varepsilon_i}\chi$ соответствующие приближенные решения линейной обратной задачи (6). Пусть ψ — точное решение задачи (6), $\psi \in \tilde{M}_r$. Обозначим через ε_{opt} квазиоптимальное значение параметра регуляризации, полученное по схеме М. М. Лаврентьева. Обозначим через $\varepsilon*$ оптимальное значение параметра регуляризации, выбираемое из множества Λ_N, т.е.

$$\varepsilon* = \max\left\{\varepsilon_i : \ \varepsilon_i \in M(\Lambda_N)\right\},$$

где

$$M(\Lambda_N) = \left\{\varepsilon_i \in \Lambda_N : \ r(\varepsilon_i)^m \leq \delta e^{\frac{T-t_0}{(\varepsilon_i)^2}}\right\}.$$

Пусть $M(\Lambda_N) \neq \emptyset$; $\Delta_N \backslash M(\Lambda_N) \neq \emptyset$.

Наряду с $M(\Lambda_N)$, рассмотрим множество

$$M^+(\Lambda_N) = \left\{\varepsilon_i \in \Lambda_N : \ \left\|\psi^\delta_{\varepsilon_i} - \psi^\delta_{\varepsilon_j}\right\| \leq 4\delta e^{\frac{T-t_0}{(\varepsilon_j)^2}} \ \ (j = 0, 1, ..., i)\right\}.$$

Лемма 2. $M(\Lambda_N) \subseteq M^+(\Lambda_N)$

Доказательство. Рассмотрим значения параметра регуляризации $\varepsilon_i, \ \varepsilon_j \in \Lambda_N$; $\varepsilon_i \in M(\Lambda_N)$, $j < i$. Имеем неравенство

$$\begin{aligned} \left\|\psi^\delta_{\varepsilon_i} - \psi^\delta_{\varepsilon_j}\right\| &\leq \left\|\psi^\delta_{\varepsilon_i} - \psi\right\| + \left\|\psi - \psi^\delta_{\varepsilon_j}\right\| + \left\|\psi_{\varepsilon_i} - \psi^\delta_{\varepsilon_j}\right\| \\ &\leq r(\varepsilon_i)^m + \delta e^{\frac{T-t_0}{\varepsilon_i^2}} + r(\varepsilon_j)^m + \delta e^{\frac{T-t_0}{(\varepsilon_j^2}} \leq 4\delta e^{\frac{T-t_0}{(\varepsilon_j^2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varepsilon_i \in M^+(\Lambda_N)$. □

Обоснование одного из правил апостериорного выбора параметра регуляризации дает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть параметр регуляризации выбран из условия

$$\varepsilon^{+} = \max\left\{\varepsilon_i :\ \varepsilon_i \in M^{+}(\Lambda_N)\right\}.$$

Тогда

$$\Delta(\varepsilon^{+}(\delta),\delta) = \sup\left\{\|\psi_\delta^\varepsilon - \psi\| :\ \psi \in \tilde{M}_r;\ \|\chi - \chi_\delta\| \le \delta\right\} \le \frac{(5+q^m)r(T-t_0)^{m/2}}{(\ln(r/\delta))^{m/2}}.$$

Доказательство. Из определения $\varepsilon* = \varepsilon_l$ следует, что для $(\varepsilon_{l+1}$ выполняется неравенство

$$\frac{r(\varepsilon_{i+1})m/2}{e^{\frac{T-t_0}{(\varepsilon_{i+1})^2}}} \ge \delta = \frac{r(\varepsilon_{opt})^{m/2}}{e^{\frac{T-t_0}{(\varepsilon_{opt})^2}}}.$$

Следовательно, в силу монотонности функции $s(x) = \frac{rx^m}{e^{\frac{T-t_0}{x^2}}}$ на промежутке $x \in (0,\infty)$, $\varepsilon_{l+1} \ge \varepsilon_{opt}$ и

$$\delta e^{\frac{T-t_0}{(\varepsilon_{i+1})^2}} \le \delta e^{\frac{T-t_0}{(\varepsilon_{opt}))^2}}.$$

В силу леммы 2, так как $M(\Lambda_N) \subseteq M^{+}(\Lambda_N)$,

$$\varepsilon* = \varepsilon_l = \max\left\{\varepsilon_i :\ \varepsilon_i \in M(\Lambda_N)\right\} \le \varepsilon^{+} = \max\left\{\varepsilon_i :\ \varepsilon_i \in M^{+}(\Lambda_N)\right\}.$$

Из определения $M^{+}(\Lambda_N)$ следует

$$\Delta(\varepsilon^{+}(\delta),\delta) = \sup\left\{\left\|\psi_\delta^{\varepsilon^{+}} - \psi\right\| : \psi \in \tilde{M}_r;\ \|\chi-\chi_\delta\| \le \delta\right\}$$

$$\le \sup\left\{\left\|\psi_\delta^{\varepsilon^{+}} - \psi_\delta^{\varepsilon*}\right\| : \psi \in \tilde{M}_r;\ \|\chi-\chi_\delta\| \le \delta\right\}$$

$$+ \sup\left\{\left\|\psi_\delta^{\varepsilon^{*}} - \psi\right\| : \psi \in \tilde{M}_r;\ \|\chi-\chi_\delta\| \le \delta\right\}$$

$$\le 4\delta e^{\frac{T-t_0}{(\varepsilon_l)^2}} + \delta e^{\frac{T-t_0}{(\varepsilon*)^2}} + r(\varepsilon*)^m \le 4\delta e^{\frac{T-t_0}{(\varepsilon_l)^2}} + \delta e^{\frac{T-t_0}{(\varepsilon*)^2}} + r(q\varepsilon_{i-1})^m$$

$$\le (5+q^m)\Delta(\varepsilon_{opt}(\delta),\delta) \le \frac{(5+q^m)r(T-t_0)^{m/2}}{(\ln(r/\delta))^{m/2}}.$$

Теорема доказана. □

Из доказанной теоремы 4 теоремы 2 следует, что для погрешности метода решения нелинейной задачи с адаптивным выбором параметра регуляризации выполняется оценка

$$\Delta(\varepsilon^{+}(\delta),\delta) \le \frac{(5+q^m)re^{LT}(T-t_0)^{m/2}}{(\ln(r/\delta))^{m/2}}.$$

7. О решении обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе кусочно-гладких функций.

Рассмотрим задачу вычисления функции $u_0(x) = u(t_0, x) \in L_2[-\infty; \infty)$ (начального распределения температуры), где $u(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(t, (u(x,t))), \quad -\infty < x < \infty, \ t \in (0; T); \tag{27}$$

$$u(x,T) = \chi(x). \tag{28}$$

Здесь $\chi(x) \in L_2(-\infty; \infty)$ — заданная функция, $u(\cdot, x) \in C^1(0;T) \cap C[0;T]$; $u(t, \cdot) \in W_2^2(-\infty; \infty)$; $f :: L_2[-\infty; \infty) \to L_2(-\infty; \infty)$ — отображение, заданное с помощью непрерывной числовой функции, удовлетворяющее условию

$$\|f(t_1, u_1) - f(t_2, u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|. + K|t_1 - t_2|^\gamma \quad (0 < \gamma < 1).$$

Таким образом, рассматривается задача (2)-(3) при $H = L_2(-\infty; \infty)$, $A : H \to H$ - линейный оператор, действующий по правилу $Au = -\frac{d^2u}{dx^2}; D(B) = \{u \in L_2(-\infty; \infty) : \frac{d^2u}{dx^2} \in L_2(-\infty; \infty)\}$.

Предположим, что при $\chi = \chi_0(x)$ существует решение поставленной задачи $u_0(x)$ такое, что производная $u_0'(x)$ является кусочно-непрерывной функцией и $u_0(x), u_0'(x) \in L_2(-\infty; \infty)$, но точное значение $\chi_0(x)$ не известно, вместо него дано δ - приближение $\chi_\delta(x) \in L_2(-\infty; \infty)$ такое, что $\|\chi_\delta - \chi_0\| \leq \delta$.

Из результатов работы [3] следует

Лемма 3. *Для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$ $u_0'(x) \in W_2^{1/2-\varepsilon/2}(-\infty; \infty)$ и существует постоянная $C > 0$, такая, что для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$*

$$\|u_0'(x)\|^2_{W_2^{1/2-\varepsilon/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^{(1-\varepsilon)})|\bar{u}_0(\lambda)|^2 d\lambda \leq C/\varepsilon.$$

Здесь $\bar{u}_0(\lambda)$ — образ Фурье функции $u_0(x)$.

С учетом леммы 3 получаем следующую теорему (см. [3])

Теорема 4. *Пусть функции $u_0(x)$; $u_0'(x) \in L_2(-\infty; \infty)$, причем $u_0'(x)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода. Тогда для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$ $u_0(x) \in W_2^{3/2-\varepsilon/2}(-\infty; \infty)$ и*

$$\|u_0(x)\|^2_{W_2^{3/2-\varepsilon/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|)^{3(1-\varepsilon)}|\bar{u}_0(\lambda)|^2 d\lambda \leq a/\varepsilon. \tag{29}$$

Из неравенства (29) слдует, в частности, что для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ точное решение $u_0(x)$ принадлежит множеству

$$M_\varepsilon = \left\{ u \in W_2^{3/2-\varepsilon/2} : \|u\|_{W_2^{3/2-\varepsilon/2}} \leq \frac{a}{\varepsilon} \right\}.$$

Так как значение параметра a не известно, применим к решению задачи (27) – (28) метод проекционной регуляризации с выбором параметра регуляризации по принципу невязки. Из теоремы 2 следует, что для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ оценка погрешности метода проекционной регуляризации на множестве M_ε удовлетворяет неравенству

$$\Delta_{M_\varepsilon}(\delta) \le \frac{\sqrt{a}(T-t_0)^{3/4-\varepsilon/4}}{\sqrt{\varepsilon}\left(\ln\left(\sqrt{a}/\sqrt{\varepsilon}\delta\right)\right)^{3/4-\varepsilon/4}}. \tag{30}$$

Так как неравенство (30) выполняется при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то выберем значение $\varepsilon(\delta)$, минимизирующее эту оценку. Искомое значение будет определено формулой

$$\varepsilon(\delta) = \frac{2a}{\ln\ln(1/\delta)},$$

следовательно, погрешность построенного приближенного решения оценивается величиной

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \le C\sqrt{\ln\ln(1/\delta)}\,\ln^{-3/4}(1/\delta).$$

References

[1] IA.B. Bakushinskii, *A general method of constructing regularizing algorithms for a linear ill-posed equation in Hilbert space*, Zh. Vychisl. Mat. mat. Fiz. **7**:3 (1967), 672—677. MR0217998

[2] V.K. Ivanov , V.V. Vasin , V.P. Tanana, *Theory of linear ill-posed problem and its applications*, VSP, 2002. MR2010817

[3] V.P. Tanana, A.B. Bredikhina, T.S. Kamaltdinova, *On error estimate for an approximate solution for an inverse problem in the class of piecewise smooth functions*, Trudy IMM UrO RAN, **18**:1 (2012), 142–143.

[4] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, 1981. MR0610244

[5] E.V. Tabarintseva, *An approach to solving an ill-posed problem for a nonlinear differential equation*, Trudy IMM UrO RAN, **21**:1 (2015), 231–237. MR3379621

[6] E.V. Tabarintseva, *On an estimate for the modulus of continuity of a nonlinear inverse problem*, Trudy IMM UrO RAN, **19**:1 (2013), 251–257. MR3409362

[7] S. Pereverzev, E. Schock, *On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems*, SIAM J. Numer. Anal. , **43**:5 (2005), 2060–2076. MR2192331

Elena Vladimirovna Tabarintseva
South Urfal State University,
pr. Lenina, 76,
454080, Chelyabinsk, Russia
E-mail address: eltab@rambler.ru