S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 14, стр. 26–32 (2017) УДК 519.17+512.54
DOI 10.17377/semi.2017.14.004 MSC 05C25

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$

В.В. БИТКИНА

Abstract. It was proved that a distance regular graph in which neighborhoods of vertices are strongly regular with parameters (243,22,1,2) has intersection array $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$ or $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$. In this paper we found the automorphisms of a distance regular graph with intersection array $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$. In particular, this graph is not vertex-symmetric

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят

Bitkina, V.V., On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 15-11-10025.

Поступила 20 октября 2016 г., опубликована 24 января 2017 г.

от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ.

Граф называется реберно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] завершена классификация дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются исключительными непсевдогеометрическими графами со вторым собственным значением 4. Дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (243,22,1,2), имеет массив пересечений $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$ или $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$. В [2] найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$.

В данной работе изучаются автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$. Тогда Γ имеет $v = 1 + 243 + 13365 + 55 = 13664$ вершин и спектр $243^1, 27^{3355}, -1^{243}, -9^{10065}$. В [2, теорема 2] найдены автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(243, 22, 1, 2)$.

Предложение 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(243, 22, 1, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 11\}$ и выполняется одно из утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 27l$;*

(2) *Ω является n-кликой, либо $n = 1$, $p = 11$, $\alpha_1(g) = 99l + 22$, либо $p = 5$, $n = 3$, $\alpha_1(g) = 45l - 15$, либо $p = 2$, $n = 3$, $\alpha_1(g) = 18l - 6$;*

(3) *Ω является m-кокликой, $p = 2$, $m = 2t + 1$, $t \leq 13$, $\alpha_1(g) == 18l + 4 - 10t$;*

(4) *если Ω является объединением изолированных клик, то либо Ω — клика или коклика, либо $p = 2$, Ω является объединением m изолированных вершин и n треугольников;*

(5) *Ω содержит геодезический 2-путь и либо*

(i) $p = 3$, то Ω — сильно регулярный подграф с параметрами $(9, 4, 1, 2)$ и $\alpha_1(g) = 27l + 9 \leq 72$, либо

(ii) $p = 2$, $|\Omega| = 2l + 1 \leq 27$, каждая связная компонента графа Ω является треугольником, сильно регулярным графом с параметрами $(9, 4, 1, 2)$ или графом диаметра 3 степени 6 и с не менее чем 21 вершиной.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ пересекает t антиподальных классов по s вершинам. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 61\}$ и выполняется одно из утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 112l$ и $\alpha_1(g) = 16l + 72m - 8$, либо $p = 7$, $\alpha_3(g) = 56l < 13664, l \equiv 6 (mod 7)$, $\alpha_1(g) = 252m + 8l + 64$, либо $p = 61$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 244 + 2196l$, $l \leq 6$;*

(2) *$s = 1$, либо $p = 5$, $t \in \{4, 9, 14, 19, 24\}$, $\alpha_1(g) = 180m - t + 64$, либо $p = 11$, $t \in \{2, 13, 24\}$, $\alpha_1(g) = 396m - t + 244$;*

(3) *$t = 1$, $p = 3$, $\alpha_0(g) = s$ сравнимо с 2 по модулю 3, и $\alpha_1(g) = 108m - 9s + 72t = 1$;*

(4) *$p = 3$, $t = 4, 7, ..., 121$, $s = 2, 5, ..., 56$, st не больше 224 и $\alpha_1(g) = 108m - 9st + 8t + 64$, в случае $\mu_\Omega = 4$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{9, 4, 1; 1, 4, 9\}$ или $\{t - 1, 16, 1; 1, 4, t - 1\}$, $t = 22, 28$, либо*

(5) $p = 2$, $t = 2, 4, ..., 120$, $s = 2, 4, ..., 56$, *st не больше 224 и* $\alpha_1(g) = 8t - 9st + 72l - 8$, *в случае* $\mu_\Omega = 4$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* Ω *–- дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{t-1, 4(s-1), 1; 1, 4, t-1\}$, *где* $s = 2$ *и* $t = 10$ *или* $s = 4$ *и* $t = 16$, *или* $s = 6$ *и* $t = 22, 26$, *в случае* $\mu_\Omega = 2$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{t-1, 2(s-1), 1; 1, 2, t-1\}$, *где* $s = 2$ *и* $t = 6$ *или* $s = 4$ *и* $t = 10$, *или* $s = 6$ *и* $t = 14, 16$, *или* $s = 8$ *и* $t = 16, 18$, *или* $s = 10$ *и* $t = 22$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$. *Тогда группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует интранзитивно на множестве вершин графа* Γ.

2. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$

В леммах 1–6 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$ и спектром $243^1, 27^{3355}, -1^{243}$, -9^{10065}, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 3355, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 243 (см. [3, глава 3]). Ввиду границы Дельсарта для клик [4, предложение 4.4.6] имеем $|C| \le 1 - k/\theta_d$ для любой клики C и $|C| \le 28$.

Лемма 1. *Имеем* $\chi_1(g) = (62\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/252 + (\alpha_1(g) - 244)/36$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/56 - 1$, $\chi_1(g) - 3355$ *и* $\chi_2(g) - 243$ *делятся на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3355 & 3355/9 & -61/9 & -61 \\ 243 & -1 & -1 & 243 \\ 10065 & -3355/9 & 2013/297 & -183 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (55\alpha_0(g) + 55\alpha_1(g)/9 - \alpha_2(g)/9 - \alpha_3(g))/224$. Подставляя $\alpha_2(g) = 13664 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (62\alpha_0(g) + 7\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/252 - 61/9$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (243\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 243\alpha_3(g))/13664$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 13664 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/56 - 1$.

Последнее утверждение леммы следует из [5, лемма 1].

Лемма 2. *Если* Ω *— пустой граф, то либо*

(*i*) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 112l$ *и* $\alpha_1(g) = 16l + 72m - 8$, *либо*

(*ii*) $p = 7$, $\alpha_3(g) = 56l < 13664, l \equiv 6(mod 7)$, $\alpha_1(g) = 252m + 8l + 64$, *либо*

(*iii*) $p = 61$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 244 + 2196l$, $l \le 6$.

Доказательство. Так как $v = 32 \cdot 7 \cdot 61$, то $p = 2, 7, 61$. Положим $\alpha_i(g) = pw_i$.

Если $p = 61$, то $\alpha_3(g) = 0$, $\chi_1(g) = 61(w_1/36 - 1/9)$ и $\alpha_1(g) = 244 + 2196l$, $l \le 6$.

Если $p = 7$, то $\alpha_3(g) = 56l$, $\chi_2(g) - 243 = l - 244$ делится на 7, поэтому $l \equiv 6(mod 7)$. Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 8l - 244)/36$ сравнимо с 2 по модулю 7. Отсюда $\alpha_1(g) = 252m + 8l + 64$.

Если $p = 2$, то число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/56 - 1$ нечетно, поэтому $\alpha_3(g) = 112l$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 16l - 244)/36$ нечетно и $\alpha_1(g) = 16l + 72m - 8$.

Если Ω — непустой граф, то будем считать, что Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах. Для вершины $x \in \Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x, и положим $F(a) = \{a, a_2, ..., a_{56}\}$. Заметим, что p делит $56 - s$ и $244 - t$.

Лемма 3. *Пусть Ω — непустой граф.*

(1) *Если $s = 1$, то либо $p = 5$, $t \in \{4, 9, 14, 19, 24\}$, $\alpha_1(g) = 180m - t + 64$, либо $p = 11$, $t \in \{2, 13, 24\}$, $\alpha_1(g) = 396m - t + 244$;*

(2) *Если $t = 1$, то $p = 3$, $\alpha_0(g) = s$ сравнимо с 2 по модулю 3, и $\alpha_1(g) = 108m - 9s + 72$.*

Доказательство. Если $s = 1$, то p делит 55 и $244 - t$. Отсюда $p = 5, 11$. Так как порядок клики не превосходит 28, то при $p = 5$ имеем $t = 4, 9, 14, 19, 24$, число $\chi_1(g) = (t + \alpha_1(g) - 244)/36$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 180m - t + 64$.

При $p = 11$ имеем $t = 2, 13, 24$, число $\chi_1(g) = (t + \alpha_1(g) - 244)/36$ делится на 11 и $\alpha_1(g) = 396m - t + 244$.

Если $t = 1$, то p делит 243. Отсюда $p = 3$, $\alpha_0(g) = s$ сравнимо с 2 по модулю 3, $\alpha_3(g) = 56 - s$, число $\chi_1(g) = (9s + \alpha_1(g))/36 - 7$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 108m - 9s + 72$. Лемма доказана.

Легко понять, что если $s, t > 1$ и $p > \mu$, то $\mu_\Omega = \mu$ и Ω — дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, \mu(s - 1), 1; 1, \mu, t - 1\}$. Отсюда, если $p > 3$, то Ω — дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, 4(s - 1), 1; 1, 4, t - 1\}$.

Лемма 4. $p < 29$.

Доказательство. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $st(243 - t)$, но не больше $224(243 - t)$.

Если $p > 53$, то $s = 56$, каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна ровно с t вершинами из Ω, поэтому $t \leq 4$, противоречие.

Пусть $p = 53$. Тогда $t = 32, 85, ..., 191$. При $s = 56$ имеем $t \leq 4$, противоречие. При $s = 3$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{t - 1, 8, 1; 1, 4, t - 1\}$. Так как $\lambda_\Omega = 22$, то $t = 32$. Пусть $p = 51$. Тогда $t = 40, 91, ..., 193$. Отсюда $s = 5$, подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{39, 16, 1; 1, 4, 39\}$. В любом случае некоторое собственное значение имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть $p = 47$. Тогда $t = 9, 56, ..., 197$. Отсюда $s = 9$, подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{55, 32, 1; 1, 4, 55\}$. Пусть $p = 43$. Тогда $t = 29, 72, ..., 201$. Отсюда $s = 13$, подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{71, 48, 1; 1, 4, 71\}$.

Пусть $p = 41$. Тогда $t = 39, ..., 203$. Отсюда $s = 15$, подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{79, 56, 1; 1, 4, 79\}$. Пусть $p = 37$. Тогда $t = 22, ..., 207$. Отсюда $s = 19$, подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{95, 72, 1; 1, 4, 95\}$. Пусть $p = 31$. Тогда $t = 27, ..., 213$. Отсюда $s = 25$, подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{120, 96, 1; 1, 4, 120\}$.

Пусть $p = 29$. Тогда $t = 12, ..., 215$. Отсюда $s = 27$, подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{127, 104, 1; 1, 4, 127\}$. В любом случае имеем противоречие с тем, что st больше 224.

Лемма 5. *Если $s, t > 1$, то $p < 7$.*

Доказательство. Пусть $p = 23$. Тогда $t = 14, 37, ..., 221$. Так как st не больше 224, то $s = 10$, $t = 14$, противоречие с тем, что $t - 1 = 13 < 4(s - 1)$.

Пусть $p = 19$. Тогда $t = 16, ..., 225$, $s = 18, 37, 56$. Противоречие с тем, что st больше 224.

Пусть $p = 17$. Тогда $t = 6, ..., 227$. Так как st не больше 224 и $t - 1 > 4(s-1)$, то $s = 5$, Ω — дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{22, 16, 1; 1, 4, 22\}$ или $\{39, 16, 1; 1, 4, 39\}$. Пусть $p = 13$. Тогда $t = 10, 23, ..., 231$. Так как st не больше 224 и $t - 1 > 4(s - 1)$, то $s = 4$ и Ω— дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{22, 12, 1; 1, 4, 22\}$ или $\{35, 12, 1; 1, 4, 35\}$. В любом случае некоторое собственное значение имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть $p = 11$. Тогда $t = 2, 13, ..., 233$. Так как st не больше 224 и $t-1 > 4(s-1)$, то $s = 12$, $t < 24$, противоречие. Пусть $p = 7$. Тогда $t = 6, 13, ..., 237$. Так как st не больше 224 и $t - 1 > 4(s - 1)$, то $s = 7$, Ω— дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{26, 24, 1; 1, 4, 26\}$, $\{33, 24, 1; 1, 4, 33\}$, $\{40, 24, 1; 1, 4, 40\}$ или $\{47, 24, 1; 1, 4, 47\}$. В любом случае некоторое собственное значение имеет нецелую кратность, противоречие.

Лемма 6. *Если $s, t > 1$ и $p < 7$, то либо*

(i) $p = 3$, $t = 4, 7, ..., 121$, $s = 2, 5, ..., 56$, st не больше 224 и $\alpha_1(g) = 108m - 9st + 8t + 64$, в случае $\mu_\Omega = 4$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{9, 4, 1; 1, 4, 9\}$ или $\{t-1, 16, 1; 1, 4, t-1\}$, $t = 22, 28$, либо

(ii) $p = 2$, $t = 2, 4, ..., 120$, $s = 2, 4, ..., 56$, st не больше 224 и $\alpha_1(g) = 8t-9st+72l-8$, в случае $\mu_\Omega = 4$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений Ω –– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t-1, 4(s-1), 1; 1, 4, t-1\}$, где $s = 2$ и $t = 10$ или $s = 4$ и $t = 16$, или $s = 6$ и $t = 22, 26$, в случае $\mu_\Omega = 2$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{t-1, 2(s-1), 1; 1, 2, t-1\}$, где $s = 2$ и $t = 6$ или $s = 4$ и $t = 10$, или $s = 6$ и $t = 14, 16$, или $s = 8$ и $t = 16, 18$, или $s = 10$ и $t = 22$.

Доказательство. Пусть $p = 5$. Тогда $t = 4, 9, ..., 239$. Так как st не больше 224 и $t - 1 > 4(s - 1)$, то $s = 6$, $24 \leq t \leq 34$, Ω— дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, 20, 1; 1, 4, t - 1\}$. Противоречие с тем, что некоторое собственное значение имеет нецелую кратность.

Пусть $p = 3$. Тогда $t = 4, 7, ..., 241$, $s = 2, 5, ..., 56$ и st не больше 224. Далее, $\alpha_3(g) = (56 - s)t$, число $\chi_1(g) = (9st + \alpha_1(g) - 8t - 244)/36$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 8t + 244 - 9st + 108l + 36$.

Если $\mu_\Omega = 4$, то Ω — дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, 4(s - 1), 1; 1, 4, t - 1\}$, где $s = 2$ и $t \leq 121$ или $s = 5$ и $19 \leq t \leq 43$. В случае $s = 2$ окрестность вершины в Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(t - 1, t - 6, \lambda', (t - 6)/2)$, поэтому $t = 10$. В последнем случае $t = 22, 28$.

Если $\mu_\Omega = 1$, то Ω — дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, s - 1, 1; 1, 1, t - 1\}$, где окрестность вершины в Ω — объединение $(\lambda_\Omega + 1)$-клик, поэтому $\lambda_\Omega + 1 = t - s$ делит $t - 1$, противоречие.

Пусть $p = 2$. Тогда $\mu_\Omega \in \{0, 2, 4\}$, $t = 2, 4, ..., 120$, $s = 2, 4, ..., 56$ и st не больше 224. Далее, $\alpha_3(g) = (56 - s)t$, число $\chi_1(g) = (9st + \alpha_1(g) - 8t - 244)/36$ нечетно, поэтому $\alpha_1(g) = 8t + 244 - 9st + 72l + 36$.

Если $\mu_\Omega = 4$, то Ω — дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, 4(s - 1), 1; 1, 4, t - 1\}$, где $s = 2$ и $t = 10$ или $s = 4$ и $t = 16$, или $s = 6$ и $t = 22, 26$.

Если $\mu_\Omega = 2$, то Ω — дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, 2(s - 1), 1; 1, 2, t - 1\}$, где $s = 2$ и $t = 6$ или $s = 4$ и $t = 10$, или $s = 6$ и $t = 14, 16$, или $s = 8$ и $t = 16, 18$, или $s = 10$ и $t = 22$.

Из лемм 2–6 следует теорема.

Докажем следствие. Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{243, 220, 1; 1, 4, 243\}$, F — антиподальный класс, содержащий вершину a, и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве антиподальных классов графа Γ. Тогда $|G : G_{\{F\}}| = 244 = 61 \cdot 4$.

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если f — элемент порядка 61 из G, g — элемент простого порядка p из $C_G(f)$, $p \neq 61$, то $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф, $\alpha_1(f) = 244$, либо $\mathrm{Fix}(g)$ — пустой граф, $p = 2$, $\alpha_3(g) = 13664$ или $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 16l + 72m - 8$, $m = 34 + 61y$, либо $\mathrm{Fix}(g)$ — непустой граф, $p = 3$, $t = 61$ и $s = 2$;*

(3) *разрешимый радикал $S(G)$ является 2-группой;*

(3) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $L_2(3^5)$ или $L_2(11^2)$.*

Доказательство. Положим $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ Если Ω — пустой граф, то ввиду теоремы $p = 2$, $\alpha_3(g) = 112l$ и $\alpha_1(g) = 16l + 72m - 8$, поэтому либо $l = 122$, либо $l = 0$ и $9m - 1$ делится на 61. В последнем случае имеем $m = 34 + 61y$.

Если Ω — непустой граф, то $|\Omega|$ делится на 61 и ввиду теоремы имеем $p = 3$, $t = 61$ и $s = 2$.

Так как $v = 244 \cdot 56$, то $S(G)$ является $\{2, 7, 61\}$-группой. Ввиду утверждения (1) $S(G)$ является 2-группой.

Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. По [6, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(3^5)$, $U_5(3)$, $L_2(11^2)$ или $PSp_4(11)$.

Заметим, что в случае $U_5(3)$ имеем $|U_5(3)| = 2^{11}3^{10}5 \cdot 7 \cdot 61$, группа $\bar{T}_{\{F\}}$ изоморфна расширению элементарной абелевой группы порядка 3^7 с помощью группы автоморфизмов $U_3(3)$ или расширению элементарной абелевой группы порядка 3^8 с помощью $GL(2, 9)$. Противоречие с тем, что $|\bar{T}_{\{F\}}|$ не делится на 5 в первом случае и не делится на 7 во втором. В случае $PSp_4(11)$ имеем $|PSp_4(11)| = 2^6 3^2 5^2 11^4 61$, группа $\bar{T}_{\{F\}}$ изоморфна расширению группы порядка 11^3 с помощью центрального произведения Z_{10} и $Sp_2(11)$ или расширению элементарной группы порядка 11^3 с помощью $GL(2, 11)$. Противоречие с тем, что $|\bar{T}_{\{F\}}|$ не делится на 16 в первом случае и не делится на 25 во втором. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия. Так как $|L_2(3^5)|$ и $|L_2(11^2)|$ не делятся на 7, то G действует интранзитивно на множестве вершин графа Γ. Следствие доказано.

References

[1] A.A. Makhnev, D. V. Paduchikh *Graphs with strongly regular local subgraphs having eigenvalue 4*, Maltsevskie chteniya. Abstracts. Novosibirsk 2016. P. 86

[2] Bitkina V.V., Gutnova A.K., Makhnev, A.A., *Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{243, 220, 1; 1, 22, 243\}$, Sibirean electr. Math. Reports, **13** (2009), 1040–1051.

[3] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts, **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. MR1721031

[4] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1989. MR1002568

[5] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Mathematics, **3** (2010), 439–442. MR2766516

[6] Zavarnitsine A.V., *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. Zbl 1289.20021

Bitkina Viktoriya Vasilyevna
Severo-Osetinskii State University,
str. Vatutina, 46,
362000, Vladikavkaz, Russia
E-mail address: bviktoriyav@mail.ru