S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 218–251 (2017) УДК 517.958
DOI 10.17377/semi.2017.14.022 MSC 37L15, 35Q31, 76B47

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОТКРЫТЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А.Б. МОРГУЛИС

Abstract. In this article, we study the stability of the steady solutions of boundary value problems for ideal incompressible fluid flows through a given domain. For doing this we generalize Arnold's form of the direct Liapunov method (1966) that was being applied earlier to the cases of fully impermeable boundaries or periodic flows only. We ascertain a number of criteria for Liapunov stability or asymptotic stability as well as new classes of open flows possessing the mentioned properties. In addition, we prove that the occurrence of the recirculation areas is inevitable in rather wide classes of open channel flows.

Keywords: vortex flow, incompressible Euler equations, stability.

Содержание

1. Введение 219
2. Уравнения движения. 220
3. A-течения 221
4. A-течения и граничные условия. 225
5. Устойчивость, сквозные и быстрые течения 230
6. Сдвиговые течение в канале 233
7. Течения Алексеева-Мокина 235
8. Существование безотрывных течений 241
References 248

Morgulis, A.B., Variational principles and stability of the inviscid open flows.

Работа выполнена в рамках проектной части госзадания No. 1.1398.2014/K..
Поступила 17 августа 2016 г., опубликована 24 марта 2017 г.

1. Введение

Настоящая статья дополняет и развивает результаты предшествующих работ [4, 37, 38, 35, 21, 20, 39] в области теории устойчивости *открытых течений* идеальной несжимаемой жидкости. Под открытым понимается течение, обменивающееся материальными частицами с «внешней средой». Такой обмен происходит, если граница области течения разделяется на непроницаемую и проницаемую части, причём последняя разбивается на вход и выход потока (см. рис. 1).

Рис. 1. Открытые течения. Прямой канал и кольцевая область. S^+ – вход потока, S^- – выход.

Открытые течения весьма естественны: реальные каналы и трубы конечны и ограничены входным и выходным сечениями. На входе и выходе трубы могут быть, например, пористые пробки, сквозь которые нагнетается и отсасывается жидкость, или радиальный поток может подаваться через пористые стенки зазора между плоскостями, цилиндрами и т.д. Открытые течения рассматриваются в гемодинамике, в теории вихревых камер и теплогенераторов, и во многих других инженерно-физических исследованиях. Однако, усилия математической гидродинамики сконцентрированы, в основном, на классических задачах, где границы полностью непроницаемы, или удалены на бесконечность, или заменены условиями периодичности, см. например, [52]. Исключение составляет лишь проблема Лере, см. обзор [29] и приведённые там ссылки.

Ряд методов и результатов теории устойчивости и бифуркаций могут быть единообразно применены к исследованию динамики *вязкой* жидкости как с непроницаемой, так и с открытой границей (см. например, [51, 50, 6, 27], [13], [14], [40, 41]). Тем не менее, понимание влияния открытой границы, как правило, требует дополнительного анализа. В этом контексте представляется полезным обратиться к фундаментальной модели гидродинамики – уравнениям Эйлера идеальной (невязкой) однородной несжимаемой жидкости, поскольку именно в пределе нулевой вязкости специфика открытых границ проявляется особенно рельефно. Так, динамическую систему, порождаемую идеальной жидкостью, обычно считают консервативной, и она действительно гамильтонова [11], [12], и подчиняется законам сохранения энергии и циркуляций (см., например, [31]), но лишь до тех пор, пока нет открытых границ. В открытом течении законы сохранения действуют лишь локально, при этом материальные частицы, входящие в область течения, вносят в нее энергию и вихрь, а уходящие – уносят. В результате включаются и накачка, и диссипация энергии, причем механизм последней совершенно отличен от привычного механизма вязкой диссипации. Таким образом, идеальная несжимаемая жидкость с открытой границей – неконсервативная система, и от неё следует ожидать динамических явлений «общего положения», не присущих консервативным системам, таких, как асимптотическая устойчивость равновесий или возбуждение автоколебаний.

В настоящей статье речь идёт об асимптотической устойчивости стационарных решений двумерных начально краевых задач протекания идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область. С целью исследования этого явления устанавливаются вариационные принципы, обобщающие на открытые течения известные вариационные принципы В.И. Арнольда [10]. Соответствующие целевые функционалы оказываются функционалами Ляпунова динамической системы, ассоциированной с определённым типом граничных условий начально-краевой задачи протекания. В отличие от случая полностью непроницаемой границы, эти функционалы Ляпунова не постоянны и монотонно убывают вдоль траекторий. Отсюда и из результатов [37, 38, 35, 21, 20, 39] выводятся различные условия асимптотической устойчивости стационарных решений задачи протекания. На этой основе устанавливаются новые конкретные классы течений, обладающих асимптотической устойчивостью. Важной общей чертой всех этих течений оказывается полное обновление состава материальных частиц потока за конечное время. В связи с этим в статье рассматривается общий вопрос о существовании таких течений при заданных граничных условиях, и указываются необходимые для положительного ответа условия. Нарушение этих условий влечёт появление течений с целыми областями, заполненными замкнутыми линиями тока. Возникновение таких областей при изменении данных задачи протекания можно, следуя [19], трактовать как своего рода «невязкий отрыв». В настоящей статье установлено, что невязкий отрыв открытого течения в канале неизбежен при граничных условиях, образующих весьма широкие классы.

2. Уравнения движения.

Уравнения движения идеальной несжимаемой и однородной жидкости – уравнения Эйлера – имеют вид

$$\mathbf{v}_t + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla H; \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \ \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}; \quad H = P + \mathbf{v}^2/2, \tag{1}$$

где векторное поле $\mathbf{v}$ – скорость течения, $\times$ – знак векторного произведения, – скалярное поле, называемое *функцией Бернулли*. Скорость и функция Бернулли неизвестны, и должны быть определены в каждый момент времени t в области D, занятой жидкостью (область течения). В наших рассмотрениях область D – заданная, неизменная, ограниченная и кусочно гладкая (если иные свойства области не указаны явно).

Уравнение (1) записано *в форме Громеки-Ламба*; подстановка

$$H = P + \mathbf{v}^2/2$$

приводит его к обычному уравнению Эйлера

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla P, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

так что скаляр P представляет собой давление.

Непроницаемость границы $S = \partial D$ для жидкости выражается граничным условием

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } S \ \forall t,$$

где $\mathbf{n}$ – орт нормали на S (по умолчанию, внешней). Известно, что начально-краевая задача для уравнения (1) в области с непроницаемой границей однозначно разрешима, по крайней мере, «в малом».

Если граница области течения состоит из непроницаемой и проницаемой части, так что $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \neq 0$ на S, то такое течение назовём открытым. В дальнейшем изложении будем ещё употреблять определение «открытый» для обозначения области открытого течения или границы такой области.

Задания одной только нормальной скорости недостаточно для правильной постановки начально-краевой задачи для уравнения (1) в открытой области, и требуются дополнительные граничные условия, см. раздел 4.

В настоящей статье рассматриваются плоские течения, так что $D \subset \mathbb{R}^2$. В плоском течении, скажем, на плоскости $\{x_3 = 0\}$,

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)(x_1, x_2); \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = (0, 0, \omega), \quad \omega = v_{2x_1} - v_{1x_2},$$

(где нижние индексы x_1, x_2 обозначают частные производные по одноимённым координатам), и уравнение вихря принимает вид уравнения переноса скаляра ω:

$$\omega_t + \mathbf{v} \cdot \nabla\omega = 0. \tag{3}$$

Ввиду несжимаемости жидкости, локально в области течения имеет место представление

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = \nabla^{\perp}\psi(\cdot, t), \ \nabla^{\perp}\psi = (\psi_{x_2}, -\psi_{x_1}), \quad -\Delta\psi = \omega, \tag{4}$$

где ψ – скаляр, называемый функцией тока, и Δ – оператор Лапласа. Для того, чтобы функция тока была определена не только локально, но и в целом, необходимо и достаточно, чтобы поток несжимаемой жидкости через каждую компоненту связности границы был равен нулю. Это условие выполнено, например, если проницаемы лишь одна из компонент связности границы.

Уравнения (3) – (4) (уравнения вихря) в односвязной области эквивалентны системе Эйлера (1). В случае многосвязной области это неверно, так как однозначность давления, вообще говоря, не следует из одного уравнения вихря, и его следует дополнить уравнениями относительно проекции поля скорости на подпространство $\{\mathbf{h} = \nabla^{\perp}\phi : \Delta\phi = 0, \ d\phi|_S = 0\}$, размерность которого равна одномерному числу Бетти области течения.

3. А-течения

Скорость, функцию тока и вихрь плоского стационарного течения обозначим $\mathbf{V}, \Psi, \Omega$, соответственно. Предположим, что $\Psi \in \mathrm{C}^1(\bar{D}) \cap \mathrm{C}^2(D)$, $\Omega \in \mathrm{C}(\bar{D})$. Введём обозанчения $\Omega^* = \inf\limits_D \Omega$, $\quad \Omega_* = \sup\limits_D \Omega$.

Из плоского стационарного уравнения вихря (см. (3)) вытекает функциональная зависимость между вихрем и функцией тока.

Определение 1. *Стационарное течение* $\mathbf{V}$ *в области* D *назовём* А-*течением, если на интервале* (Ω^*, Ω_*) *определена однозначная и монотонная скалярная функция* F*, такая, что функциональная зависимость между вихрем и функцией тока всюду в* D *имеет вид* $\Psi = F(\Omega)$.

Заметим, что из определения А−течения следует существование глобальной и однозначной функции тока $\Psi = F \circ \Omega$. В последующих обсуждениях А-течений будем всегда предполагать, что $F \in \mathrm{C}^1[\Omega^*, \Omega_*]$.

Пример 1. Определим сдвиговое течение, полагая $\mathbf{V}(x,y) = (U(y), 0)$ относительно некоторой декартовой системы координат Oxy, где $U \in \mathrm{C}^\infty[0,1]$. Областью такого течения можно считать бесконечный прямой канал $\{(x,y) : -\infty < x < \infty, 0 < y < 1\}$ или его произвольную подобласть. Если $U''(y) \neq 0$, $y \in (0,1)$, то поле $\mathbf{V}$ определяет А-течение, в котором

$$\Psi = F(\Omega), \text{ где } \Omega(x,y) = -U'(y), \; F(r) = \int\limits_0^{Y(r)} U(s)ds,$$

и Y – функция, обратная к $-U'$. Заметим, что условие $U''(y) \neq 0$, $y \in (0,1)$, не необходимо. В самом деле, при произвольном $\alpha > \pi$ профиль $\sin \alpha y$ имеет точку перегиба в интервале $(0,1)$, и, несмотря на это, задает сдвиговое А-течение, в котором $\Psi = \alpha^{-2}\Omega$.

Класс А-течений выделил В.И. Арнольд [11, 10], см. также [12]. Он рассмотрел течения с непроницаемыми границами или обладающие пространственной периодичностью и установил экстремальные свойства А-течений по отношению к вариационным принципам двух типов. В первом из них целевая функция – кинетическая энергии жидкости на листе равнозавихренных полей, а во втором – некоторая «связка» интегралов энергии и вихря, но без ограничения равнозавихренности. Распространим вариационные принципы второго типа на открытые А-течения.

Рассмотрим А-течение $(\Psi, \mathbf{V}, \Omega)$, где $\Psi = F(\Omega)$. Возмущенные поля вихря и скорости обозначим $\omega = \Omega + \xi$ и $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}$, где $\xi, \mathbf{u}$ – возмущения. Предположим, что $\xi = \operatorname{rot} \mathbf{u} \in \mathrm{C}(\bar{D}), \mathbf{u} \in \mathrm{C}(\bar{D}) \cap \mathrm{C}^1(D)$. Пространство всех векторных полей $\mathbf{u}$, обладающих такой регулярностью в области D, обозначим $\mathcal{V} = \mathcal{V}(D)$.

Пусть $\tilde{F}$ – C^1-продолжение F с отрезка $[\Omega^*, \Omega_*]$ на всю вещественную ось. Зафиксируем какое-нибудь из таких продолжений, и будем использовать его в дальнейших построениях вместо F, опуская знак тильды. Определим функционал $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{v})$, полагая

$$\mathcal{W}(\mathbf{v}) = \int\limits_D \left(\mathbf{v}^2/2 - F_0(\omega)\right) \, dx + \oint\limits_S \Psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}; \quad F_0 = \int F(r)dr. \tag{1}$$

Предложение 1. А-*течения – критические точки функционалов (1).*

Доказательство. Выполняются равенства

$$\oint\limits_S \Psi \mathbf{u} \cdot \mathbf{dx} = \int\limits_D (\nabla\Psi \times \mathbf{u} + \Psi\xi) \, dz = \int\limits_D (F(\Omega)\xi - \mathbf{V}\mathbf{u}) \, dz, \tag{2}$$

где $F(\Omega) = F_0'(\Omega) = \Psi$. Отсюда

$$\delta\mathcal{W}\big|_{\mathbf{v}=\mathbf{V}} = \int\limits_D (\mathbf{V}\mathbf{u} - F_0'(\Omega)\xi) \, dz + \oint\limits_S \Psi \mathbf{u} \cdot \mathbf{dx} = 0.$$

■

Вариационный принцип, вытекающий из предложения 1, выполняется как для открытых, так и для непроницаемых границ. Если считать область течения

$N+1$-связной, а её границу непроницаемой, и потребовать равенства циркуляций полей $\mathbf{V}$ и $\mathbf{v}$ вокруг всех граничных контуров, то контурный интеграл в правой части (1) можно отбросить, и получится известный вариационный принцип [10]. Все сказанное останется в силе и в том случае, если предполагается совпадение циркуляций полей $\mathbf{V}$ и $\mathbf{v}$ вокруг лишь N из $N+1$ имеющихся граничных контуров, но функция тока стационарного течения калибруется так, чтобы она равнялась нулю на том граничном контуре, вокруг которого допускаются различные циркуляции полей $\mathbf{V}$ и $\mathbf{v}$.

Предложение 1 верно и без предположений о монотонности F, но, приняв такие предположения, можно установить экстремальные свойства А-течений. Если А-течение определяет убывающую функцию $\Psi = F(\Omega)$, положим

$$C^- = \sup_{[\Omega^*,\Omega_*]} (-F'), \quad c^- = \inf_{[\Omega^*,\Omega_*]} (-F') \geqslant 0; \tag{3}$$

в противном случае –

$$C^+ = \sup_{[\Omega_*,\Omega^*]} F', \quad c^+ = \inf_{[\Omega_*,\Omega^*]} F' \geqslant 0. \tag{4}$$

Не теряя общности, считаем, что F продолжена на вещественную ось с сохранением верхней и нижней граней своей производной, и F_0, как и прежде, первообразная этого продолжения. Определим функцию двух вещественных переменных $\Phi = \Phi(R,r)$, полагая

$$\Phi(R,r) = F_0(R+r) - F_0'(R)r - F_0(R). \tag{5}$$

В таком случае

$$c^{\pm} r^2/2 \leq \pm\Phi(R,r) \leq C^{\pm} r^2/2. \tag{6}$$

Определение 2. А-*течение* $\mathbf{V}$ *в области* D *назовём минимальным, если поле* $\mathbf{V}$ *доставляет глобальный минимум функционалу (1) в классе полей* $\mathbf{v} : \mathbf{v} - \mathbf{V} \in \mathcal{V}$.

Предложение 2. А-*течение* $\mathbf{V}$ *с убывающей функцией* F *минимально, причём*

$$\int\limits_D \left(\mathbf{u}^2 + c^-\xi^2\right) dz \leq 2(\mathcal{W}(\mathbf{v}) - \mathcal{W}(\mathbf{V})) \leq \int\limits_D \left(\mathbf{u}^2 + C^-\xi^2\right) dz. \tag{7}$$

Доказательство. Из определения (1) с помощью преобразования (2) выводим равенство

$$\mathcal{W}(\mathbf{V}+\mathbf{u}) - \mathcal{W}(\mathbf{V}) = \int\limits_D \left(\mathbf{u}^2/2 - \Phi(\Omega,\xi)\right) dz. \tag{8}$$

Отсюда, с учётом оценок (6), следует (7).

■

Обратимся к максимизации функционала $\mathcal{W}$.

Предложение 3. *Для любого* А-*течения с возрастающей функцией* F *имеют место оценки*

$$\int\limits_D \left(c^+\xi^2 - \mathbf{u}^2\right) dz \leq 2\left(\mathcal{W}(\mathbf{V}) - \mathcal{W}(\mathbf{v})\right) \leq \int\limits_D \left(C^+\xi^2 - \mathbf{u}^2\right) dz; \tag{9}$$

Как видно из оценок (9), максимизация функционала $\mathcal{W}$ требует сужения области его определения по сравнению с той, что использовалась в случае минимизации. Пусть, например, выбрано некоторое множество $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$, и

$$\Lambda_*(\mathcal{K}) = \sup \left\{ \int_D \mathbf{u}^2\, dz,\ \mathbf{u} \in \mathcal{K},\ \int_D \xi^2\, dz = 1,\ \xi = \operatorname{rot} \mathbf{u} \right\}.$$

Предложение 4. *Пусть* А*-течение в области D таково, что функция F возрастает, причём $c^+ > \Lambda_*(\mathcal{K})$. Тогда*

$$(c^+ - \Lambda_*(\mathcal{K})) \int_D \xi^2\, dz \le 2\,(\mathcal{W}(\mathbf{V}) - \mathcal{W}(\mathbf{v})) \le C^+ \int_D \xi^2\, dz \tag{10}$$

для всех $\mathbf{v} :\ \mathbf{v} - \mathbf{V} \in \mathcal{K}$.

Доказательство непосредственно следует из 9 и определения Λ_*.

В условиях предложения 4 поле $\mathbf{V}$ доставляет глобальный максимум функционалу (1) в классе полей $\mathbf{v}$, таких, что $\mathbf{v} - \mathbf{V} \in \mathcal{K} \subset \mathcal{V}$. В таком случае будем говорить, что А-течение $\mathbf{V}$ в области D *максимально относительно* $\mathcal{K}$.

Пусть, например, D – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $S = \partial D$. Положим

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \stackrel{def}{=} \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} :\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\ \mathbf{u} \parallel S,\ \oint_{S_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{dx} = 0,\ i = 1, \dots, N\}, \tag{11}$$

где $\mathbf{u} \parallel S$ означает $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_S = 0$, $N+1$ – число компонент связности $S = \partial D$, S_i, $i = 0, \dots, N$, – компоненты связности S, причём $S_0 = S$, если D односвязна. Таким образом, в случае односвязной области D,

$$\mathcal{K}_0 = \{\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\ \mathbf{u} \parallel S\}; \quad \Lambda_*(\mathcal{K}_0) = \lambda_*^{-1}(D),$$

где $\lambda_*(D)$ – минимальное собственное значение задачи

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0,\ \text{в } D, \quad \varphi|_S = 0. \tag{12}$$

В общем случае $\Lambda_*(\mathcal{K}_0) > \lambda_*^{-1}(D)$.

Из определения подпространства $\mathcal{K}_0$ и предложения 4 вытекает

Предложение 5. *(i) Пусть* А*-течение в односвязной области таково, что функция F возрастает, причём $c^+ > \lambda_*^{-1}(D)$. Тогда это* А*-течение максимально относительно подпространства $\mathcal{K}$, и*

$$(c^+ - \lambda_*^{-1}(D)) \int_D \xi^2\, dz \le 2\,(\mathcal{W}(\mathbf{V}) - \mathcal{W}(\mathbf{v})) \le C^+ \int_D \xi^2\, dz. \tag{13}$$

(ii) Пусть А*-течение в многосвязной области таково, что функция F возрастает. Пусть $c^+ > \Lambda_*(\mathcal{K}_0)$. Тогда такое* А*-течение максимально относительно $\mathcal{K}_0$, и*

$$(c^+ - \Lambda_*(\mathcal{K}_0)) \int_D \xi^2\, dz \le 2\,(\mathcal{W}(\mathbf{V}) - \mathcal{W}(\mathbf{v})) \le C^+ \int_D \xi^2\, dz. \tag{14}$$

Пример 2. Рассмотрим два сдвиговых течения (см. пример 1) с профилями

$$U_1(y) = \mathrm{e}^{\alpha y}, \quad U_2(y) = \sin(\alpha y), \quad \alpha > 0$$

в области
$$D \subset C = \{(x, y) : 0 < y < 1\}.$$

В случае течения с профилем U_1 имеем $\Psi = -\alpha^{-2}\Omega$, и это А$-$течение минимально при любом выборе $D \subset C$. В случае течения с профилем U_2 имеем $\Psi = \alpha^{-2}\Omega$, и это А$-$течение $\mathcal{K}_0-$максимально при любом выборе односвязной области $D \subset C$, если $\alpha < \pi$.

Пример 3. Пусть теперь $D = C$ и поставлены условия $2L-$ периодичности по координате x. Тогда профиль U_1 по-прежнему определяет минимальное А$-$течение. Обратившись к профилю U_2, следует заметить, что область течения теперь неодносвязна, и потому приходится говорить об относительной максимальности. Положим

$$\mathcal{K}_0 = \{\mathbf{u} = (u, v) \in \mathcal{V} : \ \mathbf{u}(x + 2L, y) = \mathbf{u}(x, y), \ v|_{y=0,1} = 0, \int\limits_{-L}^{L} u(x, 1)dx = 0\}.$$

Поля, принадлежащие $\mathcal{K}_0$, в таком случае допускают представление
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \bar{u}\mathbf{e}_1,$$
где $\mathbf{e}_1$ – орт оси Ox, параллельной стенкам канала,
$$\mathbf{u}_0 \in \mathcal{J}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{w} = \nabla^{\perp}\eta : \ \eta|_{y=0,1} = 0, \ \eta(x + 2L, y) = \eta(x, y)\},$$
и $\bar{u}$ – постоянная, такая, что $\mathbf{u}_0 + \bar{u}\mathbf{e}_1 \in \mathcal{K}_0$. Отсюда видно, что
$$\Lambda_*(\mathcal{K}_0) = 4\pi^{-2},$$
и профиль U_2 определяет А$-$течение, минимальное относительно $\mathcal{K}_0$, при условии
$$\alpha < \Lambda_1^{-1/2}(\mathcal{K}_0) = \pi/2.$$
Однако, ввиду трансляционной инвариантности задачи, максимизация относительно подпространства $\mathcal{K}_0$ представляется менее физически адекватной, чем максимизация относительно подпространства полей с нулевым расходом. Выше мы обозначили это подпространство через $\mathcal{J}_0$. Нетрудно проверить, что А$-$течение с профилем U_2 максимально относительно $\mathcal{J}_0$ при условии $\alpha < \pi$.

4. А-течения и граничные условия.

В случае непроницаемой границы функционал $\mathcal{W}$ – константа движения жидкости. Отсюда и из экстремальных свойств А-течений вытекают известные теоремы Арнольда об устойчивости [10]. В случае открытых течений функционал $\mathcal{W}$, вообще говоря, не постоянен, и его изменение зависит от потоков энергии и завихренности через открытую границу. Баланс последних зависит от граничных условий, которые могут быть поставлены несколькими способами. Один из них приводит к монотонному изменению $\mathcal{W}$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ – заданная область течения и $t > 0$. Имеет место разбиение $S = S_t^+ \cup S_t^{\cup} S_t^0 \cup \Sigma = \partial D$, где

(1) $\quad S_t^+ = \{x \in S : (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(x, t) < 0\}$ – вход потока;

(2) $\quad S_t^- = \{x \in S : (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(x, t) > 0\}$ – выход потока;

(3) $\quad S_t^0 = \{x \in S : (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(x, t) = 0\}$ – непроницаемая стенка,

и Σ – множество точек, в которых не определена нормаль к S. Если нормальная скорость на границе задана, то задано и разбиение (1)-(3). Пусть теперь $D \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим краевую задачу в D, состоящую из уравнений движения (1) и граничных условий

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{S \setminus \Sigma} = \gamma \not\equiv 0 \quad \omega = \omega^+|_{S^+}. \tag{4}$$

Ограничимся не зависящими от времени данными γ, ω^+, тогда вход, выход и непроницаемая стенка постоянны, так что $S_t^+ = S^+$, $S_t^+ = S^-$ и $S_t^0 = S^0$ для всех $t > 0$, где S^+, S^-, S^0 не зависят от t. Рассмотрение зависящих от времени граничных условий (4), разумеется, имеет смысл, но выходит за рамки настоящей статьи.

Здесь представляется уместной краткая историческая справка. Вопрос о формулировке общей начально-краевой задачи протекания идеальной жидкости сквозь область ставился ещё Н.Е. Кочиным [30], но первый законченный результат получил В.И. Юдович [48]. Им была установлена *глобальная* теорема существования и единственности классического решения уравнений Эйлера в плоской области при заданной начальной скорости и при граничных условиях (4)(зависящих, вообще говоря, от t). М.Р. Уховский [47] установил аналогичный результат для осесимметричной задачи. Ввиду этих обстоятельств, назовём двумерную краевую задачу (1,4) задачей Юдовича, а граничные условия (4) – граничными условиями Юдовича.

Результаты [48, 47] включали ряд ограничений, в частности, область течения предполагалась гладкой и многосвязной, а нормальная скорость – заданной так, что вход и выход представляют собой компоненты связности границы. Эти ограничения существенно ослабил Г.В. Алексеев [1] – [4]. В частности, ему удалось избавиться от предположения о совпадении входа и выхода потока с компонентами связности границы, а также ввести в рассмотрение кусочно гладкие области типа криволинейного четырёхугольника, что позволило рассмотреть задачу Юдовича в криволинейном канале. Кроме того, в указанном цикле работ впервые установлена глобальная теорема существования обобщённого стационарного решения плоской и осесимметричной задач Юдовича в односвязной области, а также теоремы о единственности и гладкости стационарного решения в криволинейном канале.

А.В. Кажихов [26] обобщил граничные условия Юдовича на трёхмерные течения (в этом случае на входе задается лишь *касательная* компонента вихря), а также исследовал некоторые другие постановки начально-краевых задач протекания, включая, например, задание нормальной скорости на всей границе и тангенциальной скорости на входе (ссылки см. в [9] и [33]). Однако глобальная разрешимость последней задачи не установлена даже в двумерном случае, и примеры коллапса локальных решений также неизвестны. Для трехмерных задач теоремы о глобальной разрешимости неизвестны ни для одного типа граничных условий.

Последующие исследования разрешимости задач протекания идеальной жидкости сквозь область охватывают вопросы существования и единственности обобщённых решений [46], [33, 34, 46], течения с источниками и стоками [15], задачи с условием Навье на входе [7], теоремы существования трёхмерных решений стационарных задач протекания [36], вопросы качественного характера о строении и ветвлении плоских стационарных решений [45]. Исследована также задача динамики сверхпроводящих вихрей в постановке, аналогичная задаче Юдовича [8].

Условимся в дальнейших обсуждениях граничных условий (4) нормировать нормальную скорость так, чтобы расход жидкости сквозь область течения был равен 1.

Пусть граничные условия Юдовича при некоторых данных (γ, ω^+) допускают А-течение $\Omega, \mathbf{V}, \Psi$, причём $\Psi = F(\Omega)$. Пусть при тех же граничных данных задача Юдовича имеет нестационарное решение, которому соответствуют поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t)$ и поле вихря $\omega = \omega(x,t)$, причём $\mathbf{v}(\cdot,t) \in \mathcal{V}$ для всех t. Пусть $\xi = \omega - \Omega$, $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$, и $\mathcal{W}$ – функционал (1). Докажем монотонность $\mathcal{W}(\mathbf{v})$ как функции t.

Лемма 1. *Производная функционала (1) в силу задачи Юдовича имеет вид*

$$\dot{\mathcal{W}}(\mathbf{v}) = \int\limits_{S^-} \Phi(\Omega, \xi)\gamma\, dS \tag{5}$$

где Φ – функция (5), при этом

$$c^\pm \int\limits_{S^-} \xi^2\gamma\, dS \le \pm 2\dot{\mathcal{W}} \le C^\pm \int\limits_{S^-} \xi^2\gamma\, dS, \tag{6}$$

где $c^\pm$, $C^\pm$ – константы из оценки (6).

Доказательство. Внутри канала нет источников завихренности и энергии, поэтому

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D F_0(\omega)\, dz = -\int\limits_S F_0(\omega)\gamma\, dS, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D \mathbf{v}^2/2\, dz = -\int\limits_S B\gamma\, dS, \tag{8}$$

где $B = P + \mathbf{v}^2/2$ – функция Бернулли. В частности,

$$\int\limits_{S^+} \gamma F_0(\Omega)\, dS + \int\limits_{S^-} \gamma F_0(\Omega)\, dS = 0 \tag{9}$$

для любого стационарного течения. При этом в равенствах (7) и (9) интегралы по входу одинаковы (так как $\omega = \Omega$ на S^+ согласно граничному условию). Отсюда выводим равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D F_0(\omega)\, dz = -\int\limits_{S^-} \left(F_0(\omega) - F_0(\Omega)\right)\gamma\, dS. \tag{10}$$

Далее, граница канала неподвижна, а потому

$$\frac{d}{dt}\oint\limits_S \Psi\mathbf{v}\cdot\mathbf{dx} = \oint\limits_S \Psi\mathbf{v}_t\cdot\mathbf{dx} = -\oint\limits_S \Psi\left(\nabla B + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{dx}.$$

Здесь

$$\oint\limits_S \Psi\nabla B\cdot\mathbf{dx}=\int\limits_D \mathrm{rot}\,(\Psi\nabla B)\;dz=\int\limits_D (\nabla\Psi\times\nabla B)\;dz=-\int\limits_S B\gamma\,dS;$$

$$\oint\limits_S \Psi\,(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{dx}=\oint\limits_S \Psi\omega\,(\mathbf{v}\times\mathbf{dx})=\int\limits_S \Psi\omega\gamma dS=\int\limits_S F(\Omega)(\Omega+\xi)\gamma dS.$$

Заметим теперь, что равенство (9) имеет место при произвольной функции F_0, поэтому

$$\int\limits_S F(\Omega)\Omega\gamma dS=0.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{d}{dt}\oint\limits_S \Psi\mathbf{v}\cdot\mathbf{dx}=\int\limits_S \left(B-F_0'(\Omega)\xi\right)\gamma\,dS. \tag{11}$$

Сложим равенства (11) и (8), вычтем из их суммы (10), и получим (5). ■

Знаком нормы обозначим стандартную норму скалярного или векторного поля в пространстве $\mathrm{L}_2(D)$.

Лемма 2. ***(i)*** *Предположим, что некоторая задача Юдовича определяет* А-*течение* $\mathbf{V}$ *с убывающей* F. *Тогда эта задача допускает функционал Ляпунова* $\mathcal{W}(\mathbf{v})-\mathcal{W}(\mathbf{V})$. *При этом имеет место априорная оценка возмущений*

$$\|\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2+c^-\|\xi(\cdot,t)\|^2\le\|\mathbf{u}(\cdot,0)\|^2+C^-\|\xi(\cdot,0)\|^2,\ t>0, \tag{12}$$

где константы C^-,c^- *определены в (3).*
(ii) *Предположим, что некоторая задача Юдовича в односвязной области определяет* А-*течение* $\mathbf{V}$ *с возрастающей* F, *причём* $c^+>\lambda_*^{-1}(D)$. *Тогда эта задача допускает функционал Ляпунова* $\mathcal{W}(\mathbf{V})-\mathcal{W}(\mathbf{v})$. *При этом имеет место априорная оценка возмущений:*

$$\|\xi(\cdot,t)\|^2\le C\|\xi(\cdot,0)\|^2,\ t>0,\quad C=C^+(c^+-\lambda_*^{-1}(D))^{-1}. \tag{13}$$

где константы C^+,c^+ *определены в (4).*
(iii) *Предположим, что задача Юдовича в многосвязной области поставлена так, что что* $S^+\cup S^-\subset S_0$, *где* S_0 *– одна из компонент связности* $S=\partial D$, *и при этом имеет стационарное решение, определяющее* А-*течение с возрастающей* F. *Пусть* $c^+>\Lambda_*(D)$. *Тогда эта задача допускает функционал Ляпунова* $\mathcal{W}(\mathbf{V})-\mathcal{W}(\mathbf{v})$ *на множестве решений* $\mathbf{v}$, *таких, что*

$$\oint\limits_{S_j}\mathbf{v}(\cdot,0)\cdot\mathbf{dx}=\int\limits_{S_j}\mathbf{V}\cdot\mathbf{dx},\quad j=1,\dots,N, \tag{14}$$

где $N\ge 1$ *– 1-мерное число Бетти области* D, *и в этом классе решений верна оценка возмущений*

$$\|\xi(\cdot,t)\|^2\le C\|\xi(\cdot,0)\|^2,\ t>0,\quad C=C^+\left(c^+-\Lambda_*(D)\right)^{-1}. \tag{15}$$

Доказательство. Утверждения пп. (i-iii) следуют из леммы 1, и предложений 2 и 5; при этом пп. (i-ii) получаются непосредственно, а п. (iii) опирается на дополнительное предположение (14), которое влечёт включение $\mathbf{v}(\cdot,t)-\mathbf{V}\in\mathcal{K}_0(D)$ для всех $t\ge 0$. Докажем, что ограничение (14) определяет непустое множество решений. С этой целю проинтегрируем уравнения Эйлера вокруг компоненты связности $S_j \subset S$, $j = 0, \dots, N$, и получим равенства

$$\frac{d}{dt}\oint_{S_j} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} + \int_{S_j} \omega\gamma \, ds = 0. \tag{16}$$

По предположению о расположении входа и выхода, все кривые S_j, $j = 1, \dots, N$ непроницаемы, а потому циркуляции вокруг каждой из них сохраняются. ■

Замечание 1. Как видно из (16), циркуляции вокруг проницаемых компонент связности границы, вообще говоря, не сохраняются. Например, если граничные условия (4) поставлены так, что

$$\int_{S_j \cap S^+} \omega^+ \gamma \, ds \neq 0, \quad S_j \cap S^- = \varnothing,$$

то циркуляция вокруг S_j соответствующего решения задачи Юдовича растёт линейно по времени (при независящих от времени граничных данных). Отсюда, в частности, вытекает, что стационарная задача Юдовича в многосвязной области не имеет, вообще говоря, решения.

Замечание 2. По определению, А-течение обладает однозначной глобальной функцией тока. Поэтому для того, чтобы данные задачи Юдовича определяли А-течение необходимо, чтобы поток жидкости сквозь каждую компоненту связности $S_j \subset S$ был равен нулю.

Замечание 3. В условиях леммы 2 существует бесконечно много функционалов Ляпунова, соответствующих различным продолжениям $\tilde{F}$.

К А-течениям примыкает класс течений с постоянным вихрем: свойства этих классов течений близки. Именно, пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t)$ – решение задачи Юдовича с $\omega^+ = \bar{\Omega} \equiv \mathrm{const}$ и произвольно заданной нормальной скоростью γ в граничных условиях (4), и $\omega = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$. Введём неотрицательный функционал

$$\mathcal{I}_g(\mathbf{v}) = \int_D g(\omega - \bar{\Omega}) \, dz, \tag{17}$$

где $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$, $g = g(r) > 0$ $(r \in \mathbb{R}, r \neq 0)$ и $g(0) = 0$. В частности, имеет место

Лемма 3. *Производная функционала (17) в силу системы (1) – (4) при* $\omega^+ = \bar{\Omega} \equiv \mathrm{const}$ *имеет вид*

$$\dot{\mathcal{I}}_g(\mathbf{v}) = -\int_{S^-} \gamma g(\omega - \bar{\Omega}) \, dS \leq 0, \tag{18}$$

так что имеет место оценка

$$\int_D g(\omega - \bar{\Omega}) \, dz \leq \int_D g(\omega - \bar{\Omega}) \, dz, \ t > 0. \tag{19}$$

где $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$, $g = g(r) > 0$ $(r \in \mathbb{R}, r \neq 0)$ *и* $g(0) = 0$..

Замечание. Если задача Юдовича имеет стационарное решение $\mathbf{V}$, такое, что $\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = \Omega \equiv \bar{\Omega}$, то на таком решении функционал (17), очевидно, достигает глобального минимума. В случае задачи Юдовича в односвязной области стационарное решение $\mathbf{V}$ со всюду постоянным вихрем $\Omega \equiv \bar{\Omega}$ существует и единственно, и в таком случае неравенство (19) представляет собой глобальную априорную оценку возмущений этого решения. Если область течения неодносвязна, но данные задачи Юдовича таковы, что вход и выход лежат в одной компоненте связности границы, то существует бесконечно много стационарных решений задачи Юдовича, имеющих всюду постоянный вихрь $\Omega \equiv \bar{\Omega}$, но различающихся циркуляциями вокруг непроницаемых компонент связности границы. Если $\mathbf{V}$ – одно из таких решений, то неравенство (19) дает глобальную априорную оценку его возмущений, сохраняющих циркуляции скорости вокруг непроницаемых компонент границы (т.е. удовлетворяющих условиям (14)). Если же задача Юдовича с $\omega^+ = \bar{\Omega} \equiv \mathrm{const}$ не имеет стационарного решения, как, например, при условиях, указанных в замечании 1 к лемме 2, то такая задача Юдовича опускает как монотонно убывающий неотрицательный функционал (17), так и линейно возрастающий функционал – циркуляцию потока вокруг компоненты связности границы, пересекающейся с входом и не пресекающейся с выходом. Таким образом, граничные условия возбуждают ускоряющееся безвихревое вращение жидкости, но подавляют вихревые движения, вызываемые отклонением вихря от постоянного значения, заданного на входе.

5. Устойчивость, сквозные и быстрые течения

Предположим, что с задачей Юдовича (1),(4) ассоциирована некоторая динамическая система. Тогда равновесия последней представляют собой стационарные решения первой. В условиях леммы 2 стационарным течениям соответствуют равновесия, устойчивые по Ляпунову относительно метрики в пространстве возмущений, порождаемой стандартной L_2−нормой возмущений вихря. (Сказанное вытекает из оценок (12), (13), (15)). При этом, как видно из (5), определён положительный функционал, убывающий вдоль траекторий, и минимизируемый рассматриваемым равновесием. В такой ситуации естественно звучит вопрос об асимптотической устойчивости последнего, которая, по определению, предполагает полное затухание возмущений со временем, и такой же вопрос на тех же основаниях можно адресовать и стационарным течениям с постоянным вихрем, см. замечание к лемме 3. Своеобразие ситуации придает исключение вязкой диссипации, препятствующее применению известных методов и результатов теории вязкой жидкости (см., например, [25], [51]).

Ответы на поставленный выше вопрос с разной степенью полноты дают статьи [4, 35, 38, 21, 20, 39]. Приведём краткий очерк этих результатов, но прежде уточним терминологию и предположения.

Определение 3. *Под криволинейным четырёхугольником будем понимать односвязную ограниченную кусочно-гладкую область $\mathbb{R}^2$, граница которой состоит из четырёх гладких дуг и четырёх особых точек (вершин).*

Определение 4. *Под задачей Юдовича в канале будем понимать задачу отыскания решения системы Эйлера (1), определённого в некотором криволинейном четырёхугольнике и удовлетворяющего граничным условиями (4), где нормальная скорость задана так, что*

- **(R1):** *S^+ и S^- – гладкие дуги, каждая из которых соединяет пару вершин данного криволинейного четырёхугольника, причём S^+ и S^- не имеют общих концевых точек.*

По условию (R1), вход и выход потока суть противоположные стороны криволинейного четырёхугольника, а другая пара сторон представляет собой непроницаемые стенки.

В дальнейших рассмотрениях данные задачи Юдовича в канале «по умолчанию» обладают следующей регулярностью:

(R2): внутренние углы между гладкими дугами границы при вершинах данного криволинейного четырёхугольника принадлежат $(0, \pi)$;

(R3): $\inf\limits_{S^+ \cup S^-} |\gamma| > 0$;

(R4): $\gamma \in \mathrm{C}^\infty(\bar{S}^+) \cap \mathrm{C}^\infty(\bar{S}^-)$; $\omega^+ \in \mathrm{C}^\infty(\bar{S}^+)$.

Заметим, что условие (R2) необходимо для непрерывности поля скорости. Условия (R4) несколько избыточны, но избавляют от обсуждения ряда второстепенных деталей.

Асимптотическая устойчивость открытого течения идеальной жидкость впервые доказана Г.В. Алексеевым в статье [4], где рассматривалась задача Юдовича в канале при $\omega^+ \equiv 0$ в граничном условии; в качестве равновесия соответствующей динамической системы выступало потенциальное течение. Это течение оказалось *«нильпотентно»* устойчивым в том смысле, что любое его возмущение обращается в нуль за конечное время. Теория устойчивости вихревых стационарных течений в канале развита в [35, 38, 21, 20, 39].

Как уже отмечалось, А-*течение, удовлетворяющее условиям пп. (i), (ii) или (iii) леммы 2, устойчиво по Ляпунову относительно* L_2*−метрики возмущений вихря.* Асимптотическая устойчивость таких течений в перечисленных выше работах доказана при дополнительном предположении

$$\inf_D |\mathbf{V}| > 0, \tag{20}$$

где D – область течения, и $\mathbf{V}$ – поле скорости основного стационарного потока.

Определение 5. *Условие (20) будем называть условием полного протекания, а течения, ему удовлетворяющие – сквозными или безотрывными.*

Как видно из определения, состав материальных частиц сквозного потока в конечном канале полностью обновляется за конечное время, так что «старые» жидкие частицы замещаются «новыми», прошедшими через вход.

Определение 6. *Временем полного протекания сквозного течения* $\mathbf{V}$ *назовём число* $t_* = t_*(\mathbf{V}) > 0$ *такое, что все материальные частицы, находившиеся в области течения в произвольный момент времени* t*, вытесняются из неё поступающей жидкостью ко времени* $t + t_*$*.*

Пусть $\mathbb{X}$ – банахово пространство, и $\exp(t\mathrm{L}) : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ – сильно непрерывная полугруппа ограниченных операторов с замкнутым и плотно определённым генератором $\mathrm{L} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$.

Определение 7. *Будем говорить, что полугруппа* $\exp(t\mathrm{L})$ *условно отрицательного типа, если (i)* $\sup_{t>0} \|\exp(t\mathrm{L})\| < \infty$*; (ii)* $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0 \oplus \mathbb{X}_1$*, где* $\mathbb{X}_0$ *и* $\mathbb{X}_1$ *– инвариантные подпространства* $\exp(t\mathrm{L})$*; (iii) подпространство* $\mathbb{X}_0$ *натянуто конечным числом собственных векторов оператора* L*, причём вещественные части соответствующих им собственных значений равны нулю; (iv) тип сужения полугруппы* $\exp(t\mathrm{L})$ *на* $\mathbb{X}_1$ *отрицателен.*

Определение 8. *Будем говорить, что стационарное решение начально-краевой задачи гидродинамики (или соответствующее ему течение) условно экспоненциально асимптотически устойчиво по линейному приближению, если линеаризация этой начально-краевой задачи на данном стационарном решении порождает полугруппу условно-отрицательного типа.*

Теорема 1. [35] *Безотрывное* A-*течение в канале, удовлетворяющее условиям пп. (i) или (ii) леммы 2, условно экспоненциально асимптотически устойчиво по линейному приближению относительно* L_2*−метрики возмущений вихря.*

Линейной асимптотической устойчивостью обладают не только A-течения, но и все стационарные потоки, обновляющие состав материальных частиц достаточно интенсивно.

Определение 9. *Течение* $\mathbf{V}$ *назовём быстрым, если*

$$q_{\mathbf{V}} \stackrel{\text{def}}{=} t_*(\mathbf{V})\|\nabla\Omega\|_{\infty,D}\lambda_*^{-\frac{1}{2}}(D) < 1, \quad \Omega = \operatorname{rot}\mathbf{V}. \tag{21}$$

Условие полного протекания, очевидно, необходимо для быстроты потока, а в случае $\Omega \equiv \mathrm{const}$ – ещё и достаточно.

Теорема 2. [38, 20, 21, 39] *Быстрое течение в канале экспоненциально асимптотически устойчиво по линейному приближению относительно* L_2*−метрики возмущений вихря; быстрое* A-*течение в канале, удовлетворяющее условиям пп. (i) или (ii) леммы 2 экспоненциально асимптотически устойчиво в точной нелинейной постановке относительно* L_2*−метрики возмущений вихря.*

Из результатов [20, 21, 39] вытекает также нелинейная асимптотическая устойчивость безотрывного течения с постоянным вихрем и полное затухание возмущений такого течения за конечное время. Впрочем, такое же утверждение об устойчивости можно получить в результате небольшой модификации рассмотрений [4].

Доказательство утверждений о нелинейной асимптотической устойчивости опирается на определённые условия малости начальных возмущений. Эта локальность может показаться искусственной ввиду глобальных априорных оценок, выражающих устойчивость по Ляпунову (леммы 2 и 3). Тем не менее, упомянутые ограничения, вообще говоря, неустранимы, см. [20, 21].

Полугруппа, возникающая при линеаризации задачи Юдовича на сквозном течении в канале, допускает поточечные оценки старших норм через младшие, из которых, в частности, вытекает, что затухание L_2−норм возмущений вихря влечёт затухание старших норм, зависящих от производных возмущений вихря, что представляется довольно неожиданным при бездействии диффузионного сглаживания [35, 38].

Подчеркнём, что все перечисленные здесь результаты относятся к граничным условиям Юдовича. Утверждения аналогичной общности об устойчивости или асимптотической устойчивости открытых невязких течений при граничных условиях других типов неизвестны, но известен ряд результатов о неустойчивости конкретных течений, и в последние годы интерес к этой теме определённо усиливается [16, 32, 42, 43, 44, 17, 41, 40, 22, 23, 24].

6. Сдвиговые течение в канале

Выберем функции $h_1, h_2, U \in \mathrm{C}^\infty[0,1]$, такие, что

$$\min_{y\in[0,1]}(h_1(y) - h_0(y)) > 0, \quad U(y) > 0,\, y \in (0,1), \quad \int_0^1 U(y)\,dy = 1. \tag{1}$$

Введём криволинейный четырёхугольник

$$D = \{(x,y) : h_0(y) < x < h_1(y),\, y \in (0,1)\}. \tag{2}$$

В области (2) определено сдвиговое течение $\mathbf{V} = (U(y), 0)$. Ввиду положительности функции U, дуга $\{x = h_0(y),\, y \in (0,1)\}$ представляет собой вход потока $\mathbf{V}$, дуга $\{x = h_1(y),\, y \in (0,1)\}$ – выход, а прямолинейные дуги границы, параллельные оси Ox, непроницаемы. Таким образом, имеем сдвиговое течение в прямом (но не прямоугольном) канале (2).

Сдвиговое течение $\mathbf{V} = (U(y), 0)$ в канале (2) будет A$-$течением при условии

$$\sup_{0<y<1} \frac{U(y)}{|U''(y)|} < \infty, \tag{3}$$

минимальным – при условии

$$\exists\, B^-, b^- > 0 :\; b^- U(y) < -U''(y) < B^- U(y),\; \forall\, y :\; 0 < y < 1. \tag{4}$$

и $\mathcal{K}_0-$максимальным – при условии

$$\exists\, b^+ > 0 :\; b^+ U(y) < U''(y) < \frac{U(y)}{\pi^2(1 + l^{-2})},\; \forall\, y :\; 0 < y < 1, \tag{5}$$
$$l = \max_{y\in[0,1]}(h_1(y) - h_0(y)).$$

Условие максимальности получено с помощью оценки $\lambda_*(D)$ снизу, вытекающей из вариационного принципа Рэлея при расширении канала (2) до прямоугольника длины l.

Выберем функции γ, ω^+ так, чтобы выполнялись условия

$$\gamma(x,0) = 0,\; h_0(0) < x < h_1(0),\;\; \gamma(x,1) = 0,\; h_0(1) < x < h_1(1); \tag{6}$$

$$\gamma(h_i(y), y) = \frac{(-1)^{i+1} U(y)}{\sqrt{1 + (h_i'(y))^2}},\; i = 0,1,\;\; y \in (0,1); \tag{7}$$

$$\omega^+(h_0(y), y) = -U'(y) \tag{8}$$

и рассмотрим задачу Юдовича в канале (2) с граничными данными, определёнными согласно (6) – (8). В силу (1), выбранные граничные условия предполагают единичный расход жидкости, в соответствии с соглашением раздела 4.

Сдвиговое течение $\mathbf{V} = (U(y), 0)$ доставляет указанной задаче Юдовича стационарное решение, относительно которого имеет место утверждение (i) или (ii) леммы 2 при выполнении условий (4) или (5), соответственно. Таким образом, согласно сказанному в разделе 5, *сдвиговое течение* $\mathbf{V} = (U(y), 0)$ *устойчиво по Ляпунову относительно* L_2-*нормы возмущений вихря, если одно из условий (4) – (5) выполнено.*

Если

$$\inf_{0<y<1} U(y) > 0, \tag{9}$$

то сдвиговое течение $\mathbf{V} = (U(y), 0)$ в канале (2) безотрывно. Отсюда, и из результатов, приведённых в разделе 5, следует, что *сдвиговое течение в канале (2) обладает (i) условной экспоненциальной асимптотической устойчивостью по линейному приближению при выполнении условия минимальности (4), или условия максимальности (5); (ii) экспоненциальной асимптотической устойчивостью по линейному приближению при выполнении условия быстроты (21); (iii) нелинейной экспоненциальной асимптотической устойчивостью при одновременном выполнении условия (21) и одного из условий (4) – (5).*

Запишем условие быстроты сдвигового течения в более явной форме. Любая материальная частица сдвигового течения доходит от входа до точки $(x, y) \in D$ за время

$$t_+(x, y) = \frac{x - h_0(y)}{U(y)},$$

а потому время полного протекания имеет вид

$$t_*(\mathbf{V}) = \sup_{0<y<1} \frac{h_1(y) - h_0(y)}{U(y)}. \tag{10}$$

Соответственно,

$$q_{\mathbf{V}} = \lambda_*^{-1/2}(D) \sup_{0<y<1} |U''(y)| \sup_{0<y<1} \frac{h_1(y) - h_0(y)}{U(y)}.$$

Отсюда следует грубое, но явное условие быстроты сдвигового течения

$$l_1 \sup_{0<y<1} |U''(y)| < \inf_{0<y<1} U(y), \quad l_1 = \frac{l^2}{\pi\sqrt{(1 + l^2)}}, \tag{11}$$

Заметим, что $q_{\mathbf{V}} = 0$ для любого безотрывного течения с *линейным* профилем U. Поэтому любое близкое к нему течение будет быстрым. Чтобы уточнить сказанное, представим произвольный профиль в виде

$$U(y) = 1 + (1/2 - y)\bar{\Omega} + \tilde{U}_1(y), \quad \bar{\Omega} = -\int_0^1 U'(y)\, dy, \tag{12}$$

$$\int_0^1 \tilde{U}_1(y)dy = \int_0^1 \tilde{U}_1'(y)dy = 0. \tag{13}$$

(Напомним, что рассматриваются только нормированные профили, для которых расход равен 1.) Положим

$$|\bar{\Omega}|/2 < 1.$$

Тогда линейный профиль $U - \tilde{U}_1$ определяет сквозное течение с постоянным вихрем $\bar{\Omega}$, а отклонение профиля (12) от линейного контролируется градиентом вихря, то есть, величиной $U''(y) = \tilde{U}_1''(y)$. Используем сказанное для оценки правой части неравенства (11), и получим достаточное условие быстроты в виде

$$\sup_{y\in(0,1)} |U''(y)| < \frac{1 - |\bar{\Omega}|/2}{c + l_1}, \tag{14}$$

где число $c > 0" таково, что

$$\sup_{y\in[0,1]} |\tilde{U}_1(y)| \leqslant c \sup_{y\in[0,1]} |U''(y)| \tag{15}$$

для любой функции $\tilde{U}_1(y)$, удовлетворяющей условиям (13). Можно, например, положить $c = \pi^{-3/2}$. В самом деле, в силу (13)

$$\|\tilde{U}_1'\|^2_{2;(0,1)} \leqslant \pi^{-2}\|\tilde{U}_1''\|^2_{2;(0,1)}$$

(эта оценка верна для любой функции с нулевом средним); однако относительно функции $\tilde{U}_1$ можно утверждать, что

$$\|\tilde{U}_1\|^2_{2;(0,1)} \leqslant (2\pi)^{-2}\|\tilde{U}_1'\|^2_{2;(0,1)},$$

так как её можно продолжить до 1−периодической непрерывной функции с нулевым средним. Далее, найдётся число $\bar{y} \in (0,1)$ такое, что $\tilde{U}_1(\bar{y}) = 0$, а потому $\forall s \in (0,1)$ имеют место неравенства

$$|\tilde{U}_1^2(s)| = 2|\int\limits_{\bar{y}}^{s} \tilde{U}_1(y)\tilde{U}_1'(y)\,dy| \leqslant 2\|\tilde{U}_1\|_{2;(0,1)}\|\tilde{U}_1'\|_{2;(0,1)} \leqslant$$

$$\leqslant \pi^{-1}\|\tilde{U}_1'\|^2_{2;(0,1)} \leqslant \pi^{-3}\|\tilde{U}_1''\|^2_{2;(0,1)} \leqslant \pi^{-3} \sup_{y\in(0,1)} |\tilde{U}_1''(y)|.$$

Таким образом, сдвиговое течение может иметь средний вихрь и градиенты вихря порядка 1 (при единичном расходе) и при этом быть быстрым, если канал не слишком длинный (т.е. $l \sim 1$). Точнее, допустимые градиенты вихря можно оценить как

$$\pi(1 - |\bar{\Omega}/2|)l^{-1} + O(l^{-2}),\ l \to +\infty, \quad |\bar{\Omega}| < 2.$$

7. Течения Алексеева-Мокина

В статье [5] Г.В. Алексеев и Ю.А. Мокин указали класс явных решений двумерных уравнений Эйлера, описывающих открытые течения в плоских областях типа криволинейных трапеций, см. рис. 2. Исследуем устойчивость этих течений, но прежде напомним их построение.

Введём область

$$D = \{(x,y) :\ 0 < y < h(x),\ x \in (0,l)\}, \tag{1}$$

где h – решение уравнения

$$h''/h = \beta, \quad \beta \equiv \text{const}, \tag{2}$$

такое, что

$$h(x) > 0,\ \forall\, x \in [0,l]. \tag{3}$$

Введём условие нормировки

$$h(0) = 1, \tag{4}$$

что не умаляет общности рассмотрения. В [5] рассматриваются также четырёхугольники вида (1), где функция $1/h(x)$ представляет решение уравнения (2). Такие области далее не обсуждаются.

Полезно заметить, что

$$\mathfrak{D} = hh'' - (h')^2 \equiv \text{const}, \tag{5}$$

каково бы ни было решение h уравнения (2). Константу (5) назовём дискриминантом.

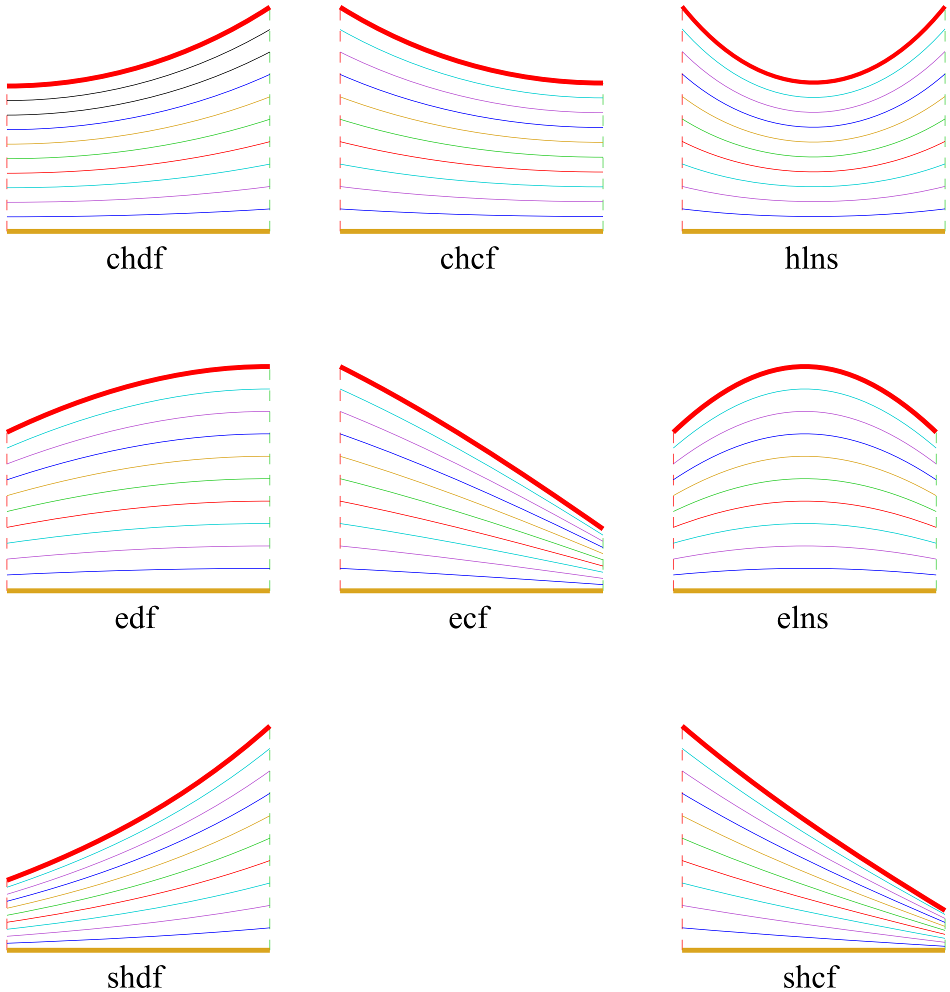

Рис. 2. Течения Алексеева-Мокина. Формы каналов и линий тока; chdf – вогнутый диффузор, ограниченный цепной линией; chcf – вогнутый конфузор, ограниченный цепной линией; hlns – вогнутая линза, ограниченная цепной линией; edf – выпуклый диффузор, ограниченный синусоидой; ecf – выпуклый конфузор, ограниченный синусоидой; elns – выпуклая линза, ограниченная синусоидой; shdf – вогнутый диффузор, ограниченный гиперболической синусоидой; shcf – вогнутый конфузор, ограниченный гиперболической синусоидой.

Течение Алексеева-Мокина полностью определяется скалярной функцией $h = h(x)$, $x \in (0, l)$, которая, в свою очередь, строится по трём вещественным параметрам l, β и $\mathfrak{D}$, при ограничении $\mathfrak{D} < \min(\beta, 1)$. Соотношения, определяющие функцию h, формы каналов, функции тока и вихря сведены в таблицу 1, а в случае $\mathfrak{D} = 0$ – указаны в (7). Параметры β и $\mathfrak{D}$ определены в (2) и (5), соответственно.

Таблица 1

<table>
<tr><td>Величина</td><td colspan="8">Значения</td></tr>
<tr><td>η</td><td colspan="8">$\eta = \sigma y/h(x)$, $\sigma = \sqrt{|\mathfrak{D}|}$</td></tr>
<tr><td>Поток</td><td colspan="3">гиперболический</td><td colspan="5">эллиптический</td></tr>
<tr><td>$\mathfrak{D}$</td><td colspan="3">$0 < \mathfrak{D} < 1 \wedge \beta$</td><td colspan="5">$\mathfrak{D} < 0 \wedge \beta$</td></tr>
<tr><td>$\Psi(\eta)$</td><td colspan="3">$Q^{-1}\operatorname{arth}\eta$</td><td colspan="5">$Q^{-1}\operatorname{arctg}\eta$</td></tr>
<tr><td>$\Omega(\eta)$</td><td colspan="3">$-\beta\eta Q^{-1}(1+\eta^2)(1-\eta^2)^{-2}$</td><td colspan="5">$-\beta\eta Q^{-1}(1-\eta^2)(1+\eta^2)^{-2}$</td></tr>
<tr><td>Q</td><td colspan="3">$\operatorname{arth}\sigma$, $\sigma = \sqrt{|\mathfrak{D}|}$</td><td colspan="5">$\operatorname{arctg}\sigma$, $\sigma = \sqrt{|\mathfrak{D}|}$</td></tr>
<tr><td>$\Omega(\Psi)$</td><td colspan="3">$-\beta\operatorname{sh}(4Q\Psi)\,/\,(4Q)$, $\beta > 0$</td><td colspan="5">$-\beta\sin(4Q\Psi)\,/\,(4Q)$, $\beta \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$\hat{h}$</td><td colspan="3">$\operatorname{ch}s + \mu\operatorname{sh}s$</td><td colspan="3">$\cos s + \mu\sin s$</td><td colspan="2">$\operatorname{ch}s + \mu\operatorname{sh}s$</td></tr>
<tr><td>$\beta(\alpha)$</td><td colspan="3">$\beta = \alpha^2 > 0$, $|\mu| < 1$</td><td colspan="3">$\beta = -\alpha^2 < 0$, $\mu \in \mathbb{R}$</td><td colspan="2">$\beta = \alpha^2 > 0$, $|\mu| > 1$</td></tr>
<tr><td>$\mathfrak{D}(\alpha^2, \mu^2)$</td><td colspan="3">$\mathfrak{D} = \alpha^2(1-\mu^2) > 0$</td><td colspan="3">$\mathfrak{D} = -\alpha^2(1+\mu^2)$</td><td colspan="2">$\mathfrak{D} = \alpha^2(1-\mu^2) < 0$</td></tr>
<tr><td>Канал</td><td>chdf</td><td>chcf</td><td>hlns</td><td>edf</td><td>ecf</td><td>elns</td><td>shdf</td><td>shcf</td></tr>
<tr><td>$\mu \in$</td><td>$[0,1)$</td><td>$(-1,0)$</td><td>$(-1,0)$</td><td>$(0,\infty)$</td><td>$(-\infty,0]$</td><td>$(0,\infty)$</td><td>$(1,\infty)$</td><td>$(-\infty,-1)$</td></tr>
<tr><td>$\alpha l \in$</td><td>$(0,L_0)$</td><td>$(0,L_*]$</td><td>(L_*,L_0)</td><td>$(0,L_*]$</td><td>$(0,L_0)$</td><td>(L_*,L_0)</td><td>$(0,L_0)$</td><td>$(0,L_0)$</td></tr>
<tr><td>$L_*(\mu)$</td><td>$+\infty$</td><td>τ</td><td>τ</td><td>θ</td><td>$\pi+\theta$</td><td>θ</td><td>$+\infty$</td><td>τ</td></tr>
<tr><td>$L_0(\mu)$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$\pi-\theta_1$</td><td>$-\theta_1$</td><td>$\pi-\theta_1$</td><td>$+\infty$</td><td>τ_1</td></tr>
</table>

Таблица 1. Здесь $\wedge$ – операция взятия меньшего из двух операндов. Нормировочная константа Q в подобрана так, что $\Psi(\bar{D}) = [0,1]$. Течение зависит от трёх параметров $\beta \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{D} \in \mathbb{R}$ и $L > 0$; форма канала – криволинейная трапеция $\{(x,y) : x \in (0,l),\ y \in (0,h(x))\}$, $l = L/\alpha$, $\alpha = \sqrt{|\beta|}$, $h(x) = \hat{h}(\alpha x)$, $\hat{h}''/\hat{h} = \pm 1$, и функция $\hat{h}$ зависит ещё от параметра $\mu = \hat{h}'(0) = \pm\sqrt{|\mathfrak{D}/\beta - 1|}$; L_0 и L_* – наименьшие положительные нуль и критическая точка функции $\hat{h}$, если таковые существуют, или $+\infty$ в противном случае; $\theta = \operatorname{arctg}\mu$, $\theta_1 = \operatorname{arctg}\mu^{-1}$, $\tau = -\operatorname{arth}\mu$, $\tau_1 = -\operatorname{arth}\mu^{-1}$. Различные типы каналов обозначаются так: chdf – вогнутый диффузор, ограниченный цепной линией; chcf – вогнутый конфузор, ограниченный цепной линией; hlns – вогнутая линза, ограниченная цепной линией; edf – выпуклый диффузор, ограниченный синусоидой; ecf – выпуклый конфузор, ограниченный синусоидой; elns – выпуклая линза, ограниченная синусоидой; shdf – вогнутый диффузор, ограниченный гиперболической синусоидой; shcf – вогнутый конфузор, ограниченный гиперболической синусоидой. Формы каналов и линий тока см. на рис. 2.

Имеется восемь типов течений, обозначаемых chdf, chcf, hlns, edf, ecf, elns, shdf и shcf, каждому из которых соответствует определённая форма криволинейного четырёхугольника (1), см. рис. 2, таблицу 1, и пояснения к ней. Заметим, что длины (проекции на ось x) выпуклых четырёхугольников (это edf, ecf, elns) ограничены сверху, так что $\alpha l < \mathrm{const}$, $\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{|\beta|}$, где константа равна π в случае линзы, и $\pi/2$ – в случае диффузора и конфузора. Длины вогнутых конфузоров (shcf и chcf) также ограничены (при данных α и μ), но могут быть сколь угодно велики при *фиксированном* α, если $\mu^2 \to 1$. То же верно и в отношении вогнутых линз (hlns). Длины линз (выпуклых и вогнутых) ограничены *снизу* положительной величиной L_*/α, причём $L_* \in (0,\pi/2)$ в случае выпуклости, и $L_* \in (0,\infty)$ – в случае вогнутости. Диффузоры и конфузоры могут быть сколь угодно короткими, а вогнутые диффузоры – ещё и сколь угодно длинными.

Вихрь и функция тока течения Алексеева-Мокина о выражаются через общую автомодельную переменную, так что

(6) $$\Psi = \Psi(\eta) \in (0,1),\ \Omega = \Omega(\eta),\ \eta = \sigma y/h(x) \in (0,\sigma);\ \sigma = \sqrt{|\mathfrak{D}|} \neq 0$$

В зависимости от знака дискриминанта, возможны два качественно различных выражения $\Psi(\eta)$ и $\Omega(\eta)$, см. таблицу 1. В случае $\mathfrak{D} = 0$ (что подразумевает $\beta > 0$) решение имеет вид

(7) $$h(x) = \mathrm{e}^{\pm\alpha x};\ \alpha = \sqrt{\beta};\ \eta = y/h(x);\ \Psi = \eta;\ \Omega = -\alpha^2\eta.$$

Множество течений Алексеева-Мокина с $\mathfrak{D} \neq 0$ естественным образом разбивается на два класса по знаку дискриминанта: если $\mathfrak{D} > 0$, то течение *гиперболическое*; если же $\mathfrak{D} < 0$ – *эллиптическое*. Отметим, что гиперболические течения определены лишь при $\mathfrak{D} < 1$ и $\beta > 0$. Течения эллиптического типа, напротив, определены для всех $\mathfrak{D} \neq 0$ и β, включая $\beta = 0$. При $\beta = 0$ течение становится потенциальным, а четырёхугольник (1) превращается в обычную трапецию. Течения типов chdf, chcf и hlns – гиперболические, edf, ecf, elns, shdf и shcf – эллиптические.

Любое течение Алексеева-Мокина удовлетворяет условию

(8) $$\inf_{\eta\in(0,\sigma)} \Psi'(\eta) > 0,$$

и потому описывает безотрывное течение, вход которого совпадает с дугой $\{(0,y),\ 0 < y < 1\}$, выход – с дугой $\{(l,y),\ 0 < y < h(l)\}$, а дуги $\{(x,0), 0 < x < l\}$ и $\{(x,h(x)), 0 < x < l\}$ – непроницаемы. Все рассматриваемые течения нормируются так, чтобы расход жидкости через канал был равен 1.

Ввиду (8), зависимость между вихрем и функцией тока течения Алексеева-Мокина во всём канале имеет вид $\Omega = f(\Psi)$, где $\Omega(\Psi) = \Omega(\eta(\Psi))$. Явные выражения этих зависимостей для различных типов течений приведены в табл. 1.

В гиперболическом случае функция f обратима, и

$$\Psi = F(\Omega) = -\frac{\ln\left(\frac{4Q\Omega}{\beta} + \sqrt{1+\left(\frac{4Q\Omega}{\beta}\right)^2}\right)}{4Q},\ \Omega \in \left(-\frac{\beta\,\mathrm{sh}(4Q)}{4Q}, 0\right),\ \beta > 0.$$

Таким образом, любой гиперболический поток — A$-$течение, причём

$$\sup_{(\Omega^*,\Omega_*)} F' < 0, \quad \Omega^* = -\frac{\beta\,\mathrm{sh}(4Q)}{4Q},\ \Omega_* = 0,$$

а потому *гиперболическое течение минимально.*

В эллиптическом случае функция f обратима при условии

(9) $$-\mathfrak{D} < \mathrm{tg}^2(\pi/8) = 3 - 2\sqrt{2},$$

поэтому *эллиптический поток поток есть* A$-$*течение при условии (9)*. При выполнении противоположного неравенства f имеет ровно одну точку экстремума в интервале $(0,1)$, и потому соответствующее эллиптическое течение не может быть A$-$течением. Далее, в отношении любого эллиптического A$-$течения верно следующее

$$\Psi = F(\Omega) = -\frac{\arcsin\left(\frac{4Q\Omega}{\beta}\right)}{4Q},\ 0 < -\Omega/\beta < \frac{\sin(4Q)}{4Q},$$
$$\inf_{(\Omega^*,\Omega_*)} F' > 0,\ \beta < 0,\ \Omega^* = 0,\ \Omega_* = -\frac{\beta\sin(4Q)}{4Q};$$
$$\sup_{(\Omega^*,\Omega_*)} F' < 0,\ \beta > 0,\ \Omega^* = -\frac{\beta\sin(4Q)}{4Q},\ \Omega_* = 0.$$

Отсюда вытекает, что *эллиптическое* A$-$*течение минимально при выполнении условия* $\beta > 0$ *и максимально относительно* $\mathcal{K}_0$ *при выполнении условия* $\beta < 0$. В самом деле, в последнем случае возможны каналы трёх типов: elns, edf, или ecf (см. рис. 2, таблицу 1 и пояснение к ней). Во всяком случае, длина канала l не превосходит π/α, а потому

$$\inf_{(\Omega^*,\Omega_*)} F' = -\beta^{-1} = \alpha^{-2} > (\pi/l)^{-2} > \lambda_*^{-1}(D),$$

причём последняя оценка вытекает из вариационного принципа Рэлея, если погрузить канал в вертикальную полосу ширины l.

Рассмотрим задачу Юдовича в четырёхугольнике (1) с граничными данными

(10) $$\gamma(x,y)|_{x=0} = -\sigma\Psi'(\sigma y),\ y \in (0,1);$$

(11) $$\gamma(x,y)|_{y=h(x)} = \gamma(x,y)|_{y=0} = 0,\ x \in (0,l);$$

(12) $$\gamma(x,y)|_{x=l} = \sigma h^{-1}(l)\Psi'(\sigma y/h(l)),\ y \in (0,h(l));$$

(13) $$\omega^+|_{x=0} = \Omega(\sigma y),\ y \in (0,1),$$

где выражения $h(x)$, $\Omega(\eta)$, $\Psi(\eta)$ и σ берутся из таблицы 1. Как уже отмечалось, дуга $\{(0,y),\ 0 < y < 1\}$ представляет вход, дуга $\{(l,y),\ 0 < y < h(l)\}$ – выход, а дуги $\{(x,0), 0 < x < l\}$ и $\{(x,h(x)), 0 < x < l\}$ – непроницаемые стенки. Очевидно, течение Алексеева-Мокина $\mathbf{V}$, соответствующее выбранным h, Ω, Ψ и σ, есть стационарное решение задачи (10) – (13).

Пусть теперь течение Алексеева-Мокина $\mathbf{V}$ (гиперболическое или эллиптическое) удовлетворяет условию (9). Тогда задача Юдовича (10) – (13) удовлетворяет условиям п. (i) или п. (ii) леммы 2, а потому течение $\mathbf{V}$ устойчиво по Ляпунову относительно L_2-нормы возмущений вихря. При этом возмущения допускают оценку (12) в случае $\beta > 0$, а в случае $\beta < 0$ – оценку (13). Явные выражения входящих в эти неравенства констант приведены в таблице 2.

Из перечисленных в разделе 5 результатов, ввиду безотрывности течений Алексеева-Мокина, следует, что любое такое течение *(i) при выполнении условия (9) устойчиво по Ляпунову относительно* L_2-*метрики возмущений вихря и одновременно условно экспоненциально асимптотически устойчиво по линейному приближению относительно той же метрики; (ii) при выполнении условия (21) экспоненциально асимптотически устойчиво по линейному приближению относительно* L_2-*метрики возмущений вихря; (iii) при одновременном выполнении условий (9) и (21) обладает нелинейной экспоненциальной асимптотической устойчивостью относительно* L_2-*метрики возмущений вихря.*

На рис. 3, 4 и 5, показаны области быстроты течений Алексеева-Мокина, полученные с помощью довольно грубых, но явных оценок величины $q_{\mathbf{V}}$ (см.

Таблица 2

<table>
<tr><td>Вел-на</td><td colspan="8">Значение</td></tr>
<tr><td>поток</td><td colspan="3">гиперболический</td><td colspan="5">эллиптический</td></tr>
<tr><td>$\mathfrak{D}$</td><td colspan="3">$0 < \mathfrak{D} < 1$</td><td colspan="5">$2\sqrt{2} - 3 < \mathfrak{D} < 0$</td></tr>
<tr><td>$M(\mathfrak{D})$</td><td colspan="3">$\frac{1+6\mathfrak{D}+\mathfrak{D}^2}{(1-\mathfrak{D})^2} > 1$</td><td colspan="5">$\frac{1+6\mathfrak{D}+\mathfrak{D}^2}{(1-\mathfrak{D})^2} \in (0,1)$</td></tr>
<tr><td>β</td><td colspan="5">$\beta = \alpha^2 > 0;\ f' < 0$</td><td colspan="3">$\beta = -\alpha^2 < 0, \quad f' > 0$</td></tr>
<tr><td>C^-</td><td colspan="3">α^{-2}</td><td colspan="2">$(\alpha^2 M)^{-1}$</td><td colspan="3">—</td></tr>
<tr><td>c^-</td><td colspan="3">$(\alpha^2 M)^{-1}$</td><td colspan="2">α^{-2}</td><td colspan="3">—</td></tr>
<tr><td>C^+</td><td colspan="3">—</td><td colspan="2">—</td><td colspan="3">$(\alpha^2 M)^{-1}$</td></tr>
<tr><td>c^+</td><td colspan="3">—</td><td colspan="2">—</td><td colspan="3">α^{-2}</td></tr>
<tr><td>канал</td><td>chdf</td><td>hlns</td><td>chcf</td><td>shdf</td><td>shcf</td><td>elns</td><td>edf</td><td>ecf</td></tr>
<tr><td>C</td><td colspan="2">$M(1+l_1^2)$</td><td>$M(1+\alpha_1^2)$</td><td>$\frac{1+Ml_1^2}{M}$</td><td>$\frac{1+M\alpha_1^2}{M}$</td><td colspan="2">$\frac{\pi^2-\mathfrak{D}}{M\pi^2}$</td><td>$\frac{1+\alpha_1^2}{M}$</td></tr>
</table>

Таблица 2. Явные выражения констант в априорных оценках (12) и (13) через параметры β, $\mathfrak{D}$ и $L = \alpha l$, $\alpha = \sqrt{|\beta|}$. Здесь $\alpha_1 = \alpha/\pi$, $l_1 = L/\pi = l\alpha_1$, $M(\mathfrak{D}) = \max|\Omega'(\Psi)||\beta|^{-1}$ в гиперболическом случае, и $M(\mathfrak{D}) = \min|\Omega'(\Psi)||\beta|^{-1}$ в эллиптическом случае. Заметим, что $M(2\sqrt{2}-3) = 0$. Расшифровку обозначений типов каналов и диапазоны изменения L см. в таблице 1 и в подписях к ней. Значения константы C завышены с целью их явного выражения.

левую часть неравенства (21)). Пунктиром отмечена прямая $\mathfrak{D} = 2\sqrt{2} - 3$ (на рис. 4 она сливается с осью абсциисс). Как видно, устойчивое течение не обязано быть A−течением: эллиптические течения могут быть устойчивы при $\mathfrak{D} \ll 2\sqrt{2} - 3$. В таких потоках зависимость вихря от функции тока не монотонна и имеет ровно одну критическую точку, см. таблицу 1.

Для справки, явное условие быстроты, использованное при подготовке рис. 3 – 5, имеет вид

$$
\begin{aligned}
&Lh_0(L)g_*(L)M_1(\mathfrak{D})M_2(\mathfrak{D}) < \pi d(l), \text{ где} \\
&L = \alpha l,\ \alpha = \sqrt{|\beta|} \quad h_0(L) = \int_0^L \hat{h}(s)\,ds,\ \hat{h}(s) = h(s/\alpha),
\end{aligned} \tag{14}
$$

и d, M_1, M_2 и g_* выбраны так, что

$$\pi^2 d^2(l) < l^2 \lambda_*(D), \tag{15}$$

$$\sigma g_*(L) \geqslant \max_{s\in D} |\nabla \eta|, \quad \eta = \frac{\sigma y}{\hat{h}(\alpha x)},\ \sigma = \sqrt{\mathfrak{D}}, \tag{16}$$

$$M_1(\mathfrak{D}) \geqslant \alpha^{-2} \max_{\Psi\in[0,1]} |\Omega'(\Psi)|, \quad M_2(\mathfrak{D}) \geqslant \frac{\max\limits_{\eta\in[0,\sigma]} \Psi'(\eta)}{\min\limits_{\eta\in[0,\sigma]} \Psi'(\eta)}. \tag{17}$$

Конкретные выражения величин d, h_0, g_* M_1, M_2 для течений и каналов различных типов сведены в таблицу 3.

Неравенство (14) получается из оценок сомножителей в выражении $q_{\mathbf{V}}$. В неравенстве (15) положим

$$d^2(l) \stackrel{\text{def}}{=} (1 + l^2/h_*^2(L)), \quad h_*(L) = \max_{s\in[0,L]} \hat{h}(s). \tag{18}$$

Возможность указанного выбора вытекает из вариационного принципа Рэлея, нужно лишь заменить канал объемлющим его прямоугольником.

Оценка (16) с

$$g_*(L) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{[0,L]} \hat{h}^{-1}(s)\sqrt{1 + \left(\alpha \hat{h}'(s)\right)^2} \tag{19}$$

следует прямо из определения η, см. (6).

С целью оценки времени полного протекания t_* заметим, что материальная частица проходит отрезок линии тока от входа до точки канала с координатами (x, y) за время

$$t_+(x,y) = \frac{\int\limits_0^x h(x)\,dx}{\sigma \Psi'(\eta)},$$

отсюда неравенство

$$\alpha t_* \leq \frac{h_0(L)}{\sigma \min\limits_{\eta\in[0,\sigma]} \Psi'(\eta)}. \tag{20}$$

Осталось оценить $\|\nabla\Omega\|_{\infty,D}$, где $\Omega = \Omega(\Psi(\eta))$. Ввиду последнего равенства,

$$\max_{\bar{D}} |\nabla\Omega| \leq \max_{\Psi\in[0,1]} |\Omega'(\Psi)| \max_{\eta\in[0,\sigma]} \Psi'(\eta) \max_{\bar{D}} \sigma g_*(L) \tag{21}$$

Объединив два последних неравенства, заметим, что для вывода условия (14) не хватает лишь оценок (17). Последние, вместе с явными выражениями $M_1(\mathfrak{D})$, $M_2(\mathfrak{D})$ и $g_*(L)$ следуют непосредственно из формул, указанных в таблице 1. При оценке g_* полезно тождество

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{1+(h_x')^2}}{h} = \frac{(\mathfrak{D}-1)h_x'}{h^2\sqrt{1+(h_x')^2}}.$$

Окончательный вид условия (14) определяется для конкретных типов течений с помощью таблицы 3.

8. Существование безотрывных течений

В этом разделе обсуждается вопрос существования стационарных решений общей задачи Юдовича в канале, описывающих безотрывные течения.

Стационарная задача Юдовича в канале в переменных вихрь-функция тока имеет вид

$$\nabla\Psi \times \nabla\Omega = 0; \quad \Omega = \omega^+ \text{ на } S^+, \tag{22}$$

$$-\Delta\Psi = \Omega \text{ в } D; \quad \Psi = \psi_0;\ d\psi_0 = \gamma dS, \text{ на } S, \tag{23}$$

где S обходится против часовой стрелки. По определению, ψ_0 монотонно растёт на S^-, монотонно убывает на S^+ и постоянна на каждой твёрдой стенке, достигая на одной из них максимума, а на другой – минимума. Последний, не

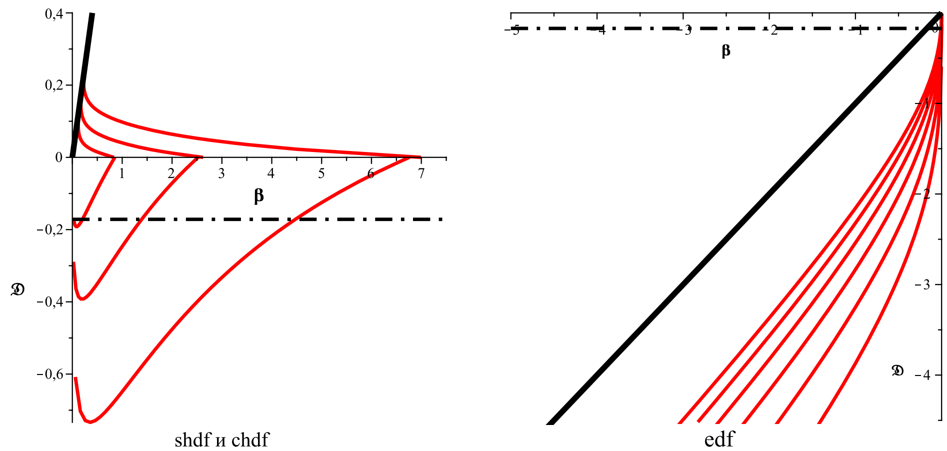

Рис. 3. Области быстрых течений Алексеева-Мокина на плоскости β, $\mathfrak{D}$ для различных значений $L = \alpha l$, $\alpha = \sqrt{|\beta|}$. Случай каналов-диффузоров. Левая панель относится к течениям типов chdf и shdf, причём типу chdf соответствует положительный квадрант. Быстрым течениям соответствуют области, ограниченные прямой $\mathfrak{D} = 0$ и изображёнными на рисунке кривыми. Жирная прямая линия имеет уравнение $\mathfrak{D} = \beta$. Для каждого из двух типов представлена последовательность трёх вложенных расширяющихся областей быстрых течений, соответствующих $L = 1.15$, $L = 1$, $L = 0.85$, в порядке возрастания областей. Правая панель относится к течениям типа edf, на ней быстрым течениям соответствуют шесть расширяющихся областей, ограниченных представленными на рисунке кривыми и прямой $\mathfrak{D} = \beta$ (жирная линия). Эти области соответствуют значениям L от L_* до $0.5L_*$ с шагом $0.1L_*$, в порядке возрастания областей. По поводу L_* см. табл. 1. Смысл пунктирных линий на разъясняется на стр. 240.

нарушая общности, считается нулём, а первый равен расходу жидкости, который, в свою очередь, равен 1 по предположению. Поэтому

$$\psi_0(S^+) = \psi_0(S^-) = (0,1). \tag{24}$$

Сужение ψ_0 на S^+ обозначим через ψ^+. Отображение $\psi^+ : S^+ \to (0,1)$ взаимно-однозначно, а потому заданные на входе значения вихря могут быть выражены через граничные значения функции тока. Именно,

$$\omega^+ = f(\psi^+), \text{ где } \quad f(h) = \omega^+(s^+(h)); \ 0 < h < 1, \tag{25}$$

$s^+ = s^+(h)$ есть функция, обратная к ψ^+. В силу (R3-R4), $f \in \mathrm{C}^\infty[0,1]$.

Общая теорема существования слабого решения задачи Юдовича в канале доказана Г.В. Алексеевым [1]. Регулярность этого решения такова: $\Omega \in \mathrm{L}_\infty(D)$, $\mathbf{V} = \nabla\Psi \in \mathrm{C}^\alpha(\bar{D})$ ($\alpha \in (0,1)$ зависит от углов при угловых точках границы канала), и

$$\inf_{S^+} \omega^+ \leq \mathrm{essinf}_D \Omega, \quad \mathrm{esssup}_D \Omega \leq \sup_{S^+} \omega^+.$$

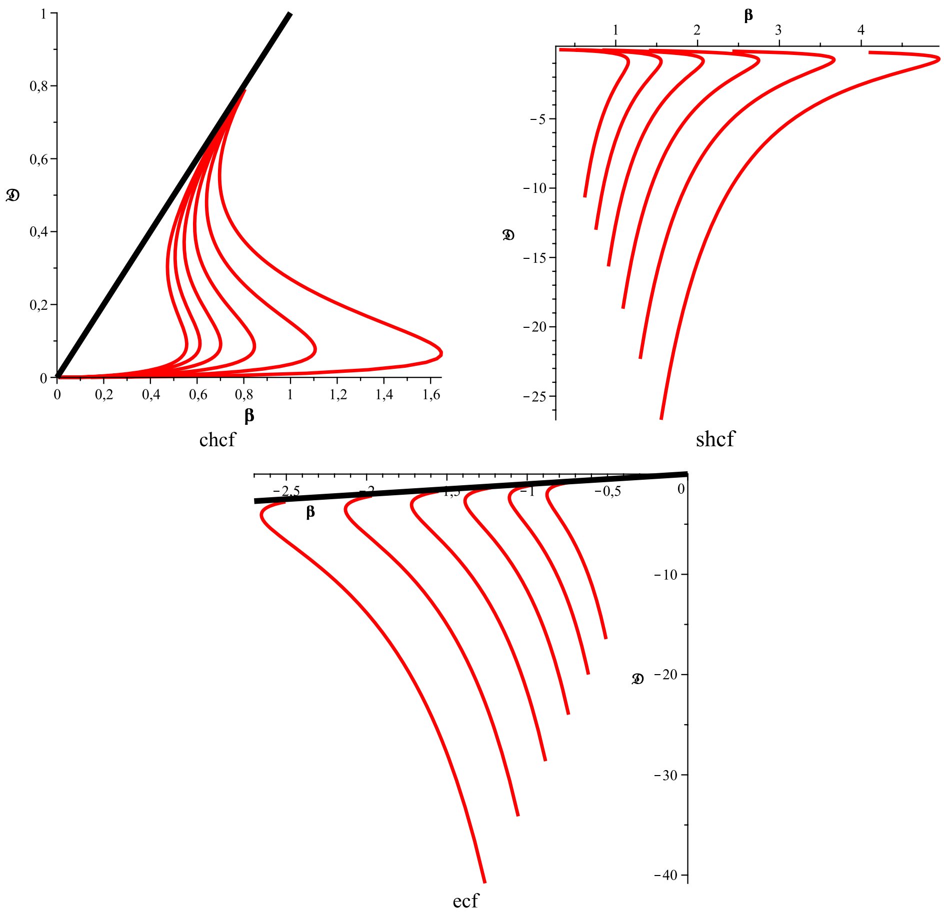

Рис. 4. Области быстрых течений Алексеева-Мокина на плоскости β, $\mathfrak{D}$ для различных значений $L = \alpha l$, $\alpha = \sqrt{|\beta|}$. Случай каналов-конфузоров. Левая верхняя панель относится к течениям типа chcf, правая – shcf, нижняя – ecf. На каждой из трёх панелей изображены шесть вложенных расширяющихся областей, соответствующих заведомо быстрым течениям. На левой верхней панели эти области ограничены представленными на ней кривыми и прямой $\beta = \mathfrak{D}$ (жирная линия), при этом L изменяется от L_* до $0.5L_*$ с шагом $0.1L_*$ (в порядке возрастания областей). На правой верхней панели области быстрых течений ограничены представленными на ней кривыми и осями координат, причём L изменяется от $0.75L_0$ до $0.5L_0$ с шагом $0.05L_0$ (в порядке возрастания областей). На нижней панели области быстрых течений ограничены представленными на ней кривыми, осью $\beta = 0$, и прямой $\beta = \mathfrak{D}$ (жирная линия), при этом L изменяется от $0.75L_0$ до $0.5L_0$ с шагом $0.05L_0$ (в порядке возрастания областей). По поводу L_* и L_0 см. табл. 1.

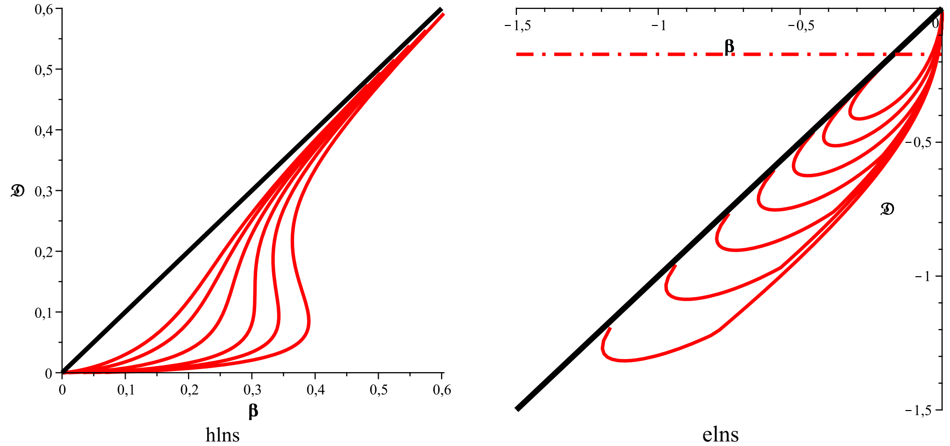

Рис. 5. Области быстрых течений Алексеева-Мокина на плоскости β, $\mathfrak{D}$ для различных значений $L = \alpha l$, $\alpha = \sqrt{|\beta|}$. Случай каналов-линз. Левая панель относится к течениям типа hlns, правая – elns. На обоих панелях изображены последовательности вложенных расширяющихся областей, соответствующих заведомо быстрым течениям. Эти области ограничены представленными на рисунках кривыми и прямой $\beta = \mathfrak{D}$ (жирная линия). В случае течений типа hlns (слева) построены шесть областей, причём L изменяется от $2.5L_*$ до $1.5L_*$ с шагом $0.2L_*$ (в порядке возрастания областей). В случае течений типа elns (справа) построены семь областей, причём L изменяется от $L_*+0.95(\pi/2)$ до $L_*+0.65(\pi/2)$ (в этом случае $\pi/2 = L_0 - L_*$, см. табл. 1). Смысл пунктирной линии разъясняется на стр. 240. По поводу L_* и L_0 см. табл. 1.

В [2] тем же автором доказано, что слабое решение, удовлетворяющее условию полного протекания (то есть, описывающее безотрывное течение), будет классическим и сколь угодно гладким вне сколь угодно малых окрестностей угловых точек границы при должной гладкости данных задачи, и указано условие, достаточное для того, чтобы слабому решению соответствовало безотрывное течение. Это условие, по существу, можно выразить неравенством

$$\|G\|_{L_\infty(D)\to \mathrm{C}^1(\bar{D})} \sup_{S^+} |\omega^+| < \inf_D |\mathbf{V}_0|,$$

где $\mathbf{V}_0$ – поле скорости безвихревого потока в данном канале, определяемого заданной нормальной скоростью γ, и

$$G : \omega \mapsto \psi \, : \, -\Delta\psi = \omega \text{ в } D, \psi = 0 \text{ на } S = \partial D.$$

Условие полного протекания не необходимо для регулярности слабого решения (ниже мы дадим объяснение этому), но, видимо, близко к необходимому. В самом деле, если это условие нарушается, то возможны, например, скачки вихря на границах подобластей, заполненных замкнутыми линиями тока. Такие подобласти назовём *застойными зонами*.

Таблица 3

Вел-на	Значение							
поток	гиперболический			эллиптический				
$M_1(\mathfrak{D})$	$\frac{1+6\sigma^2+\sigma^4}{(1-\sigma^2)^2}$			1				
$M_2(\mathfrak{D})$	$\frac{1}{1-\sigma^2}$			$1+\sigma^2$				
канал	chdf	chcf	hlns	shdf	shcf	elns	edf	ecf
$h_0(L)$	$(\operatorname{sh} L+\mu(\operatorname{ch} L-1))$					$(\sin L+\mu(1-\cos L))$		
$h_*(L)$	$\hat{h}(L)$	1	$1 \vee \hat{h}(L)$	$\hat{h}(L)$	1	$\sqrt{1+\mu^2}$	$\hat{h}(L)$	1
$g_*(L)$	k	$g(L)$	$\frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2)}}$	k	$g(L)$	$k \vee g(L)$	k	$g(L)$

Таблица 3. Явные выражения величин, входящих в неравенство (14) в зависимости от типа течения и формы канала. Обозначения: $\sigma^2 = |\mathfrak{D}|$ (причём $\sigma^2 \in (0,1)$ в гиперболическом случае); $L = \alpha l$, $\alpha = \sqrt{|\beta|}$; $\mu = \hat{h}'(0) = \pm\sqrt{|\mathfrak{D}/\beta - 1|}$, $k = \sqrt{1+(\alpha\mu)^2}$, функция g определена в (19); $\vee$ – операция взятия большего из двух операндов; выражения $\hat{h}(L)$ и обозначения типов каналов см. в табл. 1 и в подписи к ней.

Течение назовём *отрывным*, если оно не безотрывно, то есть, не удовлетворяет условию полного протекания. Покажем, что широкие классы граничных условий задачи Юдовича в канале определяют отрывные течения. С этой целью укажем необходимые условия существования безотрывного течения.

Начнём со вспомогательного предложения, доказанного в [2].

Предложение 6. *Пусть задача (22-23) в канале D имеет решение $(\Psi, \Omega) \in C^1(\bar{D}) \times L_\infty(D)$ причём $\mathbf{V} = \nabla^\perp \Psi$ определяет сквозное течение. Тогда $\overline{\{\Psi(D)\}} = [0,1]$ и $\Omega = f(\Psi)$ в D, причём f – функция (25).*

Из равенства $\Omega = f(\Psi)$ следует, что функция тока безотрывного течения есть решение задачи Дирихле

$$-\Delta\Psi = f(\Psi) \text{ в } D,\ \Psi = \psi_0 \text{ на } S, \tag{26}$$

где $f(\Psi)$ определена в (25), а ψ_0 – в (23), а отсюда вытекает, в частности, регулярность слабого решения.

Нелинейность уравнения (26) однозначно определяется граничными данными (γ, ω^+). Если в результате получается задача (26), не имеющая решений Ψ, таких, что $\Psi(\bar{D}) = [0,1]$, то такие граничные условия не могут создать сквозное течение.

Теорема 3. *Пусть задача Юдовича в криволинейном четырехугольнике D с граничными данные (γ, ω^+) имеет решение, определяющее безотрывный поток; пусть данные (γ, ω^+) определяют на отрезке $[0,1]$ неотрицательную и не убывающую функцию (25). Тогда*

$$\int\limits_D f(\Psi_0)\varphi\, dz < \lambda_*(D), \tag{27}$$

где f – функция (25), Ψ_0 – функция тока потенциального течения, определяемого нормальной скоростью γ, $\lambda_* = \lambda_*(D)$ – минимальное собственное *значение задачи (12) и φ – соответствующая собственная функция, выбранная так, что*

$$\varphi(z) > 0\,\forall\, z \in D, \quad \int\limits_D \varphi(z)\, dz = 1.$$

Доказательство. Пусть при некоторых (γ, ω^+) существует сквозное течение с функцией тока Ψ. Тогда, по предложению 6, Ψ – решение задачи Дирихле (26), такое, что $\{\Psi(\bar{D})\} = [0,1]$. При этом $\Delta\Psi \le 0$ в D (по предположению о неотрицательности f), а потому

$$0 < \Psi_0(z) \le \Psi(z) \le 1\ \forall\, z \in D, \tag{28}$$

так как функция Ψ_0 – гармоническая. Далее,

$$\int\limits_D (\lambda_* \varphi \Psi - \beta f(\Psi)\varphi)\; dz = \int\limits_D (\varphi \Delta\Psi - \Psi \Delta\varphi)\; dz = -\int\limits_S \Psi \frac{d\varphi}{dn}\, dS_z > 0.$$

Последнее неравенство имеет место, так как φ достигает минимума на S, так что $d\varphi/dn < 0$ (лемма о граничной точке, [18]). Итак,

$$\int\limits_D f(\Psi)\varphi\, dz < \lambda_* \int\limits_D \varphi\Psi\, dz.$$

Отсюда, с учётом неравенств (28) и предполагаемой монотонности f, следует неравенство

$$\int\limits_D f(\Psi_0)\varphi\, dz < \lambda_* \int\limits_D \varphi\, dz,$$

что эквивалентно (27).

■

Замечание. Условие (27) устанавливает верхнюю границу некоторого среднего значения задаваемой на входе канала завихренности; при этом способ усреднения зависит от заданной нормальной скорости и от формы канала.

По теореме 3, задача Юдовича в канале, не удовлетворяющая условию (27), заведомо не имеет решения, описывающего безотрывное течение. Тем не менее, слабое решение существует, и соответствующее ему стационарное течение неизбежно отрывно (и имеет застойные зоны). Заметим, что существование хотя бы одного отрывного течения влечёт существование целого континуального семейства таких течений [45].

Пример 4. Рассмотрим задачу Юдовича в прямоугольном канале

$$D = \{(x,y) : 0 < y < 1,\, 0 < x < l\}. \tag{29}$$

с граничными данными

$$\begin{aligned} &\gamma|_{y=0} = 0; \quad \gamma|_{y=1} = 0;\\ &\gamma|_{x=0} = -1;\ \gamma|_{x=l} = 1;\\ &\omega^+|_{x=0} = \beta y^s, \quad s \geqslant 0. \end{aligned}$$

Указанные граничные данные порождают задачу Дирихле (26), где

$$\psi_0 = y, \quad f(\Psi) = \beta\Psi^s,\ \Psi \in [0,1].$$

По теореме 3, для существования сквозного течения необходимо выполнение неравенства

$$\frac{\pi\beta}{2}\int_0^1 y^s \sin \pi y \, dy < \lambda_* = \pi^2(1 + l^{-2}).$$

В частности, при $s = 0, 1, 2$, необходимо выполнение неравенств

$$\beta < c_s\lambda_*, \quad c_0 = 1,\ c_1 = 2,\ c_2 = \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 4} \approx 3,363.$$

В случае $\omega^+ \equiv \beta$ при любом значении постоянной β существует единственное стационарное течение с вихрем $\Omega \equiv \beta$. Это течение – вещественно-аналитическое в D. Тем не менее, при достаточно больших $|\beta|$ имеются застойные зоны, в которых Ψ принимает значения, лежащие вне отрезка $[0, 1]$ (этот факт ранее был указан в [19], и для несколько другой геометрии течений – в [45]). Таким образом, появление застойных зон потока не обязательно влечёт сингулярности, и течение, возможно, допускает аналитическое продолжение в застойные зоны. Заметим, что аналитическое решение единственно [45]. Укажем условия, исключающие существование аналитического решения.

Теорема 4. *Предположим, что данные (γ, ω^+) стационарной задачи Юдовича в криволинейном четырехугольнике D определяют на отрезке $[0, 1]$ функцию (25), допускающую аналитическое продолжение $\tilde f$ на $\mathbb{R}$. Пусть это продолжение неотрицательно, и для некоторого $h \in (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$\mu(h) = \inf_{r>h} r^{-1}\tilde f(r) > 0. \tag{30}$$

Если при этом задача Юдовича имеет (вещественно) аналитическое решение Ψ, причём $\Delta\Psi + \tilde f(\Psi) = 0$ всюду в D, то

$$\sup_{h\in(0,1)} \frac{\mu(h)\int\limits_{\Psi_0>h} \varphi \, dz}{1 + \int\limits_{\Psi_0>h} \varphi \, dz} < \lambda_*(D). \tag{31}$$

где обозначения Ψ_0, λ_* и φ имеют тот же смысл, что и в формулировке теоремы 3.

Доказательство. Действуя, как при доказательстве теоремы 3, приходим к оценке

$$\lambda_* > \frac{\int\limits_D f(\Psi)\varphi \, dz}{\int\limits_D \varphi\Psi \, dz},$$

где правую часть требуется оценить снизу. Для этого зафиксируем $h \in (0, 1)$ и заметим, что

$$\int\limits_D \varphi\Psi \, dz \le \left(\int\limits_{\Psi\le h} + \int\limits_{\Psi>h}\right)\varphi\Psi \, dz \le h + \int\limits_{\Psi>h} \varphi\Psi \, dz,$$

а потому

$$\frac{\int\limits_D f(\Psi)\varphi\,dz}{\int\limits_D \varphi\Psi\,dz} \geqslant \frac{\int\limits_{\Psi>h} f(\Psi)\varphi\,dz}{h+\int\limits_{\Psi>h}\varphi\Psi\,dz} \geqslant \frac{\mu(h)\int\limits_{\Psi>h}\varphi\Psi\,dz}{h+\int\limits_{\Psi>h}\varphi\Psi\,dz}.$$

Последняя дробь уменьшится, если уменьшить входящий в неё интеграл, а потому, заменив Ψ на h под знаком интеграла, а затем — Ψ на Ψ_0 в определении области интегрирования (так как $\Psi \geqslant \Psi_0$ всюду в D), получим

$$\lambda_* > \frac{\int\limits_D f(\Psi)\varphi\,dz}{\int\limits_D \varphi\Psi\,dz} \geqslant \frac{\mu(h)\int\limits_{\Psi>h}\varphi\,dz}{1+\int\limits_{\Psi>h}\varphi\,dz} \geqslant \frac{\mu(h)\int\limits_{\Psi_0>h}\varphi\,dz}{1+\int\limits_{\Psi_0>h}\varphi\,dz}.$$

■

Пример 5. Рассмотрим стационарную задачу Юдовича из примера 4, где выберем $s=2$. Тогда функция (25) имеет вид $f(h)=\beta h^2$, и $\mu(h)=\beta h$ согласно определению (30). В таком случае для существования аналитического течении необходимо выполнение неравенства

$$\beta \sup_{h\in(0,1)} \frac{h\pi\int_h^1 \sin\pi y\,dy}{2+\pi\int_h^1 \sin\pi y\,dy} < \pi^2(1+l^{-2})$$

Несколько огрубляя оценку, имеем

$$\beta < 6\lambda_*(D).$$

Заметим, что в необходимом условии существования сквозного течения при таких же граничных условиях множитель при λ_* почти вдвое меньше, см. пример 4.

References

[1] G.V. Alekseev, *On vanishing viscosity in the two dimensional steady problems of dynamics of an incompressible fluid*, Dyn. Continuous Media (Dinamica Sploshnoy Sredy), **10** (1972), 5—28 (in Russian). MR0459206

[2] G.V. Alekseev, *Uniqueness and smoothness for the vortex flows of ideal incompressible fluid*, Dyn. Continuous Media (Dinamica Sploshnoy Sredy), **15** (1973), 7—18 (in Russian). MR0462112

[3] G.V. Alekseev, *Solvability for an inhomogeneous boundary-value problem for the two dimensional equations of the ideal fluid dynamics,* Dyn. Continuous Media (Dinamica Sploshnoy Sredy), **24** (1976), 15–35 (in Russian). MR0483960

[4] G.V. Alekseev, *Stabilization of solutions of two-dimensional equations of dynamics of an ideal liquid,* J. Appl. Mech. Tech. Phys., **18** (1977), 210–216.

[5] G.V Alekseev, Y.A. Mokin, *Class of exact solutions to the ideal fluid dynamics and MHD equations*, Dyn. Continuous Media (Dinamica Sploshnoy Sredy), **12** (1972), 5–13 (in Russian).

[6] I.P. Andreichikov, V.I. Yudovich, *On auto-oscillatory regimes branching out from the Poisuille flow in a plane channel*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **202** (1972), 791–794; English translation in Sov. Math. Dokl. **13** (1972), 791–794.

[7] S.N. Antontsev, N.V. Chemetov, *Euler equations with non-homogeneous Navier slip boundary conditions*, Physica D, **237** (2008), 92–105. MR2450926

[8] S.N. Antontsev, N.V. Chemetov, *Flux of superconducting vortices through a domain*, SIAM J. Math. Anal., **39**:1 (2007), 263–280. MR2318385

[9] S. Antontsev, A. Kazhikhov, V. Monakhov, *Boundary Value Problems in Mechanics of Inhomogeneous Fluids, Studies in Mathematics and Applications*, **22**, North-Holland, 1990. MR1035212

[10] V. I. Arnold, *On an a priori estimate in the theory of hydrodynamical stability*, Izvestiya Visshikh Uchebnikh Zavedevniy, Matematika, **5** 1966, 3—5 (in Russian); English translation in Am. Math. Soc. Trans. II, **79** (1969), 267—269. MR0205552

[11] V.I. Arnold, *Sur la geometrie diffeʼrentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a' l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **16**:1 (1966), 319—361. MR0202082

[12] V.I. Arnold, B.A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics,* Springer-Verlag New York, 1998. MR1612569

[13] A. L. Afendikov, K. I. Babenko, *Mathematical modelling of turbulence in viscous incompressible flows*, Matem. Mod., **1**:8 (1989), 45—74. MR1021391

[14] A.L. Afendikov, T.J. Bridges *Instability of the Hocking-Stewartson pulse and its implications for three-dimensional Poiseuille flow*, Proc. of the Royal Soc. A, (457) 2006, 257–272.

[15] N.V. Chemetov, V.N. Starovoitov, *On a motion of a perfect fluid in a domain with sources and sinks*, J. Math. Fluid Mech., **4** (2002), 1–17. MR1908439

[16] F. Gallaire, J.-M. Chomaz, *The role of boundary conditions in a simple model of incipient vortex breakdown,* Physics of Fluids, **16** (2004), 274–286. MR2035510

[17] B. Gallet, C. R. Doering, E. A. Spiegel, *Destabilizing Taylor–Couette flow with suction*, Physics of Fluids, **22** (2010), 034105. Zbl 1188.76051

[18] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001. MR1814364

[19] M. Goldshtik, F. Hussain, *Inviscid separation in steady planar flows*, Fluid Dyn. Res., **23** (1998), 235–266. MR1640085

[20] V.N. Govorukhin, A.B. Morgulis, V.A. Vladimirov, *Planar inviscid flows in a channel of finite length: washout, trapping and self-oscillations of vorticity*, J. Fluid Mech, **659** (2010), 420–472. MR2684447

[21] V.N. Govorukhin, A.B. Morgulis, V.A. Vladimirov, *Dynamics of inviscid incompressible flows subject to the Yudovich boundary conditions*, Izvestiya VUZov Severo-Kavkazskii region, Series of Natural Sciences, Special issue "Challenging problems in mathematical hydrodynamics 51–72 (Russian).

[22] K.I. Ilin, A.B. Morgulis, *Instability of an inviscid flow between porous cylinders with radial inflow*, J. Fluid Mech., **730** (2013), 364–378. MR3096123

[23] K. Ilin, A. Morgulis, *Instability of a two-dimensional viscous flow in an annulus with permeable walls to two-dimensional perturbations*, Physics of Fluids, **27** (2015), 044107. Zbl 1326.76039

[24] K. Ilin, A. Morgulis, *Inviscid instability of an incompressible flow between rotating porous cylinders to three-dimensional perturbations*, European Journal of Mechanics-B/Fluids, **61** (2017), 46–60. MR3579642

[25] D. D. Joseph, *Stability of Fluid Motions, Vol. I, II*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976. MR0627612, MR0449147

[26] A. Kazhikhov, *Note on the formulation of the problem of flow through a bounded region using equations of perfect fluid*, Appl. Math. Mech., **44** (1981), 672—674.

[27] V.V. Kolesov, V.I. Yudovich, *Calculation of oscillatory regimes in Couette flow near the intersection point of the bifurcations of Taylor vortices and azimuthal waves*, Izvestiya Rossijskoy Akad. Nauk, , Mekhanika Zhidkosti i Gaza, **4** (1998), 81–93; English translation in Fluid dynamics, **33** (1998), 532. MR1659261

[28] V. Kolesov, L. Shapakidze, *On oscillatory modes in viscous incompressible liquid flows between two counter-rotating permeable cylinders*, in: G. Iooss, O. Gues, A. Nouri (Eds.), Trends in Applications of Mathematics to Mechanics, Chapman and Hall/CRC, 1999, 221—227.

[29] M.V. Korobkov, K. Pileckas, V.V. Pukhnachov, R. Russo, *The flux problem for the Navier–Stokes equations*, Russian Math. Surveys, **69**:6 (2014), 1065—1122 (translated from Uspekhi Mat. Nauk, **69**:6 (2014), 115—176). MR3400557

[30] N. Kochin, *On the existence theorem in hydrodynamics*, Appl. Math. Mech. (Prikl. Mat. Mekh.), **20**:2 (1956), 153—172 (in Russian). Zbl 0074.41305

[31] N.E. Kochin, I.A. Kibel, N.V. Roze, *Theoretical Hydromechanics*, Interscience Publishers, 1965.

[32] B. Leclaire, D. Sipp, *A sensitivity study of vortex breakdown onset to upstream boundary conditions*, J. Fluid Mech, **645** (2010), 81–119. Zbl 1189.76103

[33] A.E. Mamontov, *On the uniqueness of solutions to boundary value problems for non-stationary Euler equations*, in New Directions in Mathematical Fluid Mechanics (The Alexander V. Kazhikhov Memorial Volume): Birkhauser Verlag, Basel, 2009, 281—299.

[34] A. E. Mamontov, M. I. Uvarovskaya, *On the Global Solvability of the Two-Dimensional Through-Flow Problem for the Euler Equations with Unbounded Vorticity at the Entrance*, Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., **11**:4 (2011), 69—77. Zbl 1249.35254

[35] A. Morgulis, V. Yudovich, *Arnold's method for asymptotic stability of steady inviscid incompressible flow through a fixed domain with permeable boundary*, Chaos, **12** (2002), 356–371. MR1907648

[36] A.B. Morgulis, *Solvability of a three-dimensional stationary flowing problem*, Siberian Mathematical Journal, **40**:1 (1999), 121–135. MR1686938

[37] A.B. Morgulis, V.I. Yudovich, *The asymptotic stability of a steady flow of an ideal incompressible fluid through a permeable domain*, Doklady Physics, **46**:10 (2001), 736–739. MR1874350

[38] A.B. Morgulis, V.I. Yudovich, *Asymptotic stability of a stationary flowing regime of an ideal incompressible fluid*, Siberian Mathematical Journal, **43**:4 (2002), 674–688. MR1934584

[39] A.B. Morgulis, *Non-linear Asymptotic Stability for the Through-Passing Flows of Inviscid Incompressible Fluid*, Asymptotic Analysis, **66** (2010), 229–247. MR2648786

[40] M.N. Romanov, V.V. Kolesov, *Chaos generation in the Couette-Taylor problem for permeable cylinders*, Fluid Dyn., **48** (2013), 46—56. MR3393191

[41] M.N. Romanov, V.V. Kolesov, *Occurrence of quasiperiodic flows between two rotating permeable cylinders*, J. Appl. Mech. Tech. Physics, **55** (2014), 421–429.

[42] Z. Rusak, S. Wang, L. Xu, S. Taylor, *On the global nonlinear stability of a near-critical swirling flow in a long finite-length pipe and the path to vortex breakdown*, J. Fluid Mech., **712** (2012), 295–326. MR2999016

[43] Z. Rusak, S. Wang, *Wall-separation and vortex-breakdown zones in a solid-body rotation flow in a rotating finite-length straight circular pipe*, J.of Fluid Mech., **759** (2014), 321–359. Zbl 06503715

[44] E. Serre, M. A. Sprague, R. M. Lueptow, *Stability of Taylor–Couette flow in a finite-length cavity with radial throughflow*, Phys. Fluids., **20** (2008), 034106. Zbl 1182.76683

[45] O.V. Troshkin, *Topological analysis of the structure of hydrodynamic flows*, Uspekhi Mat. Nauk, **43**:4 (262) (1988), 129—158. MR0969569

[46] M.I. Uvarovskaya, *Existence and uniqueness for two dimensional problem of ideal fluid flow through a given domain*, Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., **3** (2003), 3–11 (Russian).

[47] M. R. Uhovskii, *An axisymmetrical boundary value problem for the equation of motion of an ideal incompressible fluid*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza, **3** (1967), 3—12 (Russian); English translation in Fluid Dyn. **2** (1971), 1—6. MR0220477

[48] V. I. Yudovich, *A two-dimensional problem of unsteady flow of an ideal incompressible fluid across a given domain*, Mat. Sb. **64** (1964), 562—588, (Russian); English translation in Amer. Math. Soc. Translations, **57** (1966), 277–304. MR0177577

[49] V.I. Yudovich, *The onset of self-oscillations in a fluid*, Prikl. Mat. Mekh., **35** (1971), 638–655 (Russian); English translation in J. Appl. Math. Mech., **35** (1971), 587–603. MR0381502

[50] V.I. Yudovich, *Investigation of self-oscillation of a continious media that arise at loss of stability of a steady regime*, Prikl. Mat. Mekh., **36** (1972), 450-459 (Russian); English translation in J. Appl. Math. Mech., **36** (1972).

[51] V.I. Yudovich, *Linearization Method in Hydrodynamical Stability Theory* Rostov State University, Rostov-na-Donu, 1984 (Russian); English translation in Translation of Mathematical Monographs, Vol. 74, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989. MR1003607

[52] V.I. Yudovich, *Eleven great problems of mathematical hydrodynamics*, Mosc. Math. J., **3** (2003), 711–737. MR2025281

Andrey Morgulis
SMI VSC RAS
362025, Vatutin str., 53. Vladikavkaz,

Southern Federal Univesity,
344099, Milchakova 8a, Rostov-na-Donu, Russia
E-mail address: morgulisandrey@gmail.com